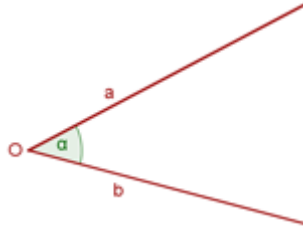


Ángulos

Definición de ángulo

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama lados y al origen común vértice.



Medida de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el grado sexagesimal (°)

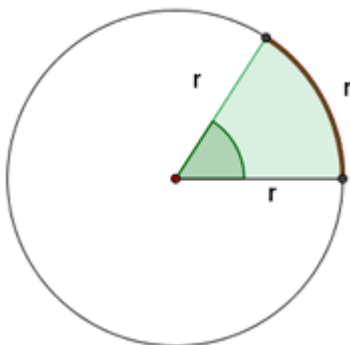
Grado sexagesimal es la amplitud del ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360 partes iguales.

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

$$1' = 60''$$

Definición de radián

Radián (rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco coincide con la longitud de su radio.



$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44.8''$$

Clasificación de ángulos

Clasificación de ángulos según su medida

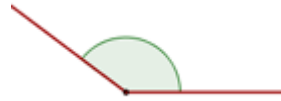
Agudo $< 90^\circ$



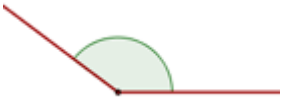
Recto = 90°



Obtuso $> 90^\circ$



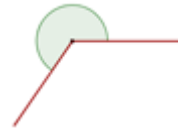
Convexo $< 180^\circ$



Llano = 180°



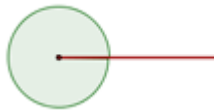
Cóncavo $> 180^\circ$



Nulo = 0°



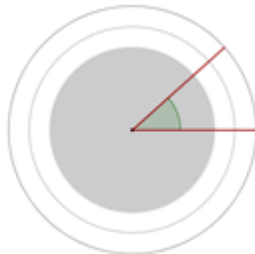
Completo = 360°



Negativo $< 0^\circ$

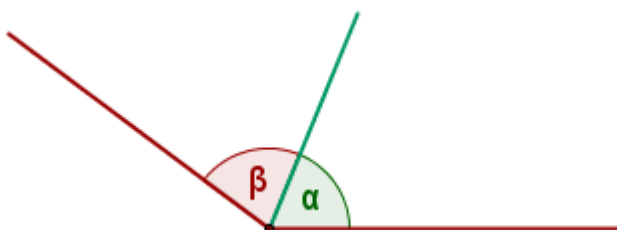


Mayor de 360°



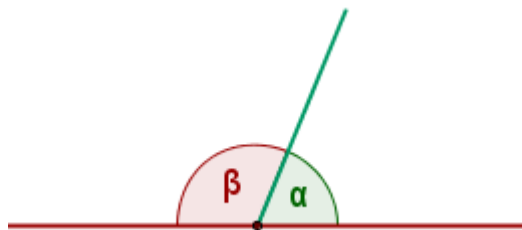
Clasificación de ángulos según su posición

Ángulos consecutivos



Ángulos consecutivos son aquellos que tienen el vértice y un lado común

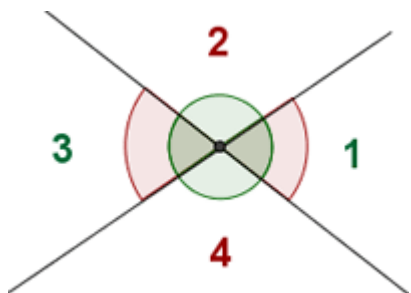
Ángulos adyacentes



Ángulos adyacentes son aquellos que tienen el vértice y un lado común, y los otros lados situados uno en prolongación del otro.

Forman un **ángulo llano**.

