8 Semejanza

Estamos rodeados de representaciones a escala del mundo real: el plano de una casa, el callejero de tu ciudad, las maquetas de los grandes monumentos…

Los arquitectos o los publicistas, con sus dibujos, representan objetos reales reduciendo su tamaño. Por ejemplo, el cuadro Gran Vía *de* Antonio López *es un reflejo de la realidad. La real y la reproducida son imágenes semejantes.*

En el siglo IV a. C. los atenienses pidieron ayuda a los dioses para terminar con una epidemia. A cambio, debían duplicar el volumen de un altar con forma de cubo, dedicado al dios Apolo. Los atenienses construyeron un altar cuya arista medía el doble que la arista inicial.

a) Supongamos que el altar fuera un cubo de 3 m de arista. ¿Cuál sería su volumen?

b) Si se duplica la arista, ¿cuál es el volumen del nuevo cubo? ¿Es el doble del volumen inicial?

c) Piensa cuál fue el fallo de los atenienses y cuál debió ser la medida correcta de la arista.

Recuerda y resuelve

Cómo se halla un término desconocido en una proporción.

Dada una **proporción** (igualdad entre dos razones) en la que uno de sus términos, *x*, es desconocido:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Los productos cruzados son iguales, es decir: $a \cdot x = b \cdot c$

Por tanto: $x = \dfrac{b \cdot c}{a}$

1 Calcula el cuarto término de las siguientes igualdades:

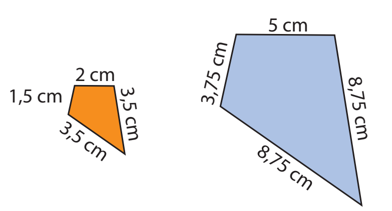
a) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{x}$ ***d)*** $\dfrac{x}{8} = 4$

b) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{x}{24}$ ***e)*** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{150}{30}$

c) $\dfrac{x}{15} = \dfrac{4}{3}$ ***f)*** $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{60}$

Qué es la razón de semejanza.

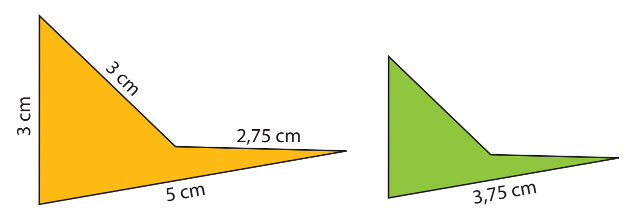
El cociente entre la medida de los lados correspondientes de dos polígonos semejantes se llama **razón de semejanza, *r*.** En estos polígonos:



$$r = \frac{2}{5} = \frac{1,5}{3,75} = \frac{3,5}{8,75} = \frac{3,5}{8,75} = 0,4$$

2 ¿Cuál es la razón entre los números 9 y 3? ¿Y entre 5 y 10?

3 Las siguientes figuras son semejantes. Halla la razón de semejanza entre ellas. Calcula las longitudes de los lados que faltan.



4 En un triángulo isósceles el lado desigual mide 3 cm y el perímetro, 11 cm. Calcula los lados de otro triángulo semejante al anterior con razón de semejanza $r = 3$.

Cómo se trabaja con las escalas.

La **escala** es una razón de semejanza expresada de la forma 1:*n*.

Una escala 1:60 000 indica que 1 cm en el papel equivale a 60 000 cm = = 600 m en la realidad.

5 La distancia entre dos puntos de un plano es de 1,5 cm. La escala del plano es 1:10 000. Calcula la distancia en la realidad. Expresa la distancia en metros.

6 Dibuja el plano de la cocina de tu casa a escala 1:50.

7 Dibuja el plano de una pared del aula. Elige la escala.

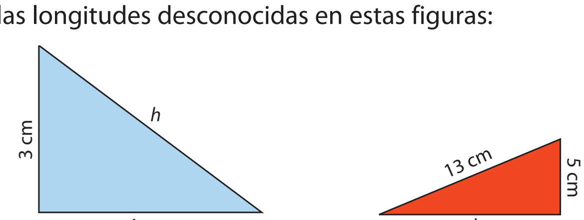
Cómo se aplica el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

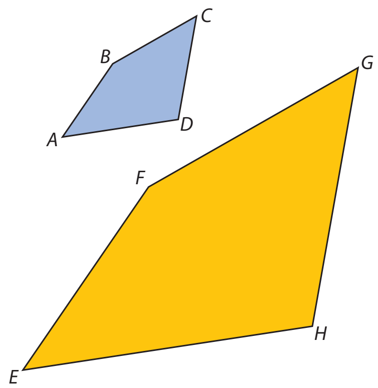
El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

8 Calcula las longitudes desconocidas en estas figuras:



1 Teorema de Tales. Semejanza de triángulos



Piensa y deduce

Observa los polígonos del margen y contesta:

a) Mide los lados. ¿Hay relación entre las medidas de los dos polígonos?

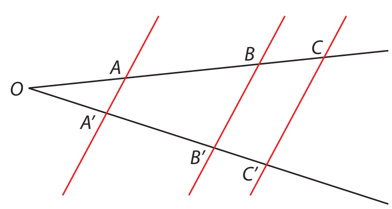
b) Ahora mide los ángulos, ¿cómo son los ángulos en los dos polígonos?

Dos **polígonos son semejantes** si cumplen las siguientes condiciones:

- Sus lados homólogos son proporcionales.
- Sus ángulos homólogos son iguales.

La razón entre sus lados se llama **razón de semejanza.**

1.1. Teorema de Tales

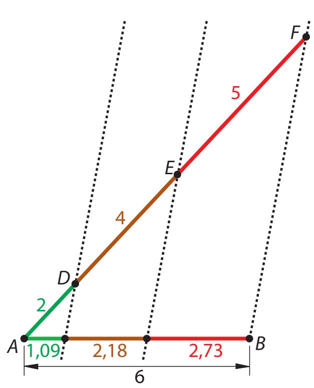


El **teorema de Tales** dice que si dos rectas concurrentes son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que se forman son proporcionales:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

Además, se verifican también las siguientes igualdades:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$$



EJERCICIOS RESUELTOS

1 Divide un segmento de 6 cm en tres partes proporcionales a 2 cm, 4 cm y 5 cm, respectivamente.

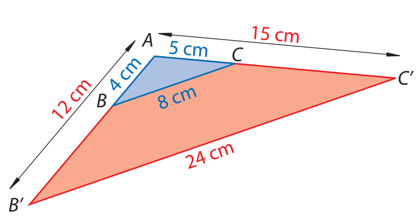
En primer lugar, dibujamos un segmento *AB* de 6 cm de longitud. A continuación, trazamos una semirrecta con origen en *A* y dibujamos tres segmentos con las medidas indicadas.

Trazamos el segmento que une el extremo del último segmento, *F*, con *B*. Las paralelas trazadas nos permiten aplicar el teorema de Tales.

Los segmentos coloreados del mismo color son proporcionales.

1.2. Triángulos en posición de Tales

En la figura de arriba en el margen podemos identificar varios triángulos *OAA'*, *OBB'* y *OCC'*. El teorema de Tales nos dice que sus lados son proporcionales. Por tanto, esos triángulos son semejantes.

