



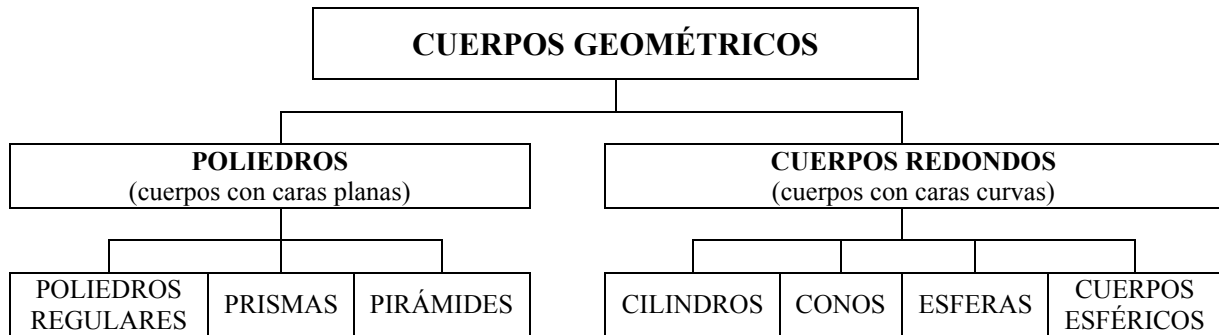
ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

1. CUERPOS GEOMÉTRICOS

En nuestro entorno observamos continuamente objetos de diversas formas: pelotas, botes, cajas, pirámides, etc. Todos estos objetos son *cuerpos geométricos*. A lo largo de todos los tiempos se han utilizado estos cuerpos en el arte y en la arquitectura.

Cuerpos geométricos son porciones de espacio limitadas por superficies planas o curvas.

Clasificamos, en el siguiente esquema, los cuerpos geométricos:

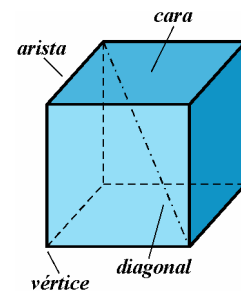


2. POLIEDROS

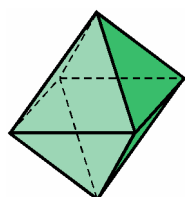
Un *poliedro* es un cuerpo geométrico que está limitado por cuatro o más polígonos.

Los principales elementos de un poliedro son:

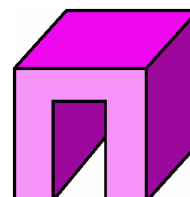
- **Caras** o polígonos que lo limitan.
- **Aristas** o lados de las caras.
- **Vértices** o puntos de corte de las aristas.
- **Diagonales** o segmentos que unen dos vértices de distintas caras.



Dentro de ellos, haremos la siguiente distinción: diremos que un poliedro es *convexo* si todas sus caras se pueden apoyar en un plano; cuando no ocurre así, se dice que el poliedro es *cóncavo*.



Poliedro convexo

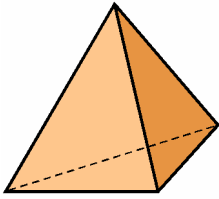


Poliedro cóncavo

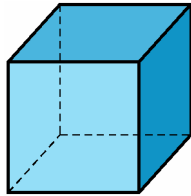
2.1. Poliedros regulares

Los **poliedros regulares** son aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de caras.

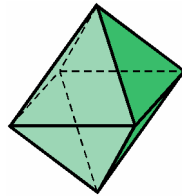
Sólo existen cinco poliedros regulares. A continuación te mostramos cada uno de ellos con su definición:



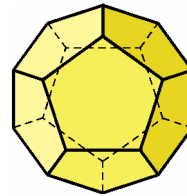
Tetraedro
4 caras
triángulos equiláteros



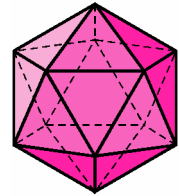
Hexaedro o cubo
6 caras
cuadrados



Octaedro
8 caras
triángulos equiláteros



Dodecaedro
12 caras
pentágonos



Icosaedro
20 caras
triángulos equiláteros

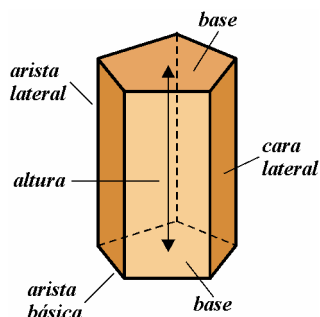
2.2. Prismas y pirámides

Los **primas** son poliedros cuyas bases, paralelas entre sí, son dos polígonos iguales y sus caras laterales son paralelogramos.

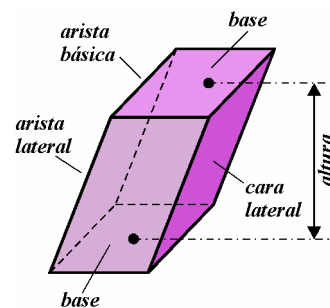
Un elemento característico de los primas es la **altura** o segmento perpendicular a sus bases.

Podemos clasificar los prismas de la siguiente manera:

- **Por los polígonos de sus bases** pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.
- **Rectos y oblicuos**, según que las aristas laterales sean perpendiculares u oblicuas a las bases.
- **Regulares o irregulares**. Son regulares aquellos prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares; y son irregulares cuando falta alguna condición de regularidad.
- **Paralelepípedos** son prismas cuyas bases son paralelogramos, luego sus seis caras son paralelogramos. Los paralelepípedos rectos se denominan **ortopedros**, y son el *ortopedro* (o *paralelepípedo rectángulo*) y el *cubo* (o *hexaedro*).

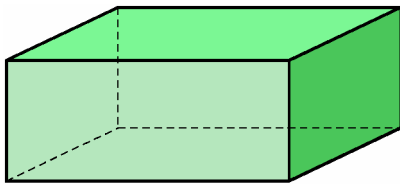


Prisma pentagonal recto (regular)
Base: pentágono regular

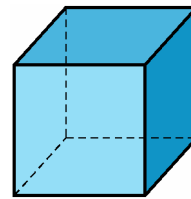


Prisma cuadrangular oblicuo (irregular)
Base: cuadrado

Paralelepípedos:



Ortoedro o paralelepípedo rectángulo
Todas sus caras son rectángulos



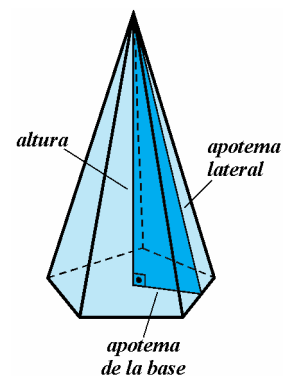
Cubo o hexaedro
Todas sus caras son cuadrados

Las **pirámides** son poliedros que tienen por base un polígono y sus caras laterales son triángulos que concurren en un **vértice**.

Los elementos más característicos de la pirámide, además de los generales de los poliedros, son:

- **Altura, h** , o distancia del vértice al plano que contiene la base.
- **Apotema lateral, a_l** , es la altura de sus caras laterales.
- **Apotema de la base, a_b** , es la apotema de la base.

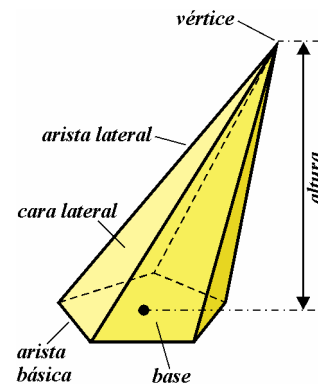
Estos tres elementos forman un triángulo rectángulo que nos resultará muy útil en los cálculos de áreas y volúmenes.



Pirámide pentagonal recta (regular)

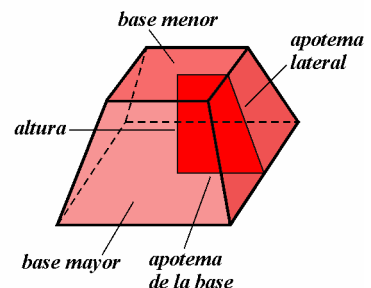
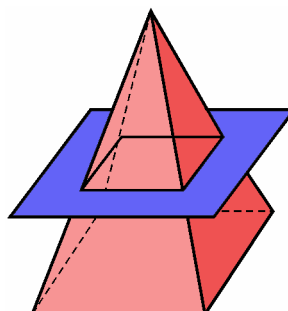
Podemos clasificar las pirámides de la siguiente manera:

- **Por los polígonos de sus bases** pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.
- **Rectas y oblicuas.** Las pirámides rectas son aquellas que tienen por caras laterales triángulos isósceles. Si alguna cara lateral es un triángulo escaleno, la pirámide es oblicua.
- **Regulares o irregulares.** Son regulares aquellas pirámides rectas que tienen por base un polígono regular; y son irregulares cuando falta alguna condición de regularidad.



