

## Ejercicios de representación de funciones

1.- Representar las siguientes funciones, estudiando su:

**Dominio.**

**Simetría.**

**Puntos de corte con los ejes.**

**Asíntotas y ramas parabólicas.**

**Crecimiento y decrecimiento.**

**Máximos y mínimos.**

**Concavidad y convexidad.**

**Puntos de inflexión**

1.  $f(x) = 3x - x^3$

2.  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

3.  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

4.  $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

5.  $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$

6.  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

7.  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$

8.  $f(x) = x + \sqrt{x}$

9.  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

10.  $f(x) = (x - 1)e^{-x}$

11.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

## Soluciones ejercicios de representación de funciones

1.- Representar las siguientes funciones, estudiando su:

**Dominio.**

**Simetría.**

**Puntos de corte con los ejes.**

**Asíntotas y ramas parabólicas.**

**Crecimiento y decrecimiento.**

**Máximos y mínimos.**

**Concavidad y convexidad.**

**Puntos de inflexión**

**1.- Representar la siguiente función:**

$$f(x) = 3x - x^3$$

***Dominio***

$$D = \mathbb{R}$$

***Simetría***

$$f(-x) = 3(-x) - (-x^3) = -(3x - x^3) = -f(x)$$

**Simetría respecto al origen.**

***Puntos de corte con los ejes***

**Puntos de corte con OX:**

$$3x - x^3 = 0 \quad x = \pm\sqrt{3} \quad x = 0$$

$$(-\sqrt{3}, 0) \quad (0, 0) \quad (\sqrt{3}, 0)$$

**Punto de corte con OY:**

$$(0, 0)$$

***Asíntotas***

**No tiene asíntotas.**

***Ramas parabólicas***

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x - x^3)}{x} = \infty$$




$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - x^3)}{x} = -\infty$$

### **Crecimiento y decrecimiento**

$$f'(x) = 3 - 3x^2 \qquad 3 - 3x^2 = 0$$

$$x = -1$$

$$x = 1$$

$x$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
			

**Creciente:**

$$(-1, 1)$$

**Decreciente:**

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

**Mínimos**



$$(-1, -2)$$

**Máximos**

$$(1, 2)$$

### **Concavidad y convexidad**

$$f''(x) = -6x \qquad -6x = 0 \qquad x = 0$$

$x$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	+	-
		

**Cóncava:**

$$(-\infty, 0)$$

**Convexa**

$(0, \infty)$

**Puntos de inflexión**

$(0, 0)$

**Representación gráfica**



**2.- Representar la siguiente función:**

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$$

**Dominio**

$$D = \mathbb{R}$$

**Simetría**

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 8$$

**Simetría respecto al eje OY.**

### **Puntos de corte con los ejes**

**Puntos de corte con OX:**

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \quad x = \pm 2$$

$$(-2, 0) \quad (2, 0)$$

**Punto de corte con OY:**

$$(0, -8)$$

### **Asíntotas**

**No tiene asíntotas.**





### **Ramas parabólicas**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x} = \infty$$

### **Crecimiento y decrecimiento**

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad 4x^3 - 4x = 0 \quad x = 0 \quad x = \pm 1$$

$x$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-	+
				

Creciente :  $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

Decreciente :  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

### **Mínimos**

Mínimo  $(-1, -9)$

Mínimo  $(1, -9)$

### Máximos

Máximo  $(0, -8)$

### Concavidad y convexidad

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \quad 12x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$$

$x$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	+	-	+
	∪	∩	∪

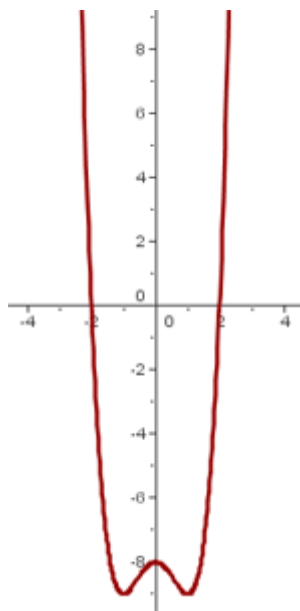
Cóncava:  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Convexa:  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