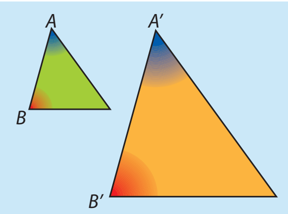
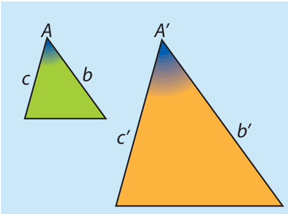
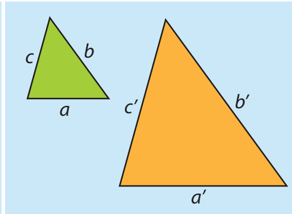


Dos triángulos con un ángulo común y cuyos lados opuestos a dicho ángulo son paralelos están en **posición de Tales.** Dos triángulos en posición de Tales son **semejantes.**

Mide, en la figura del margen, las longitudes de los lados y comprueba, realizando los cocientes entre las longitudes de los lados homólogos, que son triángulos semejantes con razón de semejanza $r = 3$.

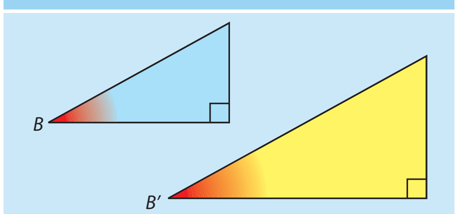
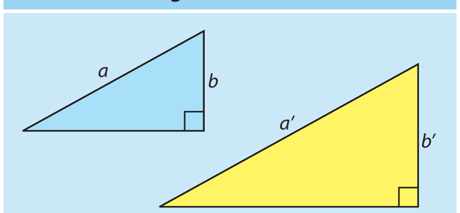
1.3. Criterios de semejanza de triángulos

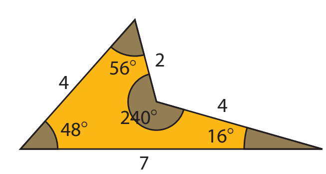
Como vimos en cursos anteriores, todos los polígonos se pueden triangular. Si conocemos los criterios de semejanza de los triángulos, podremos estudiar la **semejanza de cualquier polígono.**

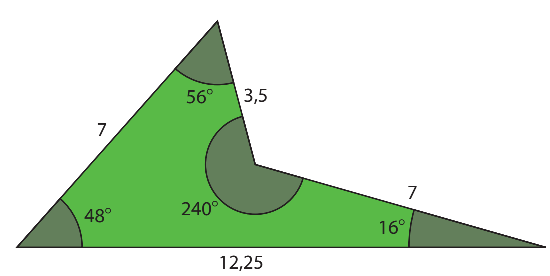
Primer criterio	Segundo criterio	Tercer criterio
		
Tienen dos ángulos homólogos iguales.	Tienen un ángulo igual y los lados que comprenden ese ángulo son proporcionales.	Tienen sus tres lados proporcionales.

Criterios de semejanza de triángulos rectángulos

En particular, para los **triángulos rectángulos** en los que conocemos uno de los ángulos, los criterios de semejanza son:

Primer criterio	Segundo criterio
	
Tienen un ángulo agudo igual.	Tienen dos lados proporcionales.





Por ejemplo, los polígonos del margen son semejantes. Para calcular la razón de semejanza hacemos lo siguiente: comprobamos que los ángulos son iguales y que las razones entre lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{12{,}25}{7} = \frac{7}{4} = \frac{3{,}5}{2} = 1{,}75 = r$$

Actividades

1 ● Divide un segmento de 5 cm de longitud en segmentos proporcionales a 2 cm y 6 cm. Mide los segmentos que has obtenido y comprueba que lo son.

2 ● La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 cm y uno de sus catetos, 9,6 cm. La hipotenusa de otro triángulo rectángulo mide 4 cm. Si se hacen coincidir los dos ángulos rectos de los triángulos, las hipotenusas son paralelas. Determina la medida de los tres lados de cada triángulo.

3 ● Las longitudes de los lados de un cuadrilátero, *C*, son $a = 5{,}2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4{,}8$ cm y $d = 2{,}5$ cm. Si *C* es semejante a *C′* y el homólogo de *a* es $a' = 13$ cm, Calcula la medida de los lados de *C′* y las razones de semejanza que transforman *C* en *C′* y *C′* en *C*.

4 ● Estas son las medidas de los lados o de dos ángulos de dos triángulos, *T* y *T′*. Comprueba si son semejantes y, en ese caso, da la razón de semejanza.

a) *T*: 3 cm, 4 cm y 5 cm y *T′*: 9 cm, 12 cm y 15 cm

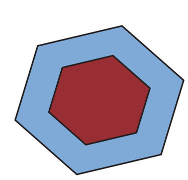
b) *T*: 3 cm, 5 cm y 6 cm y *T′*: 1,5 cm, 2,5 cm y 4 cm

c) *T*: 30°, 80° y *T′*: 70°, 30°

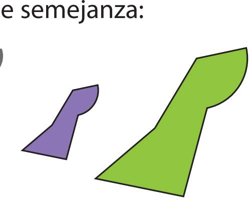
d) *T*: 90°, 20° y *T′*: 70°, 30°

5 ● Comprueba si los siguientes polígonos son semejantes y, en tal caso, determina la razón de semejanza:

a)



b)



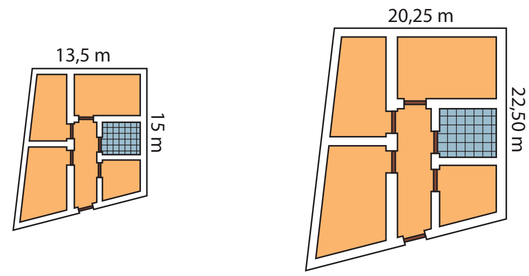
2 Escalas

Ten en cuenta

En las escalas, las **unidades de medida** que aparecen en el dibujo y las de la realidad tienen que ser las mismas.

Piensa y deduce

Los siguientes dibujos representan la distribución de las habitaciones de dos pisos diseñada por un arquitecto. Las medidas marcadas son las reales.



a) Observa las medidas y deduce si estamos hablando del mismo piso.

b) Sin embargo, las viviendas tienen la misma forma. ¿Cómo son estas viviendas? ¿Cuál es la razón de semejanza entre ellas?

c) En realidad, cada una de las figuras es semejante a la correspondiente vivienda. ¿Cómo se llama la razón entre las medidas del dibujo y las reales?

Cualquier representación de la realidad en la que se conservan las proporciones es una representación a escala. Las escalas se usan en planos y mapas y también para hacer maquetas de coches, aviones, trenes, edificios…

La **escala** es el cociente entre una unidad de longitud en la reproducción y la longitud que le corresponde en la realidad. Representa la razón de semejanza entre la reproducción y la realidad.

La razón de semejanza en una **escala** se expresa siempre como **1:*n*,** que indica que a 1 unidad en el dibujo le corresponden *n* unidades en la realidad.