Ángulos opuestos por el vértice



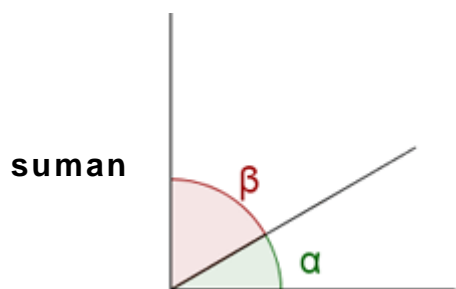
Son los que teniendo el vértice común, los lados de uno son prolongación de los lados del otro.

Los ángulos **1** y **3** son **iguales**.

Los ángulos **2** y **4** son **iguales**.

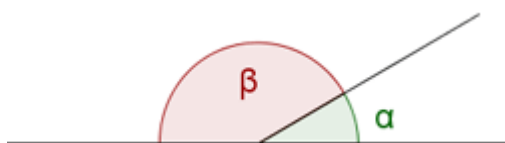
Clasificación de ángulos según su suma

Ángulos complementarios



Dos ángulos son complementarios si suman 90° .

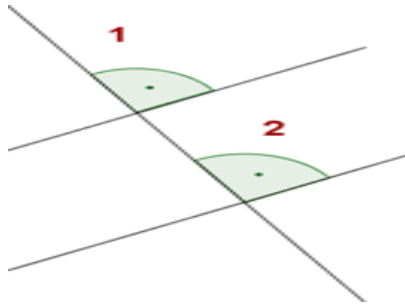
Ángulos suplementarios



Dos ángulos son suplementarios si suman 180° .

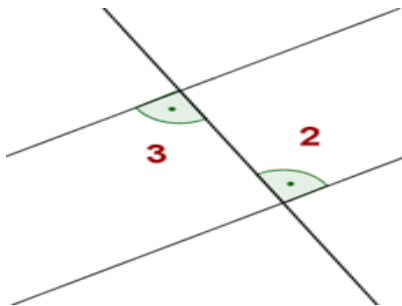
Ángulos resultantes del corte entre dos rectas paralelas y perpendiculares entre sí

Ángulos correspondientes



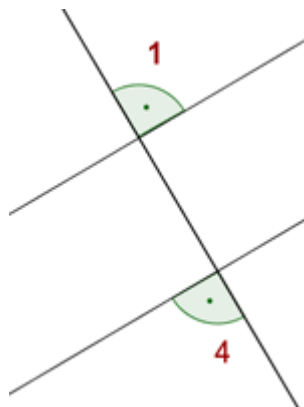
Los ángulos 1 y 2 son iguales.

Ángulos alternos internos



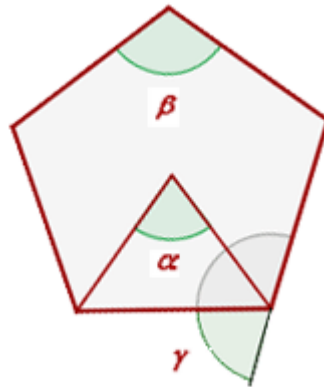
Los ángulos 2 y 3 son iguales.

Ángulos alternos externos



Los ángulos 1 y 4 son iguales.

Tipos de ángulos de un polígono regular



$\alpha = \text{ángulo central}$

$\beta = \text{ángulo interior}$

$\gamma = \text{ángulo exterior}$

Ángulo central de un polígono regular

Es el formado por dos radios consecutivos.

Si n es el número de lados de un polígono:

$$\text{Ángulo central} = 360^\circ : n$$

Ejemplo: Ángulo central del pentágono regular = $360^\circ : 5 = 72^\circ$

Ángulo interior de un polígono regular

Es el formado por dos lados consecutivos.

$$\text{Ángulo interior} = 180^\circ - \text{Ángulo central}$$

Ejemplo: Ángulo interior del pentágono regular = $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

Ángulo exterior de un polígono regular

Es el formado por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.

Los **ángulos exteriores e interiores** son **suplementarios**, es decir, que suman 180° .