### Puntos de inflexión

Puntos de inflexión  $(-\sqrt{3}, -\frac{77}{9})$   $(\sqrt{3}, -\frac{77}{9})$

### Representación gráfica



**3.- Representar la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

**Dominio**

$$(x-1)^2 = 0 \quad x = 1 \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$

**Simetría**

$$f(-x) = \frac{-x^3}{(-x-1)^2} \quad \text{No presenta simetría}$$

**Puntos de corte con los ejes**

**Puntos de corte con OX:**

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \quad (0,0)$$

**Punto de corte con OY:**

$$(0,0)$$

**Asíntotas**

**Asíntota horizontal:**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty \quad \text{No tiene}$$

**Asíntotas verticales.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty \quad x = 1$$

**Asíntota oblicua.**



$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = 1$$





$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = 2$$

$$y = x + 2$$

### **Crecimiento y decrecimiento**

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \qquad \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 3$$

$x$	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	+	-	+
				

**Creciente:**

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$$

*Decreciente*

$$(1, 3)$$

### **Mínimos**

$$\left( 3, \frac{27}{4} \right)$$

### **Concavidad y convexidad**

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} \qquad \frac{6x}{(x-1)^4} = 0$$

$$x = 0$$

$x$	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+	+
	∩	∪	∪

*Cóncava*

$$(0, 1) \cup (1, \infty)$$

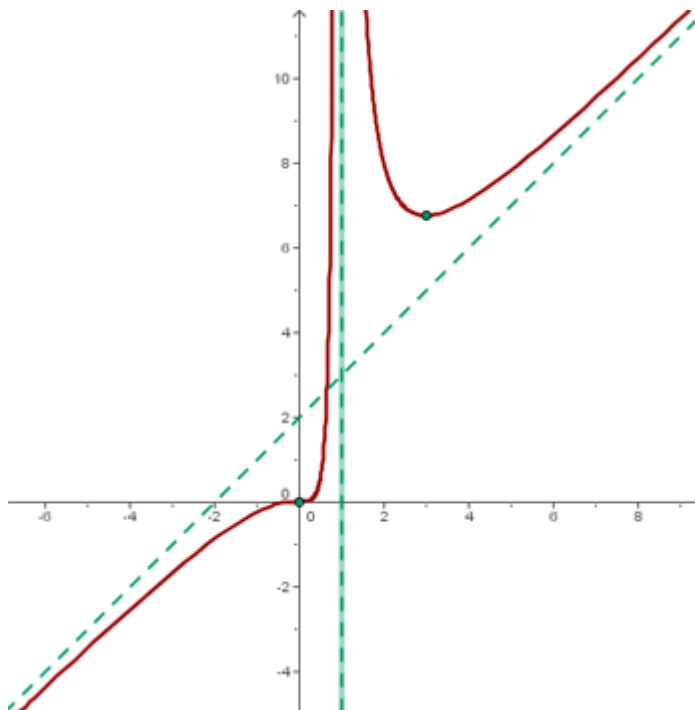
*Convexa*

$$(-\infty, 0)$$

**Puntos de inflexión**

$$P.I. (0, 0)$$

**Representación gráfica**



**4.- Representar la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

**Dominio**

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

**Simetría**

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + 1}{(-x)^2} = f(x)$$

**Simetría respecto al eje OY.**

**Puntos de corte con los ejes**

**Puntos de corte con OX:**

No hay puntos de corte con el eje OX

**Punto de corte con OY:**

No hay puntos de corte con el eje OY

**Asíntotas**

**Asíntota horizontal**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^2} = \infty \quad \text{No tiene}$$

**Asíntotas verticales.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 1}{x^2} = \infty \quad x=0$$

**Asíntota oblicua.**

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4 + 1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty \quad \text{No tiene}$$

**Ramas parabólicas**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^4 + 1}{x^2}}{x} = \frac{x^4 + 1}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4 + 1}{x^2}}{x} = \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$$

**Crecimiento y decrecimiento**

$$f'(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} \quad \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} = 0 \quad x = \pm 1$$