EJERCICIOS RESUELTOS

2 **Se va a urbanizar una zona, con forma rectangular. Tenemos un plano de la zona a escala 1:20 000. Si las dimensiones en nuestro plano son de 5 cm de ancho y 7 cm de largo. ¿Cuáles son las dimensiones reales?**

ancho = 5 · 20 000 = 100 000 cm = 1 km de ancho

largo = 7 · 20 000 = 140 000 cm = 1,4 km de largo

Actividades

6 ● Interpreta las siguientes escalas:

a) 1:1 000

b) 1:3 000 000

7 ●● Indica en cada caso cuál es la escala:

a) 1 m real por 1 mm en el plano.

b) 5 km reales por 1 cm en el plano.

c) 1 hm real por 2 dm en el plano.

8 ● Dos pueblos que en realidad distan 120 km, ¿a qué distancia estarán en un mapa a escala 1:5 000 000?

9 ● Un mapa está a escala de 1:100 000. Calcula la distancia real entre dos pueblos que en el mapa distan:

a) 3 cm

b) 17 cm

c) 12 mm

d) 2 dm

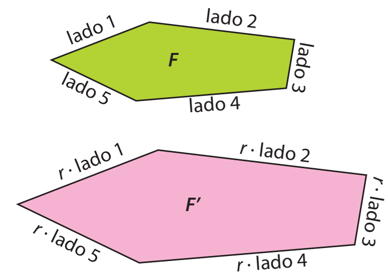
10 ●● Ana ha hecho una fotocopia de unos apuntes a una escala 1:1,5. La fotocopia tiene 21 cm de ancho. ¿Cuál es el ancho del original? ¿Cuál es el porcentaje de reducción?

11 ●● Un alumno tiene que hacer una copia de un objeto de 0,75 m de ancho en un rectángulo de 20 cm de ancho de su hoja de papel. ¿Qué escala tiene que aplicar?

3 Relación entre los perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes

3.1. Relación entre perímetros de figuras semejantes

Si *F* y *F'* son figuras semejantes con razón de semejanza *r*, la **razón entre sus perímetros** es ***r*.**



La longitud de cada lado de *F'* se obtiene multiplicando por *r* la del correspondiente lado de *F*:

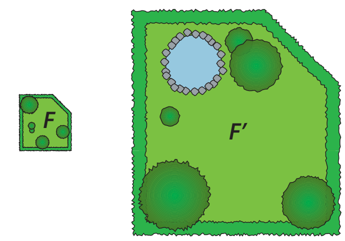
$$\textbf{Perímetro de } F' = P_{F'} = r \cdot \text{lado } 1 + r \cdot \text{lado } 2 + \ldots + r \cdot \text{lado } n =$$
$$= r \cdot (\textbf{lado 1} + \textbf{lado 2} + \ldots + \textbf{lado } n) = r \cdot P_{F'}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **Dos jardines tienen razón de semejanza $r = 4$. Si el perímetro del mayor es 24 m, ¿cuál es el perímetro del menor?**

$P_{F'} = r \cdot P_F$

$24 = 4 \cdot P_F \Rightarrow P_F = 24/4 = 6$ m

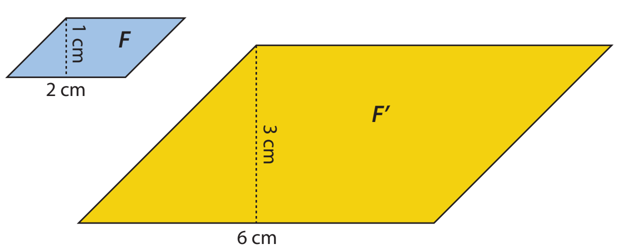


3.2. Relación entre áreas de figuras semejantes

Piensa y deduce

En las fórmulas conocidas para hallar áreas de polígonos, siempre aparecen los productos de dos dimensiones: base y altura, perímetro y apotema, etcétera.

Estas figuras, en las que se dan la base y la altura, tienen razón de semejanza $r = 3$; es decir, la base de la grande es tres veces mayor que la base de la pequeña y lo mismo ocurre con la altura.



Calcula el área de *F'* utilizando las dimensiones de *F* y la razón de semejanza. ¿Qué relación hay entre las áreas de las dos figuras?

Si la razón entre las figuras fuera *k*, ¿cuál sería la razón entre las áreas?

Si *F* y *F'* son figuras semejantes con razón de semejanza *r*, la **razón entre sus áreas** es r^2.

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Las habitaciones de Luis y María son semejantes con razón de semejanza 3/4. Luis tiene la habitación más grande; su superficie es de 16 m^2. ¿Qué superficie tiene la habitación de María?**

Área de la habitación de María = $r^2 \cdot$ área de la habitación de Luis.

Área de la habitación de María = $(3/4)^2 \cdot 16 = 9$ m^2

Actividades

12 ● Dos figuras son semejantes con razón de semejanza 4. Si el perímetro de la figura menor es 12 cm y el área 20 cm^2, calcula el perímetro y el área de la figura mayor.

13 ● Dos figuras son semejantes con razón de semejanza 0,8. Si el perímetro y el área de la menor son 11 cm y 32 cm^2, respectivamente, calcula el perímetro y el área de la mayor.

3.3. Relación entre volúmenes de cuerpos semejantes

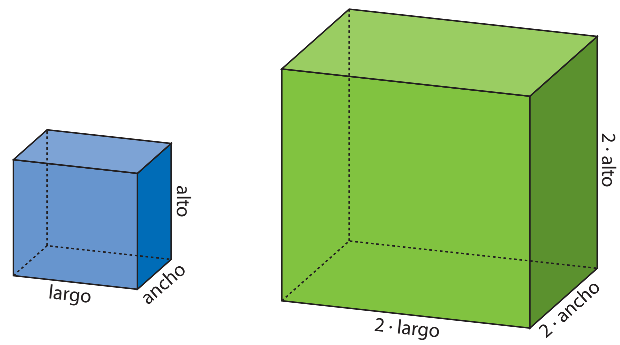
Piensa y deduce

Recuerda la fórmula del volumen de un ortoedro.

$$V_{\text{ORTOEDRO}} = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}$$

a) ¿Cuántas dimensiones hay que usar para el cálculo del volumen de un cuerpo?

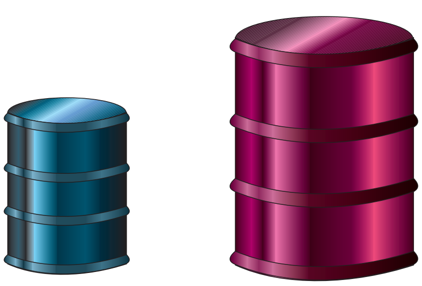
b) ¿Cuál es la razón entre los lados de estos dos ortoedros?



c) En el caso del volumen, aparecen los productos de tres dimensiones del cuerpo. ¿Cuál es la razón entre sus volúmenes?

La razón aparecerá multiplicando tres veces, luego será r^3.

Si *F* y *F'* son cuerpos semejantes con razón de semejanza *r*, la **razón entre sus volúmenes** es r^3.



EJERCICIOS RESUELTOS

5 **En un bidón caben 100 L. ¿Cuántos litros caben en un bidón semejante, con razón de semejanza $r = 1,5$? (Recuerda: 100 L = 100 dm^3)**

$V_{\text{grande}} = r^3 \cdot V_{\text{pequeño}}$

$V_{\text{grande}} = (1,5)^3 \cdot 100 = 3,375 \cdot 100 = 337,5 \text{ dm}^3$

En el bidón grande caben 337,5 L

Actividades

14 ● La razón de semejanza entre dos figuras es 6. Si el perímetro de la figura mayor es 15 cm, ¿cuál es el perímetro de la menor?