Ángulo exterior = Ángulo central

Ejemplo: Ángulo exterior del pentágono regular = 72°

Circunferencia y círculo



Es una línea curva cerrada cuyos puntos están todos a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Centro

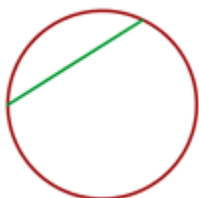
Punto del que equidistan (están a la misma distancia) todos los puntos de la circunferencia.

Radio

Segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.

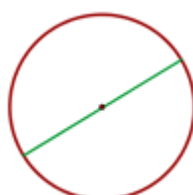
Elementos de la circunferencia

Cuerda



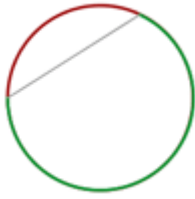
Segmento que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro



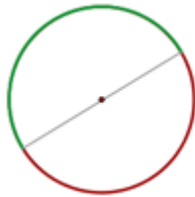
Cuerda que pasa por el centro.

Arco



Cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia. Se suele asociar a cada cuerda el menor arco que delimita.

Semicircunferencia



Cada uno de los arcos iguales que abarca un diámetro.

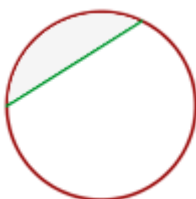
Círculo



Es la figura plana comprendida en el interior de una circunferencia.

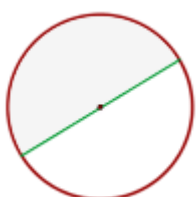
Elementos de un círculo

Segmento circular



Porción de círculo limitada por una cuerda y el arco correspondiente.

Semicírculo



Porción del círculo limitada por un diámetro y el arco correspondiente. Equivale a la mitad del círculo.

Sector circular



Porción de círculo limitada por dos radios.

Corona circular



Porción de círculo limitada por dos círculos concéntricos.

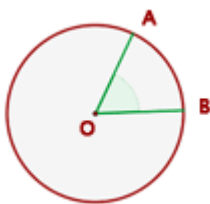
Trapezio circular



Porción de círculo limitada por dos radios y una corona circular.

Ángulos de la circunferencia

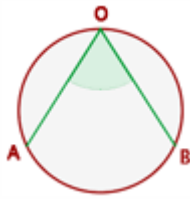
Ángulo central



Ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.

La medida de un arco es la de su ángulo central correspondiente.

Ángulo inscrito

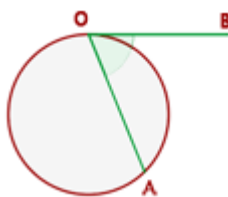


Su vértice está en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.

Mide la mitad del arco que abarca.

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

Ángulo semiinscrito

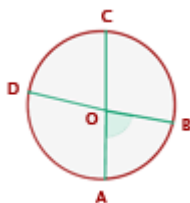


Su vértice está en la circunferencia, un lado secante y el otro tangente a ella.

Mide la mitad del arco que abarca.

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

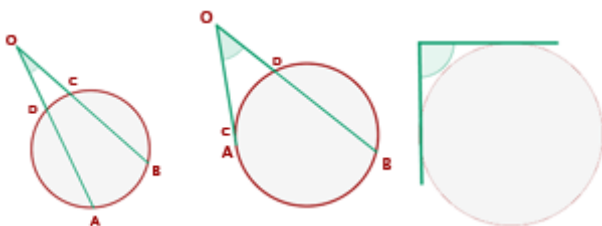
Ángulo interior



Su vértice es interior a la circunferencia y sus lados secantes a ella.

Mide la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados.

Ángulo exterior



Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y los lados de sus ángulos son: o secantes a ella, o uno tangente otro secante, o tangentes a ella:

Mide la mitad de la diferencia entre las medidas de los arcos que abarcan sus lados sobre la circunferencia.

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2} (\widehat{AB} - \widehat{CD})$$

Triángulos

Un **triángulo** es un polígono con **tres lados**.

Propiedades de los triángulos

- 1** Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- 2** La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° .
- 3** El valor de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.