$x$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-	+
	↘	↗	↘	↗

Creciente:  $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

Decreciente:  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

**Mínimos**

Mínimo  $(-1, 2)$

Mínimo  $(1, 2)$

**Concavidad y convexidad**

$$f''(x) = \frac{2(x^4 + 3)}{x^6} \quad 2(x^4 + 3) = 0 \quad x = \sqrt[4]{-3}$$

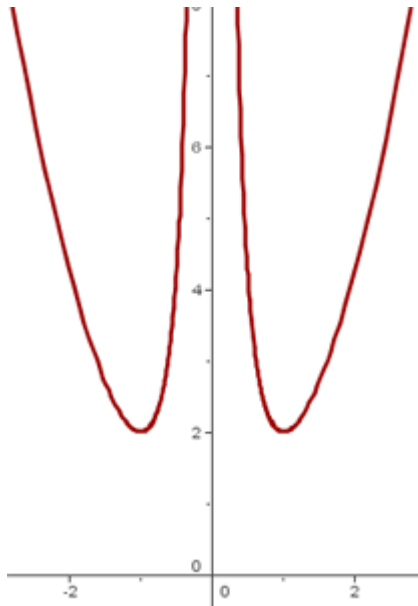
$x$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	+	+
	∪	∪

Cóncava :  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

**Puntos de inflexión**

No hay punto de inflexión.

**Representación gráfica**



**5.- Representar la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

**Dominio**

$$2-x=0 \quad x=2 \quad D = \mathbb{R} - \{2\}$$

**Simetría**

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{2-(-x)} = \frac{x^2}{2+x}$$

*No presenta simetría*

### **Puntos de corte con los ejes**

**Puntos de corte con OX:**

$$\frac{x^2}{2-x} = 0 \quad (0,0)$$

**Punto de corte con OY:**

$$(0,0)$$

### **Asíntotas**

**Asíntota horizontal**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2-x} = \infty \quad \text{No tiene}$$

**Asíntotas verticales.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2-x} = \infty \quad x = 2$$

**Asíntota oblicua.**

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = -1 \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{2-x} + x \right) = -2$$

$$y = -x - 2$$

### **Crecimiento y decrecimiento**

$$f'(x) = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} \quad \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = 0 \quad x = 0 \quad x = 4$$

$x$	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
	↘	↗	↘

Creciente :  $(0, 4)$

Decreciente :  $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

### **Mínimos**

Mínimo  $(0, 0)$

### **Máximos**

$(4, -8)$

### **Concavidad y convexidad**

$$f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3} \quad \frac{8}{(2-x)^3} = 0 \quad \text{Sin solución}$$

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	+	-
	∪	∩

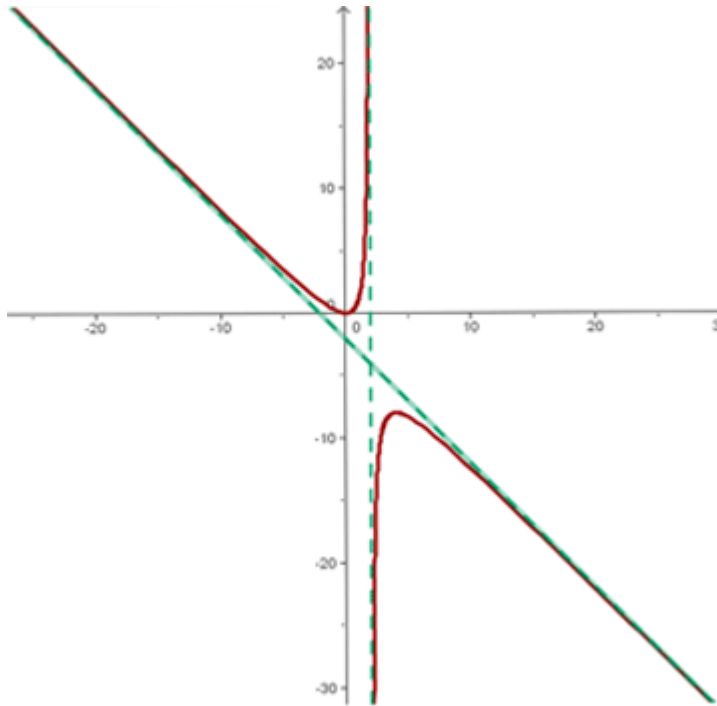
Cóncava :  $(-\infty, 2)$

Convexa :  $(2, \infty)$

### **Puntos de inflexión**

No hay punto de inflexión.

## Representación gráfica



6.- Representar la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

### **Dominio**

$$1+x^2 = 0 \quad D = \mathbb{R}$$

### **Simetría**

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -f(x)$$

Simetría respecto al origen.