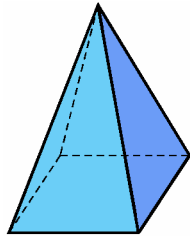
Pirámide pentagonal oblicua (irregular)

El **tronco de pirámide** es la parte de pirámide comprendida entre la base y la sección producida por un plano paralelo a la base. La altura del tronco es la distancia entre las bases y la apotema es la altura de una cara lateral (trapecio).

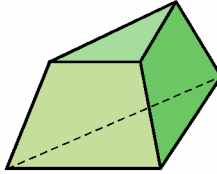


2.3. Teorema de Euler

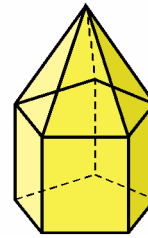
A partir de los siguientes poliedros convexos construimos la tabla que figura más abajo.



Pirámide cuadrangular



Pirámide triangular truncada



Diamante

Poliedro	C (caras)	V (vértices)	A (aristas)	C + V - A
Pirámide cuadrangular	5	5	8	2
Pirámide triangular truncada	5	6	9	2
Diamante	11	11	20	2

Observa el resultado curioso que obtenemos en la última columna: $C + V - A = 2$. Este resultado fue descubierto por Leonhard Euler (1707 – 1783) y se conoce con el nombre de teorema de Euler.

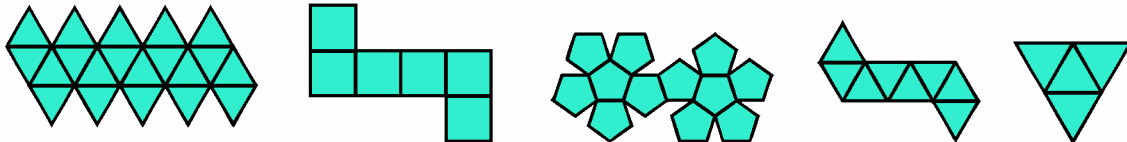
Teorema de Euler

En cualquier poliedro convexo se verifica que el número de caras (C) más el número de vértices (V) es igual al número de aristas (A) más dos.

$$\text{Nº de caras} + \text{Nº de vértices} = \text{Nº de aristas} + 2 \Rightarrow C + V = A + 2$$

EJERCICIOS

1. Indica a qué poliedro regular corresponde cada desarrollo.



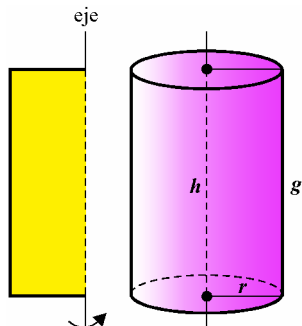
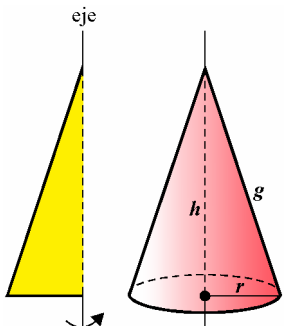
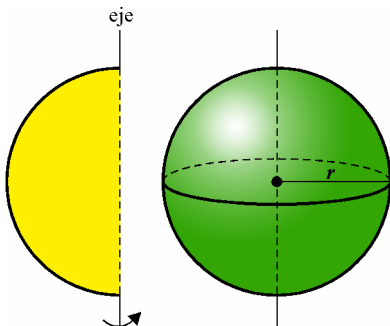
2. Completa las siguientes tablas.

Base	Prismas			Pirámides		
	C	V	A	C	V	A
Triangular						
Cuadrangular						
Pentagonal						
Hexagonal						
Heptagonal						
Base: 15 lados						
Base: n lados						

Poliedros regulares	C	V	A
Tetraedro			
Hexaedro			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

3. CUERPOS REDONDOS: CILINDRO, CONO Y ESFERA

Los cuerpos redondos de revolución se obtienen al girar una figura plana alrededor de un eje. Los tres cuerpos de revolución más sencillos son el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*.

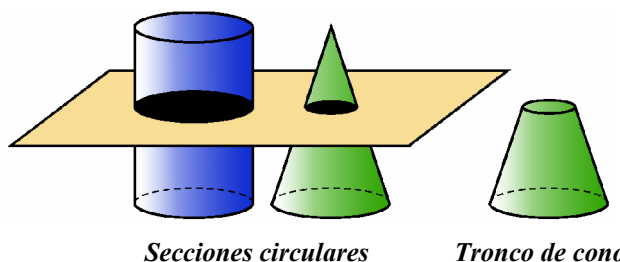
<p>El cilindro es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.</p> 	<p>El cono es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.</p> 	<p>La esfera es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.</p> 
--	--	--

Detallamos a continuación los elementos más importantes de estos cuerpos.

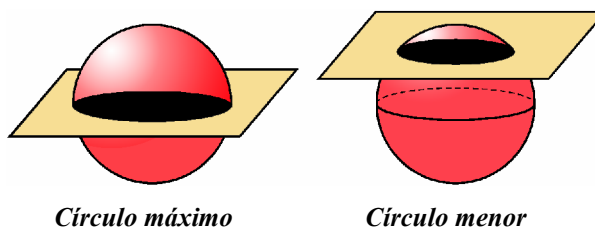
<i>Cilindro</i>	<i>Cono</i>	<i>Esfera</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Altura (h) es el segmento que une el centro de las dos bases. Es perpendicular a ambas bases. • Radio (r) es el radio de cada uno de los círculos que forman sus bases. • Generatriz (g) es el segmento que genera el cilindro. Su medida coincide con la de la altura. 	<ul style="list-style-type: none"> • Altura (h) es el segmento que une el vértice y el centro de la base. Es perpendicular a la base. • Radio (r) es el radio del círculo que forma su base. • Generatriz (g) es el segmento que genera el cono. 	<ul style="list-style-type: none"> • Radio (r) es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la superficie que limita la esfera. • Diámetro (d) es el segmento que une dos puntos de la superficie esférica pasando por el centro.

3.1. Secciones de los cuerpos redondos

Cuando se corta un cilindro o un cono por un plano paralelo a la base, la sección que se obtiene en cada caso es un círculo. En el caso del cilindro, el círculo que se obtiene es igual que el de la base. Al cortar un cono por un plano paralelo a la base se obtiene un cono menor y un **tronco de cono** que es la parte de cono comprendida entre la base y la sección producida por el plano.



Al cortar una esfera por un plano se obtiene siempre un círculo. Si el plano pasa por el centro de la esfera se obtiene un **círculo máximo** (cuyo radio es el radio de la esfera). Si el plano no pasa por el centro se obtiene un **círculo menor**.

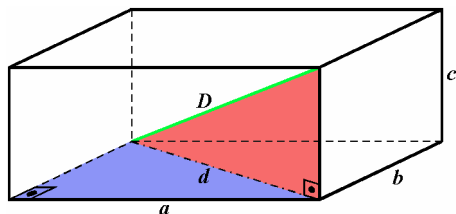


4. TEOREMA DE PITÁGORAS EN EL ESPACIO

4.1. Diagonal del ortoedro y del cubo

La diagonal de un ortoedro se puede calcular generalizando el teorema de Pitágoras a triángulos rectángulos situados en el espacio.

Llamando a , b y c a las tres dimensiones del ortoedro (ancho, largo, alto) y D a la diagonal resulta:



Si notamos por d a la diagonal de la base, se tiene:

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad [1]$$

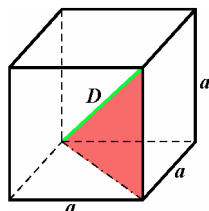
Por otro lado, en el triángulo rectángulo sombreado tenemos:

$$D^2 = d^2 + c^2 \quad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2] obtenemos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

En el caso particular del cubo, las tres dimensiones son iguales, por ello:



$$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}}$$

4.2. Relaciones métricas en pirámides, conos y esferas

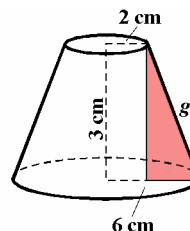
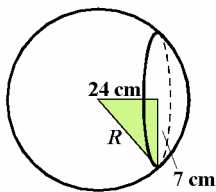
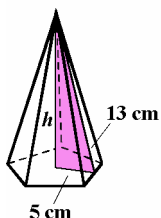
El teorema de Pitágoras permite relacionar la altura (h) de la pirámide con la apotema lateral (a_l) y con la apotema de la base (a_b). También relacionamos por este teorema los elementos de los conos: altura (h), radio (r) y generatriz (g).