Tipos de triángulos

Según sus lados

Triángulo equilátero



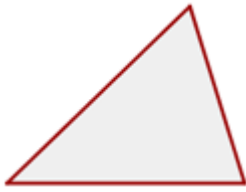
Tres lados iguales.

Triángulo isósceles



Dos lados iguales.

Triángulo escaleno



Tres lados desiguales

Según sus ángulos

Triángulo acutángulo



Tres ángulos agudos

Triángulo rectángulo



Un ángulo recto

El lado mayor es la hipotenusa. Los lados menores son los catetos.

Triángulo obtusángulo



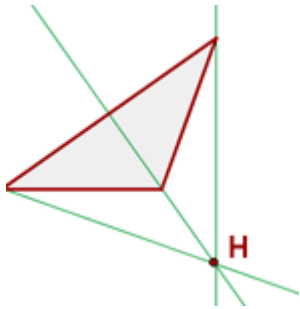
Un ángulo obtuso.

Elementos notables en un triángulo.

Alturas, medianas, mediatrices y bisectrices de un triángulo

Alturas de un triángulo

Altura es cada una de las rectas perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación).



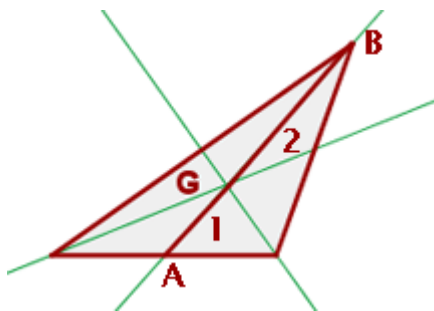
Ortocentro

Es el punto de corte de las tres alturas.

Medianas de un triángulo

Mediana es cada una de las rectas que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto.

Baricentro



Es el punto de corte de las tres medianas.

El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos, el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une un baricentro con el punto medio del lado opuesto.

$$BG = 2GA$$

Mediatrices de un triángulo

Mediatriz es cada una de las rectas perpendiculares trazadas a un lado por su punto medio.

Circuncentro



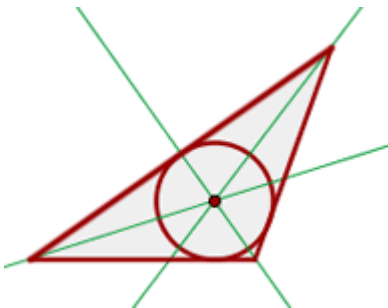
Es el punto de corte de las tres mediatrices.

Es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo.

Bisectrices de un triángulo

Bisectriz es cada una de las rectas que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

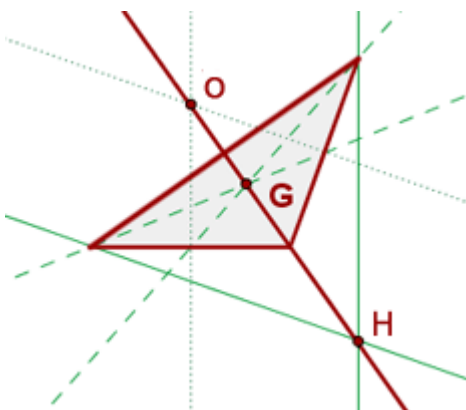
Incentro



Es el punto de corte de las tres bisectrices.

Es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.

Recta de Euler

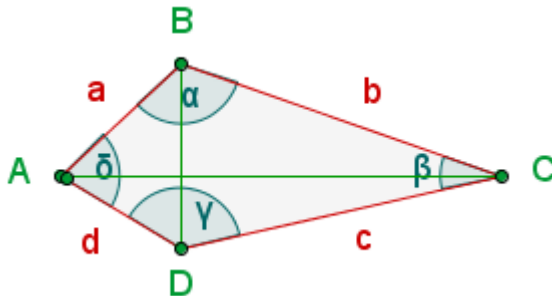


Es la recta que pasa por el circuncentro, baricentro y ortocentro.

Polígonos

Un polígono es la región del plano limitada por tres o más segmentos.

Elementos de un polígono



Lados

Son los segmentos que lo limitan.