### **Puntos de corte con los ejes**

Punto de corte con OY:

$$\frac{x}{1+x^2} = 0 \quad (0,0)$$



Puntos de corte con el eje OY

$(0,0)$

### **Asíntotas**

**Asíntota horizontal**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 \quad y = 0$$

**No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.**

### **Crecimiento y decrecimiento**

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad x = \pm 1$$

$x$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Creciente :  $(-1, 1)$

Decreciente :  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

### **Mínimos**

Mínimo  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

### **Máximos**

Máximo  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

### Concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} \quad \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} = 0 \quad x = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$$

$x$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
	∩	∪	∩	∪

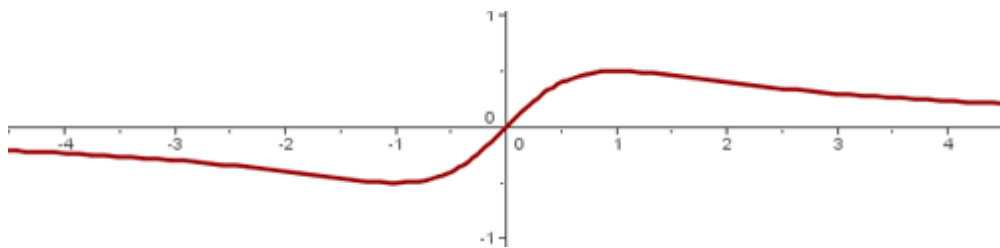
Cóncava:  $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Convexa:  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

### Puntos de inflexión

Puntos de inflexión:  $(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4})$   $(0, 0)$   $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

### Representación gráfica



### 7.- Representar la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$$

#### Dominio

$$x^2 + 1 = 0 \quad x = \pm\sqrt{-1}$$

$$D = \mathbb{R}$$

### Simetría

$$f(-x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$$

No presenta simetría

### Puntos de corte con los ejes

Puntos de corte con OX:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0 \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (2, 0) \quad (1, 0)$$

Punto de corte con OY:

$$f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 + 2}{0^2 + 1} = 2 \quad (0, 2)$$

### Asíntotas

Asíntota horizontal




$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 1 \quad y = 1$$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

### Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} \quad \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \quad x = \frac{1 - \sqrt{10}}{3}$$

$x$	$\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{10}}{3}\right)$	$\left(\frac{1 - \sqrt{10}}{3}, \frac{1 + \sqrt{10}}{3}\right)$	$\left(\frac{1 + \sqrt{10}}{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	+	-	+
			

**Creciente:**

$$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}, \infty\right)$$

*Decreciente*

$$\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$$

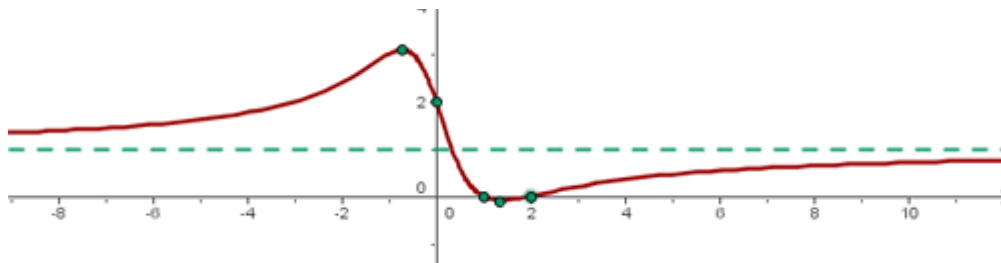
**Máximos**

$$\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}, 3.08\right)$$

**Mínimos**

$$\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}, -0.08\right)$$

Con los datos obtenidos representamos:



**8.- Representar la siguiente función:**

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

**Dominio**

$$x + \sqrt{x} = 0$$

$$x \geq 0$$

$$D = [0, \infty)$$

### **Simetría**

$$f(-x) = -x + \sqrt{-x}$$

No presenta simetría.

### **Puntos de corte con los ejes**

Puntos de corte con OX:

$$x + \sqrt{x} = 0 \quad x = 0$$

$$(0, 0)$$

Punto de corte con OY:

$$(0, 0)$$

### **Asíntotas**

No tiene asíntotas.