En las siguientes figuras se calcula un lado de un triángulo rectángulo en pirámides, conos, troncos de cono y en esferas, cuando se conocen los otros dos lados del triángulo (unidades en centímetros).

<p>Cálculo de h</p> $a_l^2 = h^2 + a_b^2$ $h = \sqrt{a_l^2 - a_b^2}$ $h = \sqrt{100 - 36} = 8$	<p>Cálculo de g</p> $g^2 = r^2 + h^2$ $g = \sqrt{r^2 + h^2}$ $g = \sqrt{25 + 144} = 13$	<p>Cálculo de g</p> $g^2 = (R - r)^2 + h^2$ $g = \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$ $g = \sqrt{36 + 64} = 10$	<p>Cálculo de r</p> $R^2 = d^2 + r^2$ $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ $r = \sqrt{25 - 16} = 3$
--	---	--	---

EJERCICIOS

3. Calcula el valor de la diagonal de un ortoedro de dimensiones 8×6×4 cm. Halla también el valor de la diagonal de un cubo de arista 4 cm.
4. En los cuerpos siguientes, calcula la altura de la pirámide, el radio de la esfera y la generatriz del tronco de cono.



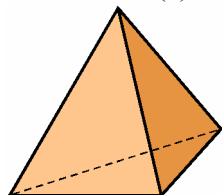
5. ÁREAS DE POLIEDROS

El **área de un poliedro** se obtiene sumando las áreas de todas las caras que lo forman. Para las pirámides y prismas se pueden obtener fórmulas sencillas que permitan calcular el área.

5.1. Áreas de poliedros regulares

Hallemos las áreas de los poliedros regulares en función de la arista a . Para aquellos cuyas caras son triángulos equiláteros (*tetraedro*, *octaedro* e *icosaedro*) recordemos que el área de un triángulo equilátero de lado a es $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (véase la unidad didáctica *Relaciones métricas y áreas en el plano*).

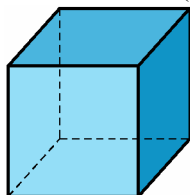
Tetraedro (1)



$$A = 4 \cdot A_{\text{cara}} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = a^2\sqrt{3}$$

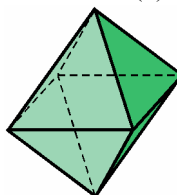
Hexaedro o cubo (2)



$$A = 6 \cdot A_{\text{cara}} = 6 \cdot a^2$$

$$A = 6a^2$$

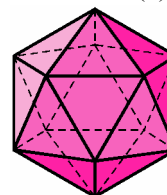
Octaedro (3)



$$A = 8 \cdot A_{\text{cara}} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = 2a^2\sqrt{3}$$

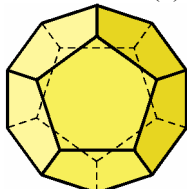
Icosaedro (4)



$$A = 20 \cdot A_{\text{cara}} = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = 5a^2\sqrt{3}$$

Dodecaedro (5)



La fórmula que nos permite obtener el área de este poliedro es la siguiente:

$$A = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

Ejemplo. Calculemos las áreas de los poliedros regulares de arista 5 cm.

(1) $A = a^2\sqrt{3} = 5^2 \cdot \sqrt{3} = 43'30 \text{ cm}^2$

(2) $A = 6a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ cm}^2$

(3) $A = 2a^2\sqrt{3} = 2 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{3} = 86'60 \text{ cm}^2$

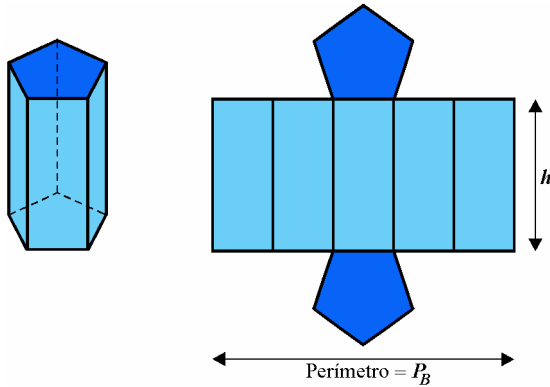
(4) $A = 5a^2\sqrt{3} = 5 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{3} = 216'51 \text{ cm}^2$

(5) $A = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 516'14 \text{ cm}^2$

5.2. Áreas de prismas y pirámides rectas

- El desarrollo de un **prisma recto** es un rectángulo (formado por las caras laterales) y los dos polígonos de las bases. Uno de los lados del rectángulo es el perímetro del polígono de la base (P_B) y el otro lado es la altura del prisma.

Prisma recto y su desarrollo



- El área lateral es igual al perímetro de la base por la altura:

$$A_L = P_B \times h$$

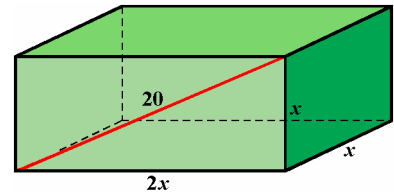
- El área total es igual al área lateral más el área de las dos bases:

$$A_T = A_L + 2 \times A_B$$

Ejemplo.

Una caja de galletas con forma de paralelepípedo mide lo mismo de largo que de alto y su ancho es doble que el largo. Si la diagonal de una de sus caras más grandes mide 20 cm, encuentra la cantidad de cartón necesaria para su construcción.

Llamamos x al largo o alto de la caja, su ancho es entonces $2x$.



Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el valor de x :

$$(2x)^2 + x^2 = 20^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 400 \Leftrightarrow x^2 = 80 \Leftrightarrow x = \sqrt{80} \cong 8'94 \text{ cm}$$

Con este valor obtenemos las áreas: $A_L = P_B \cdot h = 6x \cdot x = 6x^2 = 6 \cdot 80 = 480 \text{ cm}^2$

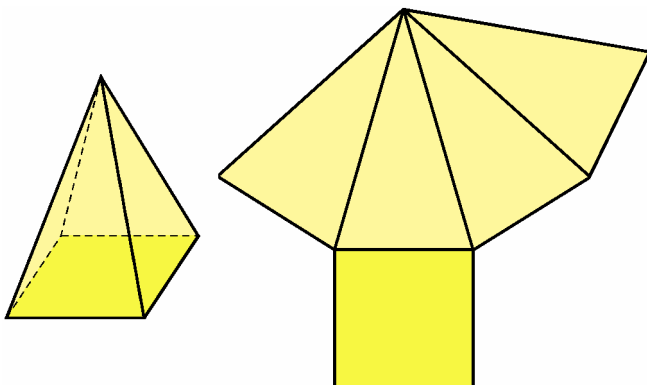
$$A_B = 2x \cdot x = 2x^2 = 2 \cdot 80 = 160 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el cartón empleado en la construcción de la caja es:

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 480 + 2 \cdot 160 = 480 + 320 = 800 \text{ cm}^2$$

- El desarrollo de una **pirámide recta** lo forman varios triángulos isósceles (caras laterales) y el polígono de la base.

Pirámide recta y su desarrollo



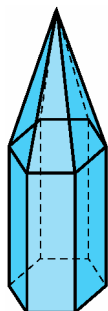
- El área lateral se obtiene sumando el área de todas las caras laterales:

$$A_L = \text{suma de las áreas de las caras laterales}$$

- El área total se obtiene sumando al área lateral el área de la base:

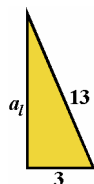
$$A_T = A_L + A_B$$

Ejemplo. La siguiente figura representa la torre de la iglesia de un pueblo. Sus dimensiones son las siguientes: la longitud de la arista básica del prisma hexagonal regular es de 6 m, la de su altura es de 9'7 m y la de la arista lateral de la pirámide hexagonal regular es de 13 m. Con estos datos, halla la superficie externa de la torre.