Vértices

Son los puntos donde concurren dos lados.

Ángulos interiores de un polígono

Son los determinados por dos lados consecutivos.

Suma de ángulos interiores de un polígono

Si n es el número de lados de un polígono:

Suma de ángulos de un polígono = $(n - 2) \cdot 180^\circ$

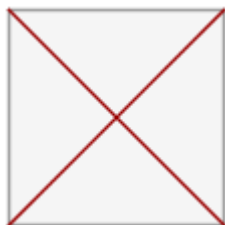
Diagonal

Son los segmentos que determinan dos vértices no consecutivos

Número de diagonales de un polígono

Si n es el número de lados de un polígono:

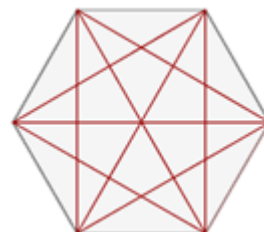
$$\text{Número de diagonales} = n \cdot (n - 3) : 2$$



$$4 \cdot (4 - 3) : 2 = 2$$



$$5 \cdot (5 - 3) : 2 = 5$$

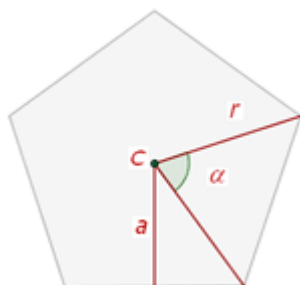


$$6 \cdot (6 - 3) : 2 = 9$$

Polígonos regulares

Un polígono regular es el que tiene sus ángulos iguales y sus lados iguales.

Elementos de un polígono regular



Centro

Punto interior que equidista de cada vértice

Radio

Es el segmento que va del centro a cada vértice.

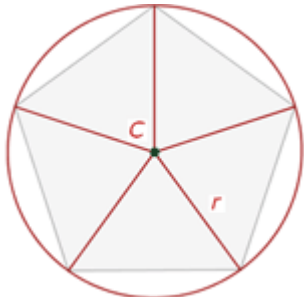
Apotema

Distancia del centro al punto medio de un lado.

Polígono inscrito

Un polígono está inscrito en una circunferencia si todos sus vértices están contenidos en ella.

Circunferencia circunscrita

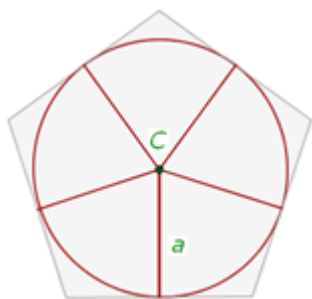


Es la que toca a cada vértice del polígono

Su centro equidista de todos los vértices.

Su radio es el radio del polígono.

Circunferencia inscrita



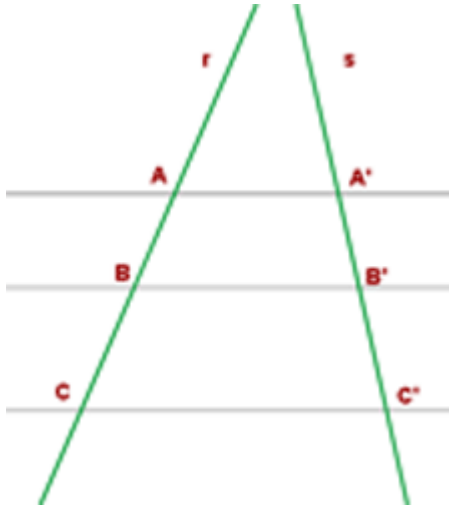
Es la que toca al polígono en el punto medio de cada lado.

Su centro equidista de todos los lados.