### **Crecimiento y decrecimiento**

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$2\sqrt{x} + 1 = 0 \quad \sqrt{x} = -\frac{1}{2}$$

Sin solución

$$\begin{array}{c} x \\ f'(x) \end{array} \quad \begin{array}{c} (0, \infty) \\ + \\ \nearrow \end{array}$$

Creciente:  $(0, \infty)$

### **Máximo y mínimos**

No existen extremos locales.

### Concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} \quad \frac{-1}{4x\sqrt{x}} = 0 \quad \text{Sin solución}$$

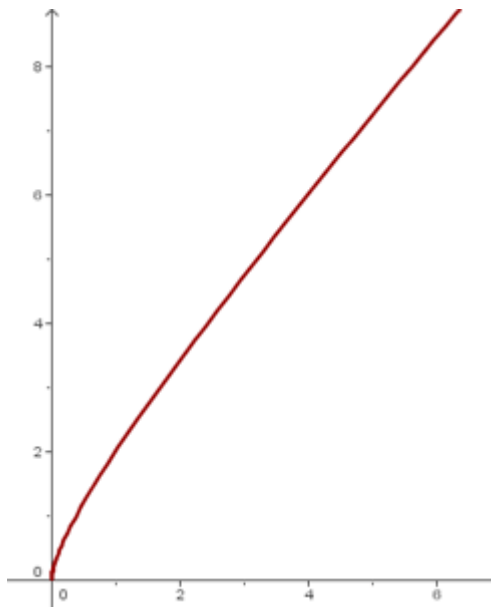
$$\begin{array}{l} x \quad (0, \infty) \\ f''(x) \quad - \\ \quad \quad \cap \end{array}$$

Convexa :  $(0, \infty)$

### Puntos de inflexión

No hay punto de inflexión.

### Representación gráfica



9.- Representar la siguiente función:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

**Dominio**

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

### **Simetría**

$$f(-x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

No presenta simetría.

### **Puntos de corte con los ejes**

Puntos de corte con OX:

$$e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Punto de corte con OY:

$$f(0) = e^{\frac{1}{0}}$$

No tiene puntos de corte con los ejes

### **Asíntotas**

Asíntota horizontal



$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \quad y = 1$$

Asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty \quad x = 0$$

### **Crecimiento y decrecimiento**

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \quad -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{Sin solución}$$

$x$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	-
		

Decreciente :  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

### **Máximo y mínimos**

No existen extremos locales.

### **Concavidad y convexidad**

$$f''(x) = \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1) \quad \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{Sin solución} \\ 2x + 1 = 0 & x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$(0, \infty)$
f''(x)	-	+	+
	∩	∪	∪

$$\text{Cóncava : } \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$$

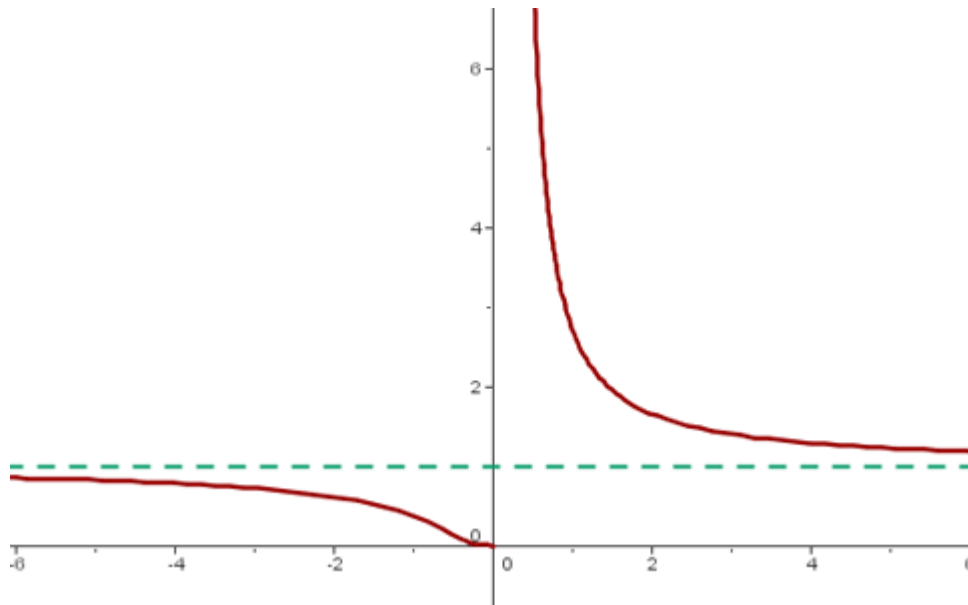
$$\text{Convexa : } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$