15 ● Las áreas de dos polígonos semejantes son 36 cm^2 y 100 cm^2. Determina la razón de semejanza que transforma el mayor en el menor.

16 ● Los perímetros de dos polígonos semejantes son 33 cm y 11 cm. Calcula:

a) La razón de semejanza y la razón entre las áreas de las dos figuras.

b) La longitud del lado del polígono menor homólogo a un lado del mayor de 12 cm de medida.

c) El área del polígono de mayor tamaño, sabiendo que el área del polígono homólogo de menor tamaño es 25 cm^2.

17 ● La razón de semejanza entre dos figuras es 0,5 y el área de la mayor es 28 cm^2. Calcula el área de la menor.

18 ● Si el lado de un polígono regular se hace cuatro veces mayor, ¿cuántas veces mayor se hará su área? Calcula a continuación su perímetro.

19 ● Dos cuerpos semejantes con razón de semejanza 0,25. Determina el volumen del cuerpo menor si el del mayor es 200 cm^3.

20 ● El volumen de un cuerpo es 15,8 cm^3. Calcula el volumen de otro cuerpo semejante y mayor que él, si la razón de semejanza es 3.

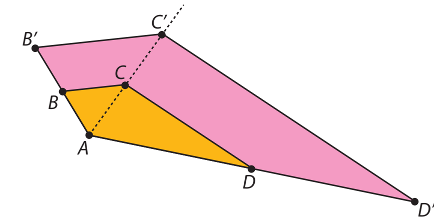
21 ● Halla las razones entre los volúmenes de dos esferas de radios *r* y *r'* y de dos cubos de aristas *a* y *a'*.

4 Construcción de figuras semejantes. Homotecia

4.1. Figuras en posición de Tales

Dos polígonos están **en posición de Tales** si tienen un ángulo común y todos los lados homólogos que no pasan por el vértice común son paralelos.

Observa la figura del margen. Si descomponemos el polígono en triángulos que tengan uno de sus vértices en común, los triángulos homólogos están en posición de Tales. Puesto que se puede descomponer el polígono en triángulos, se observa que **dos vértices homólogos siempre están alineados con el vértice común.**



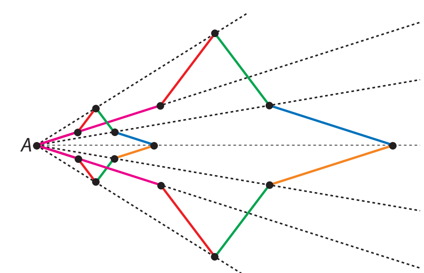
Los triángulos *ABC* y *AB′C′* están en posición de Tales, al igual que *ACD* y *AC′D′*.

EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Dibuja una estrella de cuatro puntas. Elige uno de sus vértices como vértice común y dibuja otra estrella que esté en posición de Tales con ella y con razón de semejanza $r = 3$.**

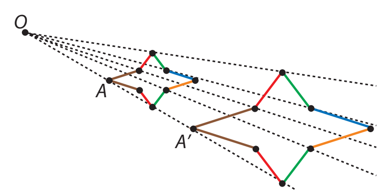
En la figura del margen, *A* es el vértice común.

- Los vértices homólogos los hemos construido trazando semirrectas con origen en el punto *A*.
- Los vértices de los lados comunes se obtienen multiplicando la longitud del lado inicial por la razón, 3.



4.2. Homotecia

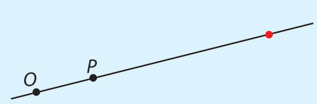
Cambiando el vértice común por otro punto cualquiera del plano podemos construir figuras semejantes. La transformación que nos lleva de una figura a otra se denomina **homotecia.**



La homotecia es la técnica que se usa para proyectar las imágenes en el cine.

Se llama **homotecia de centro *O* y razón *k*** a una transformación en el plano por la que a cada punto *P* le hace corresponder otro punto *P′* tal que *O, P* y *P′* están alineados y cumplen lo siguiente:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = k$$



Actividades

22 ● El DNI y casi todas las tarjetas tienen unas dimensiones que se corresponden con la razón áurea. El cociente entre el ancho y el alto es un número conocido ya por los griegos:

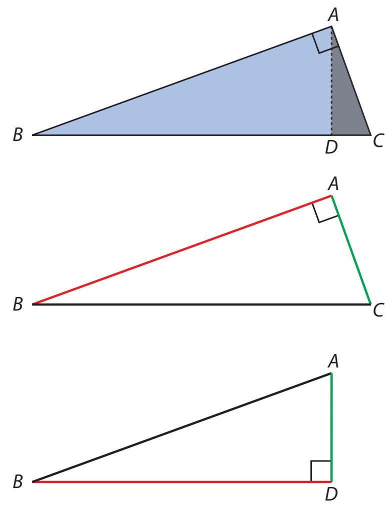
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

a) Coge tu DNI y dibuja un rectángulo áureo en tu cuaderno mediante una homotecia, con centro en uno de los vértices del carnet y razón 3.

b) Elige otro punto como centro de la homotecia. Traza otro rectángulo áureo semejante al anterior con razón 4.

23 ● Dibuja un hexágono regular de 3 cm de lado. Dibuja un hexágono semejante mediante una homotecia de razón 1,5.

24 ● Aplica a la siguiente figura una homotecia de razón 1,5.



5 Teoremas del cateto y de la altura

Piensa y deduce

En la primera figura del margen hay tres triángulos rectángulos dibujados. Identifícalos. Usa los criterios de semejanza de triángulos rectángulos para ver que son semejantes.

Veamos las proporciones entre los lados de los triángulos *ABC* y *ABD*. Los lados homólogos están coloreados del mismo color.

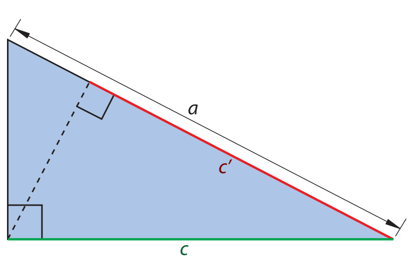
La hipotenusa *BC* es homóloga a la hipotenusa *AB*. El cateto mayor *AB* es homólogo al cateto mayor *BD*. Las proporciones entre lados homólogos son:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

Estudia las proporciones entre los lados de los triángulos *ABC* y *ADC*.

En el triángulo *ABC* de la primera figura del margen, el segmento *BD* que se obtiene al trazar la perpendicular desde el punto *A* al lado *BC* se llama **proyección de *AB* sobre *BC*** (*BD* es la proyección del cateto mayor sobre la hipotenusa). Por otro lado, el segmento *DC* es la **proyección del lado *AC* sobre *BC*** (*DC* es la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa).