El área lateral del prisma es: $A_L = P_B \cdot h = 6 \cdot 6 \cdot 9'7 = 349'2 \text{ m}^2$

El área lateral de la pirámide es la suma de las áreas de sus caras laterales (triángulos isósceles), por lo que necesitamos conocer la apotema lateral, a_l . Para ello, utilizamos el triángulo rectángulo que se forma en cada una de las caras de la pirámide y por medio del teorema de Pitágoras obtenemos:



$$3^2 + a_l^2 = 13^2 \Leftrightarrow a_l^2 = 13^2 - 3^2 = 169 - 9 = 160 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_l = \sqrt{160} \cong 12'65 \text{ m}$$

El área de cada una de las caras laterales de la pirámide es $\frac{6 \cdot 12'65}{2} = 37'95 \text{ m}^2$

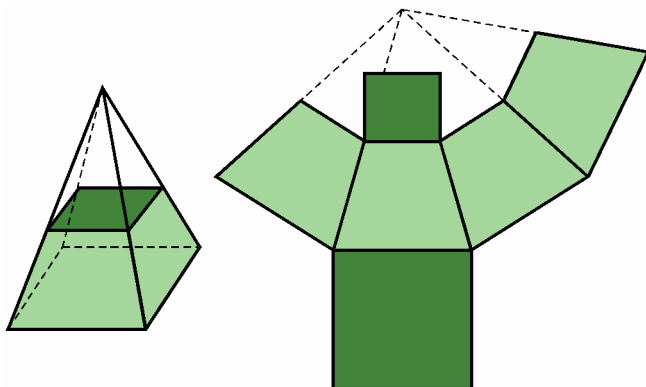
Con esto, el área lateral de la pirámide es entonces $A_L = 6 \cdot 37'95 = 227'7 \text{ m}^2$

Por tanto, el área de la superficie externa de la torre es:

$$A_{\text{torre}} = A_{L\text{prisma}} + A_{L\text{pirámide}} = 349'2 + 227'7 = 576'9 \text{ m}^2$$

- El desarrollo de un **tronco de pirámide** son varios trapecios y los dos polígonos que forman las bases. El área de una cara lateral es el área de un trapecio y el área lateral la suma de las áreas de todas las caras laterales.

Tronco de pirámide y su desarrollo



- El área lateral se obtiene sumando el área de todas las caras laterales:

$$A_L = \text{suma de las áreas de las caras laterales}$$

- El área total es igual al área lateral más la suma de las áreas de la base mayor y de la base menor:

$$A_T = A_L + A_B + A_b$$

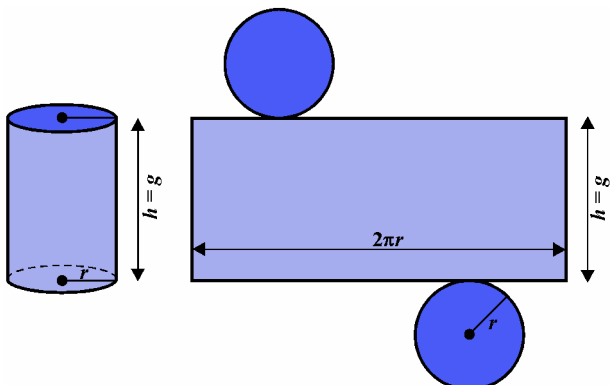
EJERCICIOS

- Calcula el área total de un prisma hexagonal regular cuya arista básica y altura miden ambas 8 cm.
- Calcula el área lateral y el área total de una pirámide hexagonal regular de arista básica 6 cm y 4 cm de altura.
- Demuestra que el área lateral de una pirámide regular se puede obtener mediante la expresión $A_L = \frac{P_B \cdot a_l}{2}$. Aplica esta fórmula con los datos del ejercicio anterior y compara los resultados obtenidos.
- Calcula el área lateral y el área total de un tronco de pirámide cuyas bases son cuadrados de lados 12 y 6 m, respectivamente, y tiene una altura de 10 m.

6. ÁREAS DE CILINDROS Y CONOS

- El desarrollo de un **cilindro** es un rectángulo y dos círculos. El rectángulo tiene por base la longitud de la circunferencia y por altura la generatriz.

Cilindro y su desarrollo

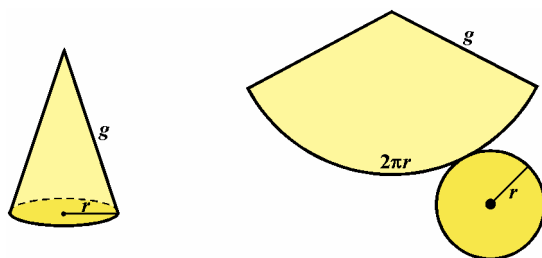


- El área lateral es, por tanto: $A_L = 2\pi r h$
- El área total es igual al área lateral más la suma de las áreas de los dos círculos:

$$A_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

- El desarrollo de un **cono** es un sector circular y un círculo. El arco del sector circular tiene de longitud $2\pi r$, porque es la longitud de la circunferencia de la base.

Cono y su desarrollo



Por consiguiente, el área lateral es igual al área del sector circular:

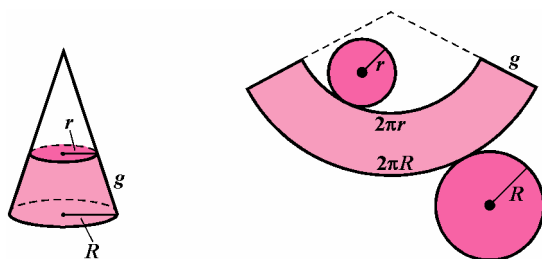
$$A_L = \frac{\text{longitud de arco} \cdot \text{radio}}{2} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} = \pi r g$$

- El área lateral es: $A_L = \pi r g$
- El área total es igual al área lateral más el área del círculo de la base:

$$A_T = \pi r g + \pi r^2$$

- El desarrollo de un **tronco de cono** es un trapecio circular y dos círculos. El trapecio circular tiene por bases las longitudes de las circunferencias.

Tronco de cono y su desarrollo



$$A_L = \frac{(\text{longitud arco mayor} + \text{longitud arco menor})}{2} \cdot g = \frac{(2\pi R + 2\pi r)}{2} \cdot g = \frac{2\pi(R+r)}{2} \cdot g = \pi(R+r)g$$

- El área lateral es: $A_L = \pi g(R+r)$
- El área total es igual al área lateral más el área de los dos círculos:

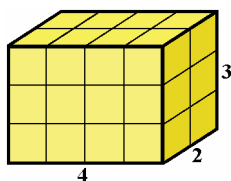
$$A_T = \pi g(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

EJERCICIOS

- Calcula el área lateral y el área total de un cilindro de 6 cm de diámetro y 8 cm de altura.
- Calcula el área lateral y el área total de un cono de radio 7 cm y 24 cm de altura.
- Calcula el área lateral y el área total de un tronco de cono cuyos radios miden 8 y 2 cm, respectivamente, y tiene una altura de 8 cm.

7. PRINCIPIO DE CAVALIERI. VOLUMEN DE PRISMAS Y CILINDROS

7.1. Volumen del ortoedro



El volumen de un cuerpo expresa el número de veces que contiene al cubo unidad. Así decimos que el volumen del ortoedro del margen es:

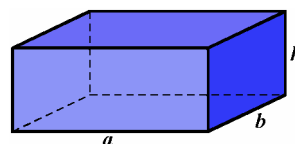
$$V = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \text{ u}^3 \text{ (unidades cúbicas)}$$

Ya conocemos, por cursos anteriores, que el volumen del ortoedro se obtiene multiplicando sus tres dimensiones:

$$\text{Volumen del ortoedro} = \text{ancho} \cdot \text{largo} \cdot \text{alto}$$

Como el ancho por el largo es el área de la base (A_B), resulta:

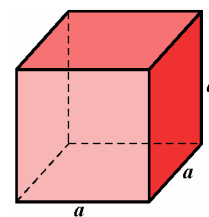
$$\text{Volumen del ortoedro} = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = A_B \cdot h$$



$$V = a \cdot b \cdot h$$

$$\text{como } a \cdot b = A_B$$

$$\boxed{V_{\text{ortoedro}} = A_B \cdot h}$$

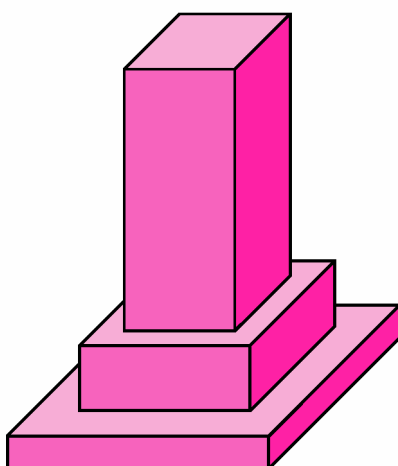


$$\boxed{V_{\text{cubo}} = a^3}$$

En el caso particular del cubo, sus tres dimensiones son iguales, con lo que:

$$\text{Volumen del cubo} = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Ejemplo. Calcula el volumen de piedra que encierra el monolito de la figura cuyas piezas tienen bases cuadradas de 40, 30 y 20 dm de lado, respectivamente, y sus alturas son 5, 10 y 50 dm.