### **Puntos de inflexión**

$$P.I. \left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$$



## Representación gráfica



10.- Representar la siguiente función:

$$f(x) = (x - 1)e^{-x}$$

**Dominio**

$$D = \mathbb{R}$$

**Simetría**

$$f(-x) = (-x - 1)e^x$$

No presenta simetría.

**Puntos de corte con los ejes**

Puntos de corte con OX:

$$(x - 1)e^{-x} = 0 \quad (1,0)$$

Punto de corte con OY:

$$f(0) = (0 - 1)e^0 = -1 \quad (0,-1)$$

## Asíntotas



### Asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{e^x} = 0 \quad y = 0$$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

### Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = e^{-x}(2-x) \quad 2-x=0 \quad x=2$$

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-
		

Creciente :  $(-\infty, 2)$



Decreciente :  $(2, \infty)$

### Máximos

Máximo  $(2, e^{-2})$

### Concavidad y convexidad

$$f''(x) = e^{-x}(x-3) \quad x-3=0 \quad x=3$$

x	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	-	+
		

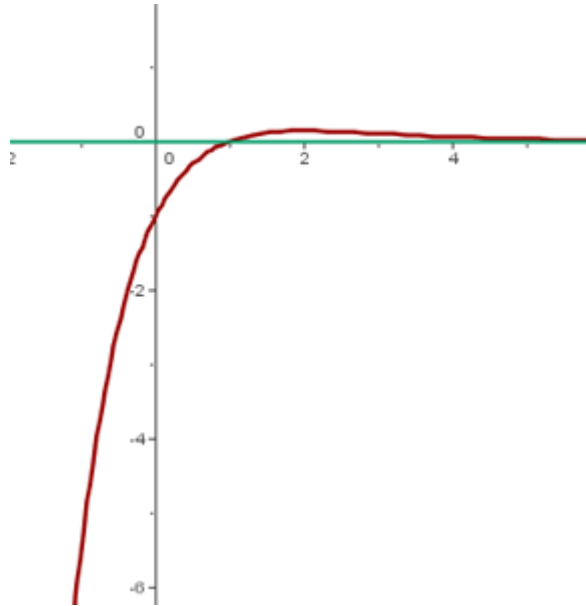
Cóncava :  $(3, \infty)$

Convexa :  $(-\infty, 3)$

### **Puntos de inflexión**

$$P.I (3, 2e^{-3})$$

### **Representación gráfica**



**11.- Representar la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

### **Dominio**

$$x > 0$$

$$D = (0, \infty)$$

### **Simetría**

$$f(-x) = \frac{\ln(-x)}{-x}$$

No presenta simetría.

### **Puntos de corte con los ejes**

Puntos de corte con OX:

$$\frac{\ln x}{x} = 0 \quad \ln x = 0 \quad e^0 = x$$

$(1, 0)$

**Punto de corte con OY:**

$$f(0) = \frac{\ln 0}{0} \quad \text{No corta al eje OY}$$

### **Asíntotas**

**Asíntota horizontal**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad y = 0$$

**Asíntotas verticales.**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \infty \quad x = 0$$

### **Crecimiento y decrecimiento**

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \quad 1 - \ln x = 0 \quad x = e$$

$x$	$(0, e)$	$(e, \infty)$
$f'(x)$	+	-
	↗	↘

Creciente :  $(0, e)$

Decreciente :  $(e, \infty)$

### **Máximos**

Máximo  $(e, e^{-1})$

### Concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad \frac{2 \ln x - 3}{x^3} = 0$$

$$2 \ln x - 3 = 0 \quad \ln = \frac{3}{2} \quad e^{\frac{3}{2}} = x$$

x	$\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$
$f''(x)$	-	+
	∩	∪

Cóncava:  $\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$

Convexa:  $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$

### Puntos de inflexión

$$P.I. \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}}\right)$$

### Representación gráfica