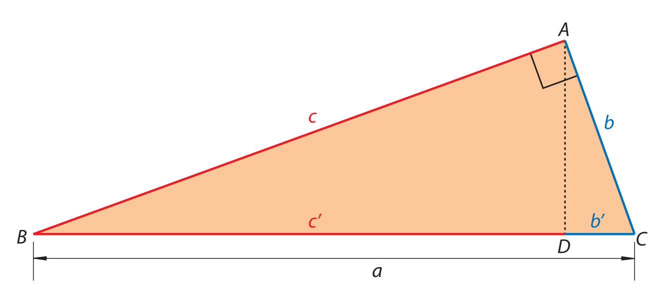
5.1. Teorema del cateto



El **teorema del cateto** afirma que en un **triángulo rectángulo,** el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre ella:

$$c^2 = a \cdot c'$$

Demostración. Los triángulos rectángulos *ABC* y *ABD* dibujados en la siguiente figura son semejantes.



Usamos las proporciones entre lados homólogos explicadas arriba.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{c'} \Rightarrow c^2 = a \cdot c'$$

EJERCICIOS RESUELTOS

7 **En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 5 cm y uno de los catetos, 3 cm. Calcula la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.**

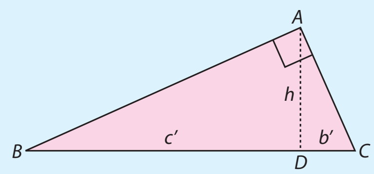
Usamos el teorema del cateto:

$$c^2 = a \cdot c' \Rightarrow 3^2 = 5 \cdot c' \Rightarrow c' = \frac{9}{5} = 1{,}8 \text{ cm mide la proyección.}$$

5.2. Teorema de la altura

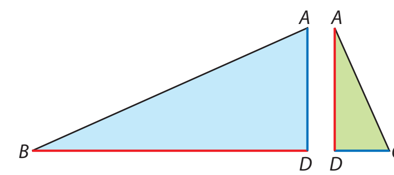
El **teorema de la altura** dice que en un **triángulo rectángulo** el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre ella:

$$h^2 = b' \cdot c'$$



Demostración. Descomponemos el triángulo *ABC* del margen.

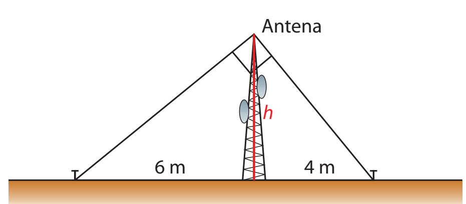
El triángulo *ABD* es semejante a *ACD*. Los lados homólogos se representan en el mismo color. Usamos las proporciones entre catetos homólogos:



$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{c'}{h} = \frac{h}{b'} \Rightarrow h^2 = b' \cdot c'$$

EJERCICIOS RESUELTOS

8 **Una antena está sujeta al suelo con dos tirantes que forman ángulo recto, como en la figura. Si la distancia de la base de la antena a los puntos de sujeción de los tirantes es de 6 m y 4 m, respectivamente, ¿cuál es la altura de la antena?**



Usamos el teorema de la altura:

$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h^2 = 6 \cdot 4 = 24 \Rightarrow h = \sqrt{24} \cong 4{,}89$ m mide la antena.

Actividades

25 ● La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 8 cm y uno de los catetos, 6,4 cm. Calcula:

a) La proyección del cateto sobre la hipotenusa.

b) La proyección del otro cateto sobre la hipotenusa.

c) La altura del triángulo sobre la hipotenusa.

d) El otro cateto.

26 ● Los catetos de un triángulo rectángulo miden, respectivamente, 7,5 cm y 10 cm. Calcula:

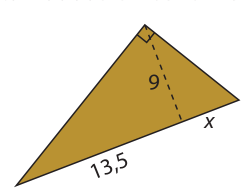
a) Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

b) La altura sobre la hipotenusa.

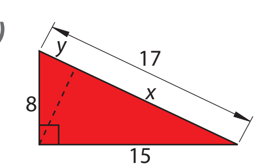
27 ● Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 10 cm, y su proyección sobre la hipotenusa, 4 cm. Halla la hipotenusa, la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa y el otro cateto.

28 ● Calcula el valor de *x* e *y*, sabiendo que las medidas están dadas en centímetros:

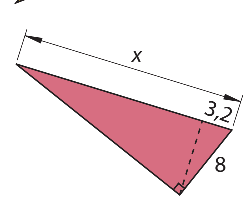
a)



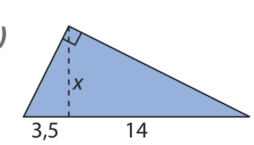
c)



b)



d)

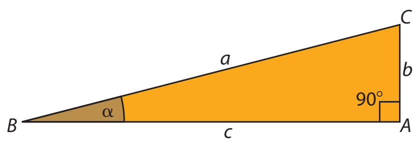


29 ● La altura sobre la hipotenusa y uno de los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 cm y 20 cm, respectivamente. Calcula la hipotenusa.

6 Razones trigonométricas de ángulos agudos

En los **triángulos rectángulos** existen algunas convenciones sobre la forma de referirse a ellos. Veamos algunas de ellas.

- El **ángulo recto** de un triángulo rectángulo suele llamarse $\hat{A} = 90°$.
- Los lados tienen el mismo nombre que el vértice opuesto.
- La **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto. Se designa con la letra *a*.
- Para nombrar los ángulos se usan letras griegas: α, β, γ, etcétera.
- En la figura del margen, el lado *b* es opuesto del ángulo α. El lado *b* se llama **cateto opuesto** a α.
- El lado *c* es el **cateto contiguo** al ángulo α.



Piensa y deduce

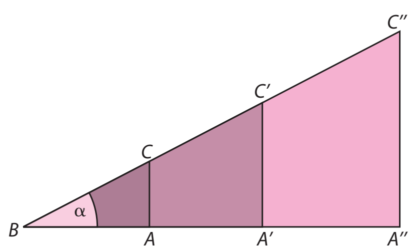
Los triángulos en posición de Tales son semejantes. En la figura del margen tenemos varios triángulos en posición de Tales que, además, son rectángulos. El vértice *B* es común a todos.

Llamamos α al ángulo común. Los ángulos *A*, *A′* y *A″* son rectos. Vamos a representar razones iguales.

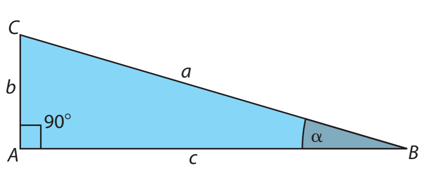
Los catetos opuestos a α son homólogos. Los catetos contiguos al ángulo α también. Por tanto, podemos decir, por el teorema de Tales, que:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B} = \frac{A''C''}{A''B}$$

Busca otras proporciones en la figura anterior que se mantengan constantes con α.



Para cada ángulo, los cocientes que hemos obtenido en el *Piensa y deduce* anterior son constantes y no dependen del triángulo rectángulo que elijamos.



Razones trigonométricas fundamentales de un ángulo agudo α		
Seno de α	**Coseno de α**	**Tangente de α**
$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\cos \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$
$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{a}$	$\cos \alpha = \dfrac{c}{a}$	$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{b}{c}$

Ten en cuenta

- El seno y el coseno de un ángulo agudo están comprendidos entre 0 y 1.
- Las razones trigonométricas de un ángulo no serán, normalmente, números enteros.

EJERCICIOS RESUELTOS

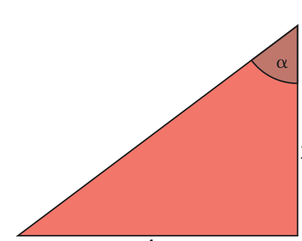
9 Calcula el seno, el coseno y la tangente del ángulo α en el siguiente triángulo.