El monolito está formado por tres ortoedros. Su volumen será la suma de los volúmenes de éstos.

Hallemos el volumen de cada uno de ellos:

$$\text{Volumen (1)} = 40^2 \cdot 5 = 8.000 \text{ dm}^3$$

$$\text{Volumen (2)} = 30^2 \cdot 10 = 9.000 \text{ dm}^3$$

$$\text{Volumen (3)} = 20^2 \cdot 50 = 20.000 \text{ dm}^3$$

El volumen de piedra es, por tanto, 37.000 dm^3 , es decir, 37 m^3 .

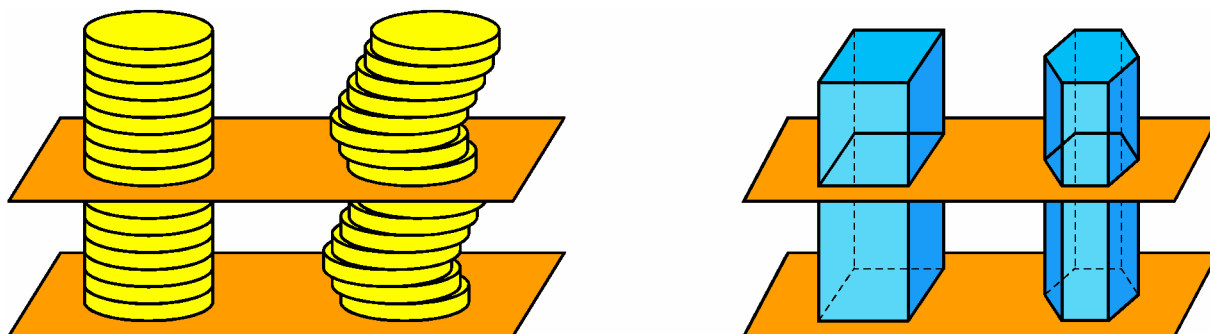
EJERCICIOS

12. Calcula el área total y el volumen de un cubo cuya diagonal mide 20 cm.

7.2. Principio de Cavalieri

En la siguiente figura se observan dos montones de fichas que tienen la misma área de la base (el área de una ficha) y la misma altura, pero tienen forma diferente. En la figura de la derecha hay dos prismas que tienen la misma área de la base y la misma altura.

En los dos casos (fichas y prismas), las secciones que resultan al cortar por planos paralelos a la base son iguales y, por tanto, tienen igual área.



Las tres condiciones que cumplen los dos montones de fichas y los dos prismas (tener la base de la misma área, tener la misma altura y tener la misma área las secciones producidas por planos paralelos a la base) permiten afirmar que los dos montones de fichas y los dos prismas tienen el mismo volumen.

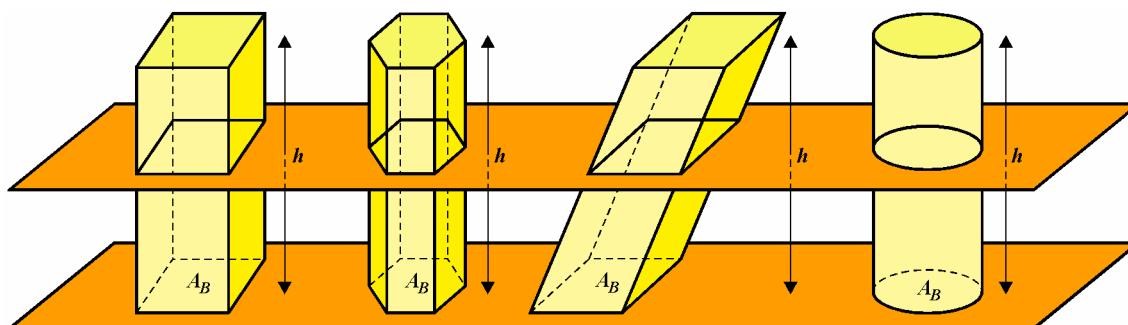
Principio de Cavalieri

Si dos o más cuerpos de igual área de la base y la misma altura se cortan por planos paralelos a la base, y las secciones producidas por cada plano en esos cuerpos tienen la misma área, entonces esos cuerpos tienen el mismo volumen.

7.3. Volumen de prismas y cilindros

Vamos a calcular el volumen del prisma y el del cilindro a partir del volumen del ortoedro que ya conocemos. Para ello, consideremos un ortoedro en el que el área de la base es A_B y la altura es h , luego su volumen es $V = A_B \cdot h$.

Supongamos ahora que los dos prismas de la figura y el cilindro tienen la misma área de la base (A_B) y la misma altura (h) que el ortoedro.



Como los prismas y el cilindro tienen las bases de igual área y tienen la misma altura, las secciones producidas por un plano paralelo a las bases a la misma altura tienen igual área. Por el principio de Cavalieri resulta que los prismas y el cilindro tienen el mismo volumen que el ortoedro.

Como el volumen del ortoedro es igual al área de la base (A_B) por la altura (h) se tiene:

$$V_{prisma} = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = A_B \cdot h$$

$$V_{cilindro} = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = A_B \cdot h$$

Para el cilindro de radio r y altura h , se tiene en particular: $V_{cilindro} = A_B \cdot h = \pi r^2 h$

El volumen de un prisma o de un cilindro es igual al área de la base por la altura:

$V_{prisma} = A_B \times h$ $V_{cilindro} = A_B \times h = \pi r^2 h$

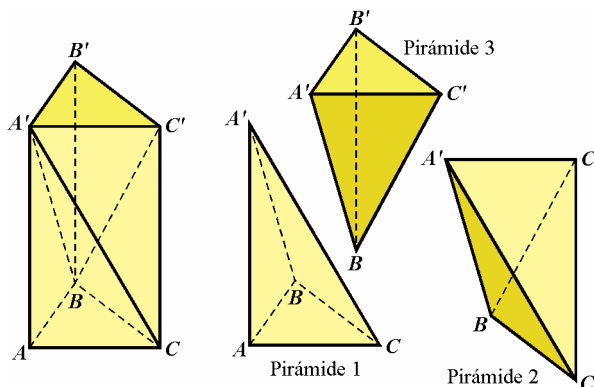
EJERCICIOS

- Calcula el volumen de un prisma triangular regular de 8 cm de altura y arista básica 5 cm.
- Inscribimos un cilindro en un cubo cuya diagonal mide 9 cm. Halla el volumen que queda entre el cubo y el cilindro inscrito en el mismo.
- Dados dos cilindros de igual altura h , y radios r y $2r$, comprueba que el volumen del segundo cilindro es cuatro veces mayor que el volumen del primero.

8. VOLUMEN DE PIRÁMIDES Y DE CONOS

8.1 Volumen de pirámides

En la siguiente figura se observa la descomposición de un prisma triangular en tres pirámides triangulares.



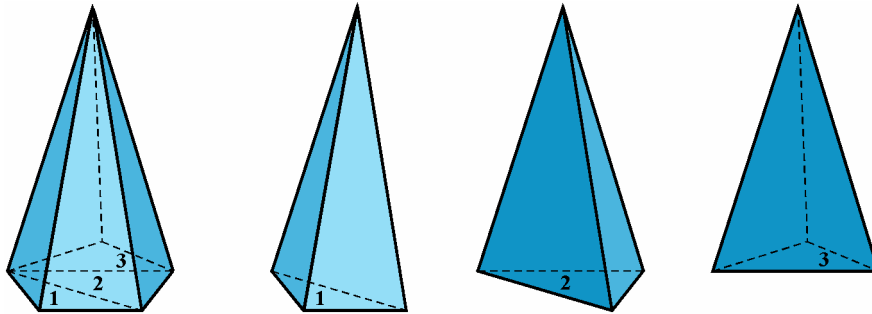
Comprobemos que las pirámides 1, 2 y 3 que resultan de la descomposición tienen el mismo volumen:

- Las pirámides 1 y 3 tienen el mismo volumen pues sus respectivas bases ABC y $A'B'C'$ son iguales (bases del prisma) y sus respectivas alturas coinciden con la altura del prisma.
- Las pirámides 3 y 2 también tienen el mismo volumen ya que sus respectivas bases $BC'B'$ y $BC'C$ son iguales y lo mismo sus alturas correspondientes al vértice A' .

Por tanto, el volumen de cada una de estas pirámides es el mismo y es la tercera parte del volumen del prisma. En consecuencia, el volumen de una pirámide triangular es igual a un tercio del volumen del prisma de la misma base y altura.