Calculamos la hipotenusa con el teorema de Pitágoras: $a = 5$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{4}{3} = 1{,}33$$



Uso de la calculadora para encontrar las razones trigonométricas de un ángulo

Actualmente, todas las calculadoras científicas nos permiten conocer las razones trigonométricas de cualquier ángulo. Para saber cuál es el seno, el coseno o la tangente de un ángulo usaremos las teclas SIN, COS y TAN, respectivamente.

Ten en cuenta

Asegúrate de que tu calculadora está en modo DEG de grados sexagesimales.

EJERCICIOS RESUELTOS

10 **Calcula las razones trigonométricas de 43° con la calculadora.**

sen 43° ⇒ pulsa SIN 43 = lo que aparecerá: 0,681 998 360 06

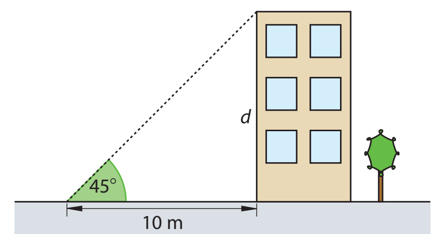
cos 43° ⇒ pulsa COS 43 = lo que aparecerá: 0,731 353 701 61

tg 43° ⇒ pulsa TAN 43 = lo que aparecerá: 0,932 515 086 137

Aplicaciones de la trigonometría

EJERCICIOS RESUELTOS

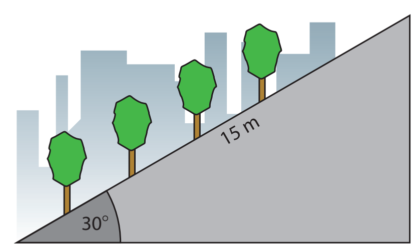
11 **Para saber cuál es la altura de un edificio nos colocamos a 10 m de su base. El tejado se ve bajo un ángulo de 45°. ¿Cuál es la altura del edificio?**



La altura del edificio es el cateto opuesto al ángulo de 45°. Conocemos el otro cateto del triángulo, que mide 10 m. La razón trigonométrica que puedo usar es tg 45° = 1:

$$\text{tg } 45° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{d}{10} \Rightarrow \frac{d}{10} = 1 \Rightarrow d = 10 \text{ m de altura tiene el edificio.}$$

12 **Una rampa forma un ángulo de 30° con el suelo. Si la rampa mide 15 m, ¿qué altura tendrá el extremo superior de la rampa?**



La altura es el cateto opuesto al ángulo 30°. Conocemos la hipotenusa del triángulo, 15 m. La razón trigonométrica que usaremos es sen 30° = 0,5:

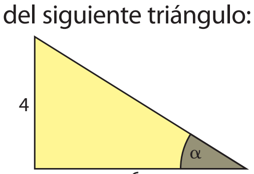
$$\text{sen } 30° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{15}; \frac{h}{15} = 0{,}5 \Rightarrow h = 7{,}5 \text{ m de altura tiene}$$

el extremo de la rampa.

Actividades

30 • Calcula:

a) Las razones trigonométricas de α del siguiente triángulo:



b) Los lados y ángulos que faltan en este triángulo:

31 • Una escalera de 2 m de longitud está apoyada en la pared formando con esta un ángulo de 20°. ¿A qué altura de la pared está el extremo superior de la escalera?

32 • Una carretera tiene una pendiente de 15° con la horizontal. Un coche ha recorrido una distancia de 30 km. ¿Cuál es la diferencia de altitud entre el principio y el final del recorrido del coche?

Estrategias para resolver problemas

Hacer un dibujo que represente los datos

Representar los datos del problema mediante un dibujo que exprese con claridad el enunciado es una estrategia necesaria para resolver problemas en geometría.

Problema

Desde un punto *P* exterior a una circunferencia trazamos las rectas tangentes a la circunferencia. La distancia de *P* al punto de tangencia es de 5 cm y el ángulo que forman las dos tangentes, de 60°. Calcula el diámetro de la circunferencia.

Resolución

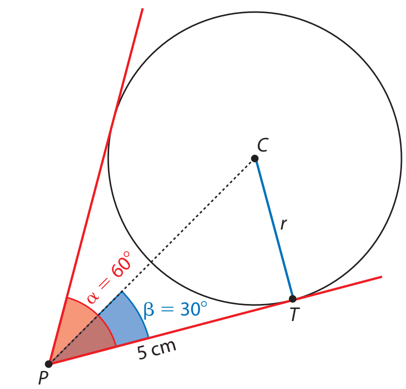
El triángulo *PCT* es rectángulo. Conocemos un ángulo de 30° y el cateto contiguo, de 5 cm.

Para calcular el radio, que es el otro cateto, usamos la tangente de 30°:

$$\text{tg } 30° = \frac{\overline{CT}}{5}; \ 0{,}58 = \frac{\overline{CT}}{5}$$

$$r = \overline{CT} = 5 \cdot 0{,}58 = 2{,}9 \text{ cm}$$

El diámetro de la circunferencia mide 5,8 cm.



Problema

Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo común. Un cateto y la hipotenusa del menor miden 5 cm y 10 cm, respectivamente. Halla las dimensiones y el área del mayor sabiendo que su hipotenusa mide 30 cm.

Resolución

Si tienen un ángulo agudo común, son semejantes. La razón de semejanza es:

$$r = \frac{30}{10} = 3$$

El cateto que falta es:

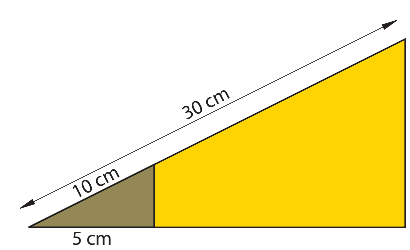
$$c = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66 \text{ cm}$$

Los catetos del triángulo grande medirán:

$$5 \cdot 3 = 15 \text{ cm y } 8{,}66 \cdot 3 = 25{,}98 \text{ cm}$$

El área del triángulo grande es:

$$A = \frac{15 \cdot 25{,}98}{2} = 194{,}85 \text{ cm}^2$$



Otros problemas

1 ● Halla la distancia entre los centros de dos esferas sabiendo que las tangentes comunes se cortan en un punto *P*, y los radios de las esferas son 1,5 km y 3,5 km, respectivamente. El ángulo que forman dichas tangentes es de 30°.

2 ●● Un campo de deportes tiene 30 m de largo y un perímetro de 90 m. Otro campo de deportes, semejante al anterior, tiene 225 m de perímetro. Se pretende poner una pista de atletismo a lo largo del lado mayor de este último. ¿Qué longitud tiene la pista de atletismo?

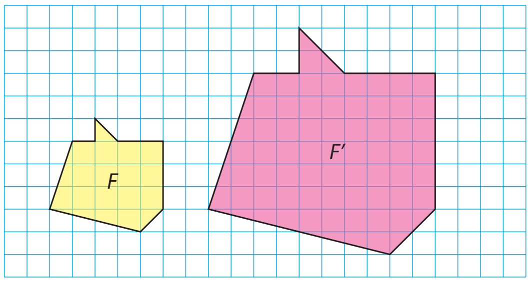
3 ● Desde un barco que está a 1,5 km de la orilla se ve la luz de un faro con un ángulo de 20° respecto a la horizontal. Calcula la distancia desde el barco al foco del faro.

4 ●● María ha estado en lo alto de la torre de la Giralda en Sevilla. Cuando sale a la calle se separa de la base de la torre 8,5 m y observa que para ver el extremo superior necesita un ángulo de elevación respecto a la horizontal de aproximadamente 85°. Si María mide 1,70 m, ¿cuál es la altura aproximada de la torre?

Ejercicios y problemas

Teorema de Tales. Semejanza de triángulos

1 ● Dados los polígonos F y F':



a) Averigua si son semejantes y, en caso de serlo, indica la razón de semejanza.

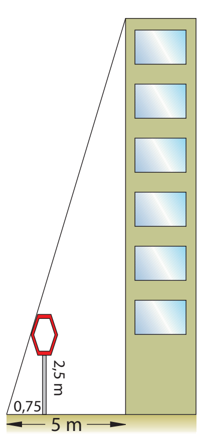
b) Dibuja F y otro semejante a él, con razón de semejanza 3, en una hoja de papel cuadriculado. Toma como unidad el lado del cuadrado de la cuadrícula.

2 ● Los lados de un rectángulo miden 6 cm y 3 cm. Dibuja otros semejantes al dado con estas razones de semejanza:

a) $\frac{1}{3}$ *b)* 2 *c)* 1,5 *d)* $\frac{5}{3}$

3 ● Dibuja un rectángulo de 3 cm de largo y 5 cm de ancho y otro que mida 1 cm más de largo y 1 cm más de ancho. ¿Son semejantes?

4 ● Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 5 m al mismo tiempo que una señal de tráfico de 2,5 m proyecta una sombra de 0,75 m.



5 ● Determina si los triángulos T y T' son semejantes o no en los siguientes casos:

a) Dos ángulos de T miden 68° y 54°. Dos ángulos de T' miden 54° y 58°.

b) Dos lados de T miden 3 cm y 2 cm, y el ángulo comprendido 40°. Dos lados de T' miden 3,75 cm y 2,5 cm, y el ángulo comprendido 40°.

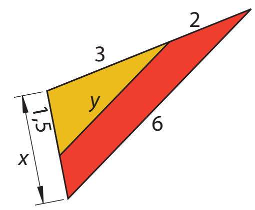
c) Dos ángulos de T miden 42° y 105°. Dos ángulos de T' miden 42° y 36°.

d) Los lados de T miden 4 cm, 5 cm y 3 cm. Los lados de T' miden 6 cm, 7 cm y 5 cm.

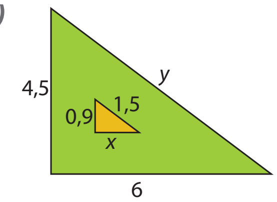
6 ● Los lados de un triángulo miden 4 cm, 5 cm y 2 cm. Dibuja otro semejante, de manera que el lado homólogo del que mide 2 cm mida 4,8 cm.

7 ●● ¿Por qué los triángulos son semejantes? Halla x e y, sabiendo que las medidas están dadas en centímetros:

a)



b)



8 ● ¿Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes?

9 ●● Adapta los tres criterios de semejanza de triángulos en el caso en que los dos sean:

a) Triángulos rectángulos. *b)* Triángulos isósceles.

Escalas

10 ● Interpreta las siguientes escalas. Expresa luego gráficamente las que están dadas de forma numérica y viceversa.

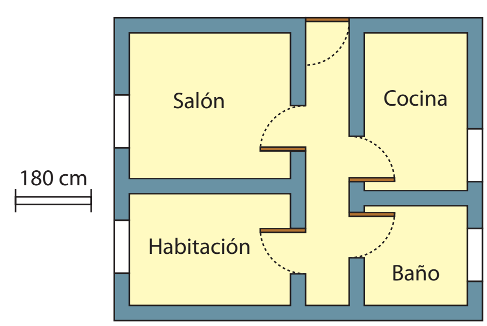
a) 1:1 500 000 *c)* 1:200 000

b) 25 km *d)* 100 km

11 ● La distancia entre dos ciudades es de 354 km. ¿Qué distancia había en un mapa a escala 1:1 500 000?

12 ●● Dos localidades que distan 50,4 km están representadas en un mapa a una distancia de 2,8 cm. ¿Con qué escala está hecho el mapa? Represéntala gráficamente.

13 ●●● Según el siguiente plano de un apartamento:



a) Calcula las dimensiones del apartamento y de cada una de las estancias que lo componen.

b) En la pared de la ventana de la cocina se quiere poner muebles de 90 cm y 60 cm de ancho. ¿Cuántos muebles de 60 cm caben? ¿Cuánto espacio sobra?

14 ●● La representación de una finca en un plano a escala 1:20 000 tiene un perímetro de 4,5 cm y un área de 1,3 cm^2. Calcula el perímetro y el área de la finca.

Ejercicios y problemas

15 ●● Una de las paredes de una cocina mide 4 m de largo por 2,5 m de alto. Haz un plano a escala 1:20 en el que se indiquen los siguientes elementos:

a) Un enchufe a 150 cm en horizontal desde la esquina inferior izquierda y a 30 cm del suelo.

b) Un interruptor a 50 cm en horizontal desde la esquina inferior derecha y a una altura de 90 cm.

c) Una ventana centrada de 140 cm de largo por 110 cm de alto, a 1,5 m del suelo.

16 ●● La superficie de una vivienda es de 85 m^2. ¿Qué área tendrá su representación en un plano a 1:50?

Relación entre los perímetros, las áreas y los volúmenes de figuras semejantes

17 ● Dos triángulos de áreas 4,55 cm^2 y 72,8 cm^2 son semejantes. La base del menor mide 2,6 cm y la altura del mayor 14 cm. Calcula la altura del menor y la base del mayor.

18 ● Los perímetros de dos figuras semejantes son, respectivamente, 15,8 cm y 71,1 cm. Si uno de los lados de la figura menor mide 6,2 cm, halla la medida del lado homólogo.

19 ● Dos polígonos son semejantes con razón de semejanza 20. Teniendo en cuenta que el perímetro del polígono mayor es 15,6 m, calcula el perímetro del polígono menor.

20 ●● Dos rectángulos son semejantes, de forma que la base y la altura del primero miden 18 cm y 12 cm, respectivamente, y el perímetro del segundo es de 90 cm. Calcula la medida de la base y de la altura del segundo rectángulo.

21 ● Dos figuras semejantes con razón de semejanza 6. Si el área de la menor es 15,6 cm^2, calcula el área de la mayor.

22 ● Si la razón de semejanza de dos polígonos es 2/5, y el mayor tiene 80 cm de perímetro y 200 cm^2 de área, determina el perímetro y el área del polígono menor.

23 ●● El lado de un triángulo equilátero mide 18 cm. Determina la medida del lado de otro triángulo equilátero cuyo área sea 9 veces la del primero.

24 ●● Los lados de un cuadrilátero miden, respectivamente, 5 cm, 8 cm, 10 cm y 6 cm. Halla las medidas de los lados de otro semejante cuyo área sea cuatro veces mayor.