$V_{pirámide\ triangular} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$
--

No obstante, cualquier pirámide se puede descomponer en pirámides triangulares. En la siguiente figura puedes observar como se ha descompuesto una pirámide pentagonal en tres pirámides triangulares.



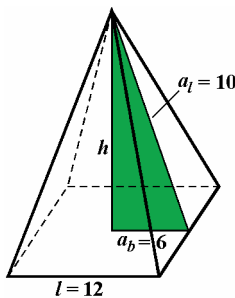
Por tanto, el volumen de esta pirámide es:

$$V = V_{\text{pirámide 1}} + V_{\text{pirámide 2}} + V_{\text{pirámide 3}} = \frac{1}{3} \cdot A_{B_1} \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_{B_2} \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_{B_3} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (A_{B_1} + A_{B_2} + A_{B_3}) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

Este resultado se puede generalizar a cualquier pirámide recta u oblicua. Así, deducimos que el volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura.

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$$

Ejemplo. Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular de 12 cm de arista básica y cuya apotema lateral mide 10 cm.



Claramente, la apotema de la base mide 6 cm.

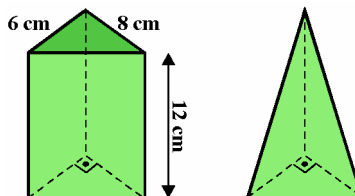
Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado obtenemos la altura de la pirámide:

$$a_l^2 = h^2 + a_b^2 \Rightarrow h^2 = a_l^2 - a_b^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

Luego $h = \sqrt{64} = 8$ cm, con lo que $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 = 384$ cm³

EJERCICIOS

16. Calcula el volumen del prisma y el de la pirámide obtenida de él.

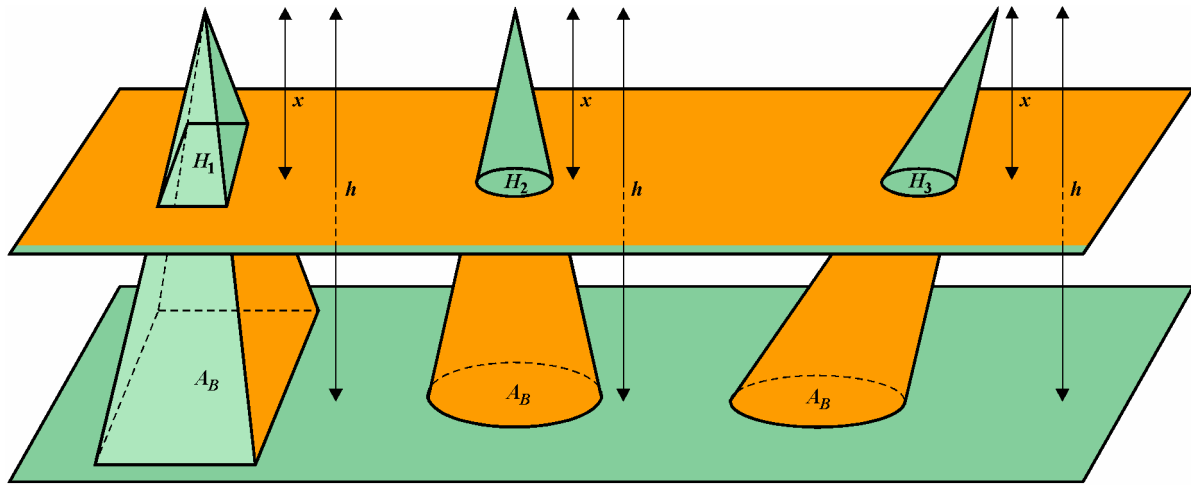


Comprueba la relación siguiente: $V_{\text{pirámide triangular}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma}}$

17. Calcula el volumen de una pirámide de 15 m de altura y cuya base es un cuadrado inscrito en una circunferencia de 5 m de radio.

8.2. Volumen de conos

La pirámide y los conos de la siguiente ilustración tienen la misma altura (h) y sus bases tienen la misma área (A_B).



Llamemos H_1, H_2, H_3 a las áreas de las secciones producidas por un plano trazado a una altura x del vértice. Como las secciones, en cada caso, son semejantes a la base, se tiene que la razón de las áreas de cada sección a la base correspondiente es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

$$\frac{H_1}{A_B} = \frac{H_2}{A_B} = \frac{H_3}{A_B} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

De las tres razones primeras resulta $H_1 = H_2 = H_3$, es decir, las áreas de las secciones producidas por el plano son todas iguales.

Aplicando el principio de Cavalieri, resulta:

Todas las pirámides y conos con la misma área de la base e igual altura tienen el mismo volumen.

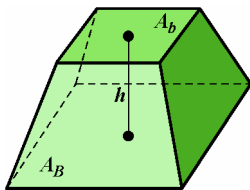
En consecuencia, el volumen de un cono es igual a un tercio del área de la base por la altura.

En particular, para el cono de radio r y altura h , se tiene:

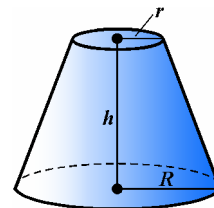
$$V_{cono} = \frac{1}{3} \times A_B \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

8.3. Volumen del tronco de pirámide y del tronco de cono

Para calcular el volumen de los troncos de pirámides y de conos podemos aplicar, directamente, las fórmulas siguientes:



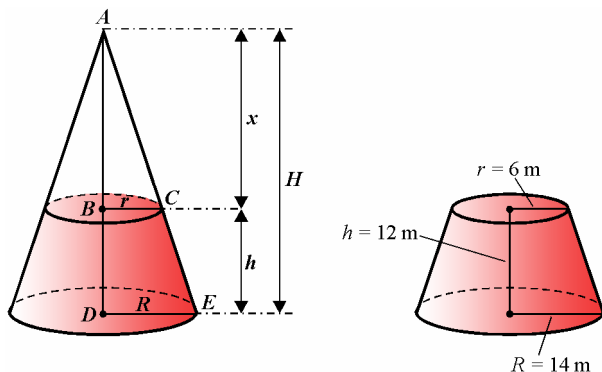
$$V = \frac{1}{3} \times h \times (A_B + A_b + \sqrt{A_B \times A_b})$$



$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times h \times (R^2 + r^2 + R \times r)$$

No obstante, podemos también hallarlos mediante criterios de semejanza.

Volumen del tronco de cono



Para calcular el volumen de un tronco de cono, como el de la figura, seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos la altura x del cono pequeño.
- Calculamos la altura H del cono grande.
- El volumen del tronco de cono es la diferencia entre el volumen del cono grande y el volumen del cono pequeño.

En nuestro caso, al ser los triángulos ABC y ADE semejantes, tenemos: $\frac{x}{x+h} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{x}{x+12} = \frac{6}{14} \Rightarrow x = 9$ m

Calculamos la altura H del cono grande: $H = x + h = 9 + 12 = 21$ m

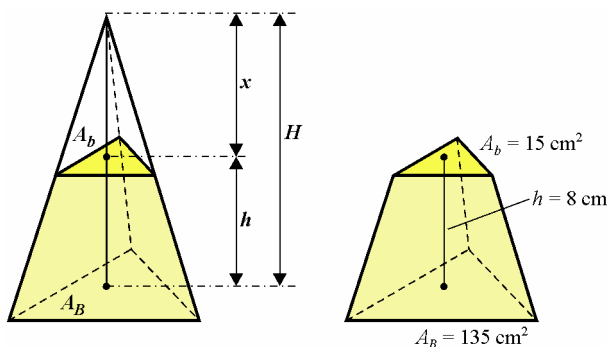
El volumen del tronco de cono es la diferencia entre el volumen del cono grande y el volumen del cono pequeño:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 14^2 \cdot 21 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 9 = 1.372\pi - 108\pi = 1.264\pi \cong 3.970'97 \text{ m}^3$$

Aplicando directamente la fórmula, obtendríamos:

$$V = \frac{\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3} = \frac{\pi \cdot 12 \cdot (14^2 + 6^2 + 14 \cdot 6)}{3} = \frac{3.792\pi}{3} = 1.264\pi \cong 3.970'97 \text{ m}^3$$

Volumen del tronco de pirámide



Para calcular el volumen de un tronco de pirámide seguimos un procedimiento similar al utilizado con el cono:

- Calculamos la altura x de la pirámide pequeña.
- Calculamos la altura H de la pirámide grande.
- El volumen del tronco de pirámide lo obtenemos por diferencia entre el volumen de la pirámide grande y el de la pirámide pequeña.