25 ●● Una persona tiene una casa con dos dormitorios. Las dimensiones de uno de ellos son la tercera parte de las del otro. Dado que para enlosar el grande ha necesitado 189 baldosas, piensa que para el pequeño necesitará la tercera parte, es decir, 63 baldosas. ¿Está en lo cierto?

26 ● Las aristas de dos cubos miden 5 cm y 8 cm, respectivamente. Calcula la razón entre sus áreas y sus volúmenes.

27 ●● Las dimensiones de un ortoedro son 3 cm, 5 cm y 7 cm, y el volumen de otro semejante es 6 720 cm^3. Calcula las dimensiones de este último.

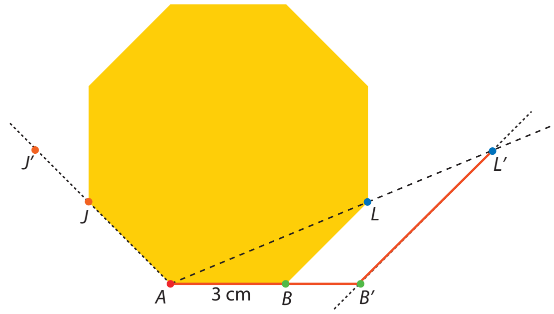
28 ●● La arista de la base de un prisma cuadrangular regular mide 13 cm y la altura 21 cm. Calcula el volumen de otro semejante, con razón de 0,7, de dos formas distintas.

29 ● Dadas dos esferas de 2,5 cm de radio y 25 cm de diámetro, respectivamente, halla la razón entre el volumen de la mayor y el de la menor, y viceversa.

30 ●●● Dos recipientes cilíndricos semejantes tienen una capacidad de 0,5 L y 4 L, respectivamente. Si el radio del menor mide 4 cm, ¿qué altura tiene el grande?

Construcción de figuras semejantes. Homotecia

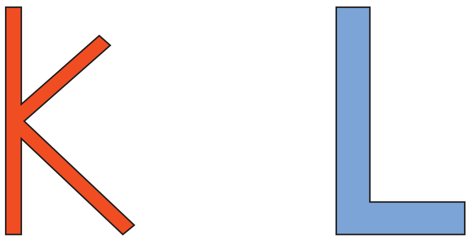
31 ●● Calca el siguiente octógono. Construye, mediante una homotecia de centro *A,* y como se indica en la figura, un octógono regular de 3 cm:



32 ● Dibuja las siguientes letras y aplica una homotecia:

a) De razón 2,5.

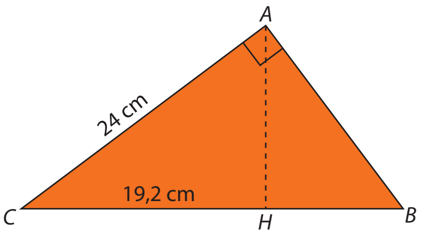
b) De razón 0,5.



Teoremas del cateto y de la altura

33 ●● Calcula la altura y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados, *b, c* y *a* miden 60 cm, 80 cm y 100 cm, respectivamente.

34 ●● Dado el triángulo *ABC* rectángulo en *A*, calcula:



a) La longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto *AB*.

b) La medida de la proyección del cateto *AB* sobre la hipotenusa y la medida de la altura sobre la hipotenusa.

c) El perímetro y el área de los triángulos *AHC* y *ABH*.

Ejercicios y problemas

35 ●●● En un triángulo *ABC* con el ángulo recto en *A*, la hipotenusa mide 40 cm y uno de sus catetos 10 cm. Calcula el área de los dos triángulos que se forman al trazar la altura sobre la hipotenusa. Aproxima la medida de la altura a las centésimas.

Razones trigonométricas de ángulos agudos. Aplicaciones de la trigonometría

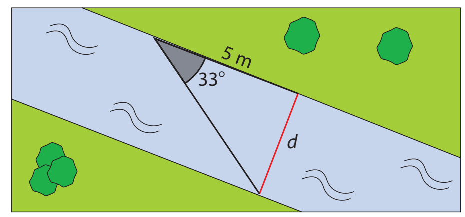
36 ● Se pretende salvar un escalón mediante una rampa. El escalón tiene 1 m de altura y la rampa debe tener 50° de inclinación. ¿A qué distancia de la base de la perpendicular debe comenzar la rampa?

37 ● Sabemos que tg 76° es aproximadamente igual a 4. ¿Qué puedes decir de las dimensiones de los catetos de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 76°?

38 ● La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 cm y uno de sus ángulos, 20°. Calcula la medida de los catetos.

39 ●● Representa un triángulo rectángulo con un ángulo de 30° sabiendo que sen 30° = 0,5.

40 ●● Queremos saber la distancia que hay hasta la orilla opuesta de un río. Con los datos que se ven en el dibujo, calcula la anchura del río.



Evaluación

Aplicas el teorema de Tales en la semejanza de triángulos

1 Dibuja un triángulo cuyos lados midan 4 cm, 7 cm y 5 cm. Traza otro semejante a él con razón de semejanza 1,2.

Utilizas escalas

2 Un mapa está a una escala de 1:25 000, calcula:

a) La distancia en el mapa entre dos lugares, *A* y *B*, que distan 4 km.

b) La distancia real entre dos lugares que están a 4 cm en el mapa.

c) Si los lugares *A* y *B* distan 8 cm en otro mapa, ¿a qué escala está hecho?

Relacionas los perímetros, las áreas y los volúmenes de figuras semejantes

3 Las dimensiones de un ortoedro son 2 cm, 3 cm y 4 cm, y las de otro, 5 cm, 6 cm y 7 cm. Determina si son semejantes.

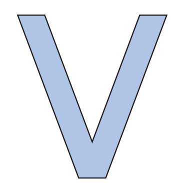
4 La razón de semejanza que transforma un polígono, *F*, en otro, *F'*, es 4,5. Si el perímetro de *F'* es 47,25 cm y el área de *F* es 5 cm^2, ¿cuál es el perímetro de *F* y el área de *F'*?

5 Las dimensiones de un ortoedro son 4,6 cm, 10,8 cm y 11 cm. ¿Cuál es el volumen de otro ortoedro semejante si la razón de semejanza es 6?

6 Los radios de dos esferas miden 8,5 cm y 54,4 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza que transforma la mayor en la menor?

Construyes figuras semejantes aplicando homotecias

7 Aplica una homotecia de razón 2 a la siguiente figura.



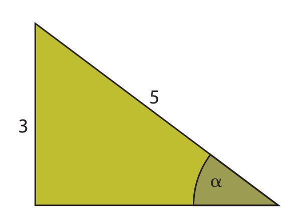
Aplicas los teoremas del cateto y de la altura

8 Dado el triángulo *ABC*, donde $\hat{A} = 90°$, $AB = 48$ cm y $AC = 55$ cm, calcula el perímetro de los dos triángulos que se forman al dibujar la altura sobre la hipotenusa.

9 Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 12 cm y 3 cm, respectivamente. Determina cuál es el área del triángulo rectángulo.

Calculas las razones trigonométricas de ángulos agudos

10 Encuentra las razones trigonométricas del ángulo α en el siguiente triángulo rectángulo.



11 Calcula la altura de una torre que proyecta una sombra de 5 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 75º con el suelo.