Por semejanza, tenemos: $\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{x}{x+h}\right)^2 \Rightarrow \frac{15}{135} = \left(\frac{x}{x+h}\right)^2 \Rightarrow x = 4$ cm

Calculamos la altura H de la pirámide grande: $H = x + h = 4 + 8 = 12$ cm

El volumen del tronco de pirámide lo obtenemos por diferencia entre los volúmenes:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 135 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 4 = 540 - 20 = 520 \text{ cm}^3$$

Aplicando la fórmula, obtendríamos:

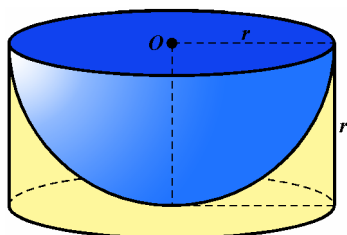
$$V = \frac{h \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})}{3} = \frac{8 \cdot (135 + 15 + \sqrt{135 \cdot 15})}{3} = \frac{8 \cdot (135 + 15 + 45)}{3} = \frac{8 \cdot 195}{3} = 520 \text{ cm}^3$$

EJERCICIOS

18. Calcula el volumen de un tronco de cono de altura 6 cm, cuyas bases tienen 4 y 2 cm, respectivamente, de radio.
Solución: $V = 56\pi \text{ cm}^3 @ 175'93 \text{ cm}^3$
19. Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuyas bases son triángulos equiláteros de lados 8 y 4 cm, respectivamente, y tiene una altura de 10 cm.
Solución: $V = \frac{280\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3 @ 161'66 \text{ cm}^3$
20. Halla el volumen de un cono sabiendo que la longitud de la circunferencia de su base es 31'416 cm y su generatriz mide 10 cm.
21. Calcula el volumen de un tronco de cono de altura 6 cm, cuyas bases tienen 4 y 2 cm, respectivamente, de radio.
22. Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuyas bases son triángulos equiláteros de lados 8 y 4 cm, respectivamente, y tiene una altura de 10 cm.

9. VOLUMEN DE LA ESFERA Y ÁREA DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA

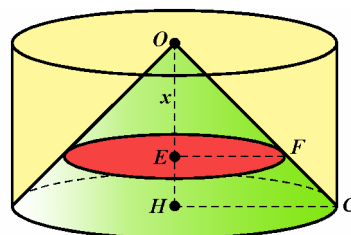
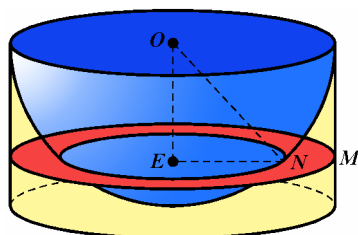
- Vamos a obtener el volumen de la *esfera* usando el principio de Cavalieri. Para ello, consideremos una semiesfera de radio r inscrita en un cilindro de altura y radio también r .



El volumen de la semiesfera lo obtenemos restando al volumen del cilindro el volumen del complemento (espacio entre el cilindro y la semiesfera):

$$V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{complemento}}$$

Mediante el principio de Cavalieri vamos a demostrar que el volumen del complemento es igual al volumen del cono de vértice O y base la del cilindro.



Observando la figura de la derecha, vemos que los triángulos rectángulos OEF y OHC son semejantes y como el triángulo OHC es isósceles, también lo es el OEF ; por tanto, $OE = EF$. Si llamamos $x = OE$ a la distancia del vértice O al plano que corta al cilindro, tenemos:

$$A_{\text{círculo sección}} = \pi \cdot EF^2 = \pi \cdot OE^2 = \pi \cdot x^2$$

Observando la figura de la izquierda tenemos:

$$A_{\text{corona sección}} = \pi \cdot (EM^2 - EN^2) \quad [1]$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OEN se tiene que:

$$EN^2 = ON^2 - OE^2 = r^2 - x^2 \quad [2]$$

Sustituyendo [2] en [1] resulta:

$$A_{\text{corona sección}} = \pi \cdot (EM^2 - EN^2) = \pi \cdot (r^2 - (r^2 - x^2)) = \pi \cdot (r^2 - r^2 + x^2) = \pi \cdot x^2$$

Por tanto, ambas secciones tienen la misma área, $A_{\text{círculo sección}} = A_{\text{corona sección}}$. Por el principio de Cavalieri resulta entonces que $V_{\text{cono}} = V_{\text{complemento}}$.

Hemos hallado así el volumen de la semiesfera:

$$V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}} = \pi \cdot r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r = \pi \cdot r^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

El volumen de la esfera es, por tanto, el doble:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Ejemplo. Calcula el volumen de un cilindro de radio 6 cm y altura 6 cm, de un cono de radio 6 cm y altura 6 cm, y el de una esfera de radio 6 cm, y exprésalos en función de π . Una vez hallados estos volúmenes, comprueba la relación $V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}}$.

En efecto:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 216\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 72\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow V_{\text{semiesfera}} = 144\pi \text{ cm}^3$$

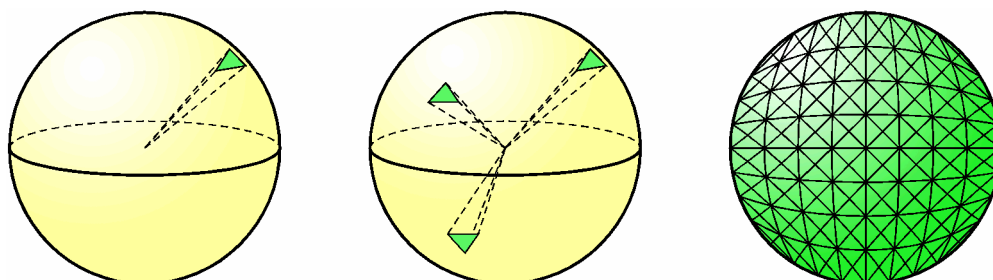
Se cumple entonces que: $V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}} = 216\pi - 72\pi = 144\pi = V_{\text{semiesfera}}$

EJERCICIOS

23. Un teorema atribuido a Arquímedes afirma que el volumen de una esfera es los dos tercios del volumen del cilindro circunscrito. Pruébalo.
24. Circunscribimos un prisma hexagonal regular a una esfera de 2 m de radio. Halla el volumen que hay entre el prisma y la esfera.

- La **superficie esférica** no se puede desarrollar sobre el plano como ocurre con la superficie de los poliedros o con el cilindro y el cono. El proceso que se sigue para calcular el área de la superficie esférica es análogo al que utilizamos para hallar el área de un círculo, partiendo de la consideración de las áreas de los polígonos regulares inscritos o circunscritos en el círculo cuando crece el número de lados (véase la unidad didáctica *Relaciones métricas y áreas en el plano*).

El volumen de la esfera se puede aproximar sumando los volúmenes de muchas pirámides triangulares iguales, cuyas bases (triángulos) están inscritos o circunscritos en la superficie esférica y cuyos vértices están en el centro de la esfera.



Si llamamos B_1, B_2, \dots, B_n al área de las bases de las pirámides y h es la altura de cada pirámide, resulta que el volumen de la esfera se aproxima a:

$$\frac{1}{3}B_1h + \frac{1}{3}B_2h + \dots + \frac{1}{3}B_nh = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \dots + B_n)h$$

A medida que el número de pirámides sobre la esfera aumenta, ocurre que:

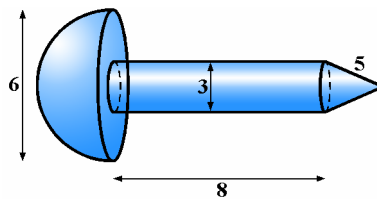
- 1.- La suma de las áreas de las bases de las pirámides $B_1 + B_2 + \dots + B_n$ tiende a ser el área S de la superficie esférica.
- 2.- Las alturas (h) de las pirámides tienden a ser el radio (r) de la esfera.

Por tanto, teniendo en cuenta que el volumen de la esfera es $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r$, resulta entonces:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r \Rightarrow \boxed{S = 4\pi r^2}$$

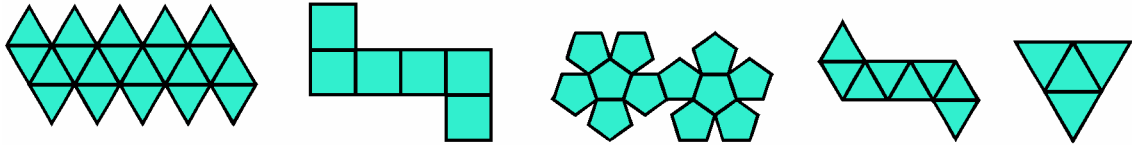
EJERCICIOS

25. Averigua el volumen y la superficie de las siguientes esferas:
 - a) Una esfera en la que un plano que la corta, pasando por su centro, produce una sección de 1.256 cm^2 de área.
 - b) Una esfera en la que un plano que la corta, a una distancia de 9 cm de su centro, produce una sección que tiene 314 cm^2 de área.
26. Determina los volúmenes y las superficies de las esferas inscrita y circunscrita a un cubo de 1 m de lado.
27. Halla el área y el volumen del siguiente cuerpo, cuyas medidas están dadas en centímetros.



SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Indica a qué poliedro regular corresponde cada desarrollo.



Se deja para el alumno.

2. Completa las siguientes tablas.

Base	Prismas			Pirámides		
	C	V	A	C	V	A
Triangular						
Cuadrangular						
Pentagonal						
Hexagonal						
Heptagonal						
Base: 15 lados						
Base: n lados						

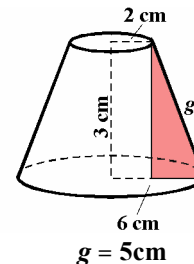
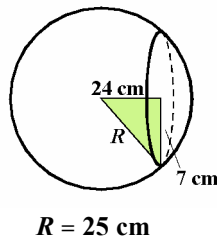
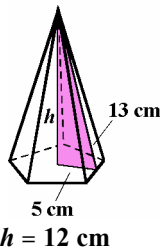
Poliedros regulares	C	V	A
Tetraedro			
Hexaedro			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

Se deja para el alumno.

3. Calcula el valor de la diagonal de un ortoedro de dimensiones 8×6×4 cm. Halla también el valor de la diagonal de un cubo de arista 4 cm.

La diagonal del ortoedro mide $\sqrt{116} @ 10'77$ cm, y la del cubo $\sqrt{48} @ 6'93$ cm.

4. En los cuerpos siguientes, calcula la altura de la pirámide, el radio de la esfera y la generatriz del tronco de cono.



5. Calcula el área total de un prisma hexagonal regular cuya arista básica y altura miden ambas 8 cm.

$A_T = 384 + 192\sqrt{3} @ 716'55$ cm².

6. Calcula el área lateral y el área total de una pirámide hexagonal regular de arista básica 6 cm y 4 cm de altura.

$A_L = 18\sqrt{43} @ 118'03$ cm² y $A_T = 18\sqrt{43} + 54\sqrt{3} @ 211'56$ cm².

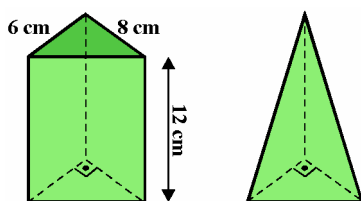
7. Demuestra que el área lateral de una pirámide regular se puede obtener mediante la expresión $A_L = \frac{P_B \cdot a_l}{2}$. Aplica esta fórmula con los datos del ejercicio anterior y compara los resultados obtenidos.

Se deja para el alumno.

8. Calcula el área lateral y el área total de un tronco de pirámide cuyas bases son cuadrados de lados 12 y 6 m, respectivamente, y tiene una altura de 10 m.

$A_L = 36\sqrt{109} @ 375'85$ m² y $A_T = 180 + 36\sqrt{109} @ 555'85$ m².

9. Calcula el área lateral y el área total de un cilindro de 6 cm de diámetro y 8 cm de altura.
 $A_L = 48p @ 150'80 \text{ cm}^2$ y $A_T = 66p @ 207'35 \text{ cm}^2$.
10. Calcula el área lateral y el área total de un cono de radio 7 cm y 24 cm de altura.
 $A_L = 175p @ 549'78 \text{ cm}^2$ y $A_T = 224p @ 703'72 \text{ cm}^2$.
11. Calcula el área lateral y el área total de un tronco de cono cuyos radios miden 8 y 2 cm, respectivamente, y tiene una altura de 8 cm.
 $A_L = 100 @ 314'16 \text{ cm}^2$ y $A_T = 168p @ 527'79 \text{ cm}^2$.
12. Calcula el área total y el volumen de un cubo cuya diagonal mide 20 cm.
 $A_T = 800 \text{ cm}^2$ y $V = \frac{8.000\sqrt{3}}{9} @ 1.539'60 \text{ cm}^3$.
13. Calcula el volumen de un prisma triangular regular de 8 cm de altura y arista básica 5 cm.
 $V = 50\sqrt{3} @ 86'60 \text{ cm}^3$.
14. Inscibimos un cilindro en un cubo cuya diagonal mide 9 cm. Halla el volumen que queda entre el cubo y el cilindro inscrito en el mismo.
 $V = 81\sqrt{3}(1 - \frac{p}{4}) @ 30'11 \text{ cm}^3$.
15. Dados dos cilindros de igual altura h , y radios r y $2r$, comprueba que el volumen del segundo cilindro es cuatro veces mayor que el volumen del primero.
Se deja para el alumno.
16. Calcula el volumen del prisma y el de la pirámide obtenida de él.



Comprueba la relación siguiente: $V_{\text{pirámide triangular}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma}}$

$V_{\text{prisma}} = 288 \text{ cm}^3$ y $V_{\text{pirámide}} = 96 \text{ cm}^3$. Claramente se verifica que $V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma}}$.

17. Calcula el volumen de una pirámide de 15 m de altura y cuya base es un cuadrado inscrito en una circunferencia de 5 m de radio.
 $V = 250 \text{ m}^3$.
18. Calcula el volumen de un tronco de cono de altura 6 cm, cuyas bases tienen 4 y 2 cm, respectivamente, de radio.
Solución: $V = 56p \text{ cm}^3 @ 175'93 \text{ cm}^3$
19. Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuyas bases son triángulos equiláteros de lados 8 y 4 cm, respectivamente, y tiene una altura de 10 cm.
Solución: $V = \frac{280\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3 @ 161'66 \text{ cm}^3$
20. Halla el volumen de un cono sabiendo que la longitud de la circunferencia de su base es 31'416 cm y su generatriz mide 10 cm.
 $V = \frac{125p\sqrt{3}}{3} @ 226'72 \text{ cm}^3$.
21. Calcula el volumen de un tronco de cono de altura 6 cm, cuyas bases tienen 4 y 2 cm, respectivamente, de radio.
 $V = 56p @ 175'93 \text{ cm}^3$.
22. Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuyas bases son triángulos equiláteros de lados 8 y 4 cm, respectivamente, y tiene una altura de 10 cm.
 $V = \frac{280\sqrt{3}}{3} @ 161'66 \text{ cm}^3$.

23. Un teorema atribuido a Arquímedes afirma que el volumen de una esfera es los dos tercios del volumen del cilindro circunscrito. Pruébalo.

Se deja para el alumno.

24. Circunscribimos un prisma hexagonal regular a una esfera de 2 m de radio. Halla el volumen que hay entre el prisma y la esfera.

$$V = 32\sqrt{3} - \frac{32p}{3} @ 21'92 \text{ m}^3.$$

25. Averigua el volumen y la superficie de las siguientes esferas:

a) Una esfera en la que un plano que la corta, pasando por su centro, produce una sección de 1.256 cm^2 de área.

b) Una esfera en la que un plano que la corta, a una distancia de 9 cm de su centro, produce una sección que tiene 314 cm^2 de área.

a) $S = 5.024 \text{ cm}^2$ y $V = \frac{32.000p}{3} @ 33.510'32 \text{ cm}^3.$

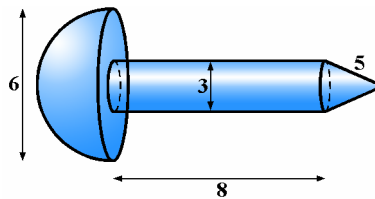
b) $S = 724p @ 2.274'51 \text{ cm}^2$ y $V = \frac{4p(\sqrt{181})^3}{3} @ 10.200'15 \text{ cm}^3.$

26. Determina los volúmenes y las superficies de las esferas inscrita y circunscrita a un cubo de 1 m de lado.

Esfera inscrita: $S = p @ 3'14 \text{ m}^2$ y $V = \frac{p}{6} @ 0'52 \text{ m}^3.$

Esfera circunscrita: $S = 3p @ 9'42 \text{ m}^2$ y $V = \frac{p\sqrt{3}}{2} @ 2'72 \text{ m}^3.$

27. Halla el área y el volumen del siguiente cuerpo, cuyas medidas están dadas en centímetros.



$A = 56'25p @ 176'71 \text{ cm}^2$ y $V @ 39'58p @ 124'34 \text{ cm}^3.$