Su radio es la **apotema del polígono.**

Teorema de Thales

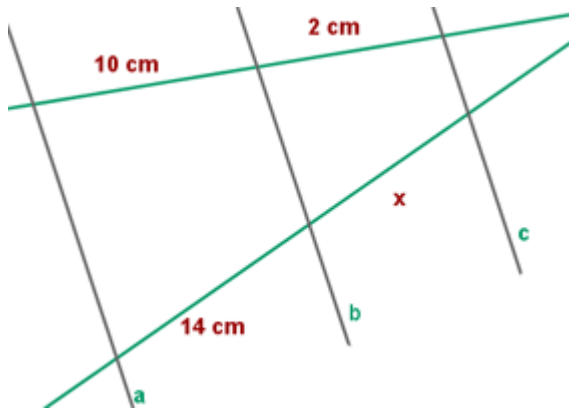
Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Ejemplo:

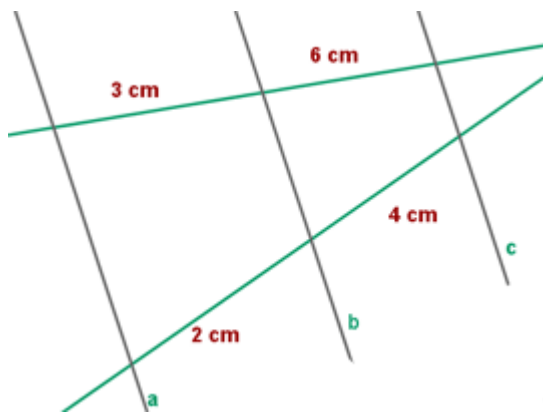
1. Las rectas a, b y c son paralelas. Halla la longitud de x.



$$\frac{14}{10} = \frac{x}{4}$$

$$x = \frac{14 \cdot 4}{10} = 5.6 \text{ cm}$$

2. Las rectas a, b son paralelas. ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?

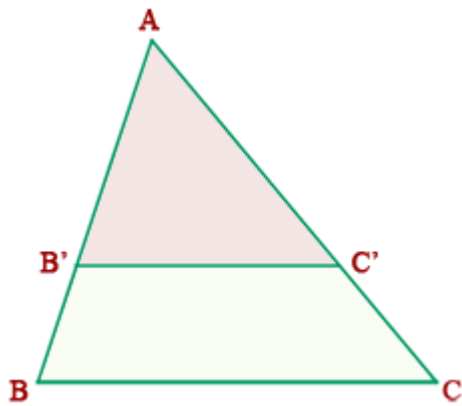


Sí, porque se cumple el **teorema de Thales**.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \quad 12 = 12$$

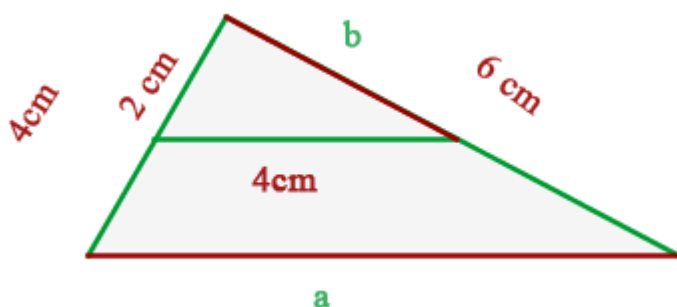
El teorema de Thales en un triángulo

Dado un **triángulo ABC**, si se traza un **segmento paralelo, B'C'**, a uno de los **lados** del triángulo, se obtiene otro **triángulo AB'C'**, cuyos **lados son proporcionales** a los del **triángulo ABC**.



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Ejemplo: Hallar las medidas de los segmentos a y b.



$$\frac{4}{2} = \frac{a}{4}$$

$$a = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{b}$$

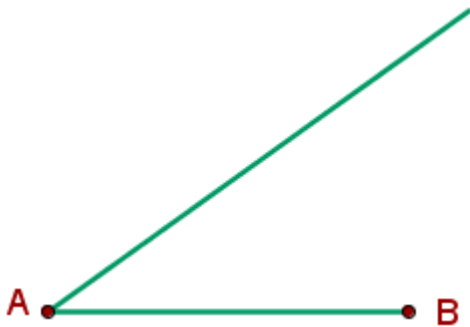
$$b = 3 \text{ cm}$$

Aplicaciones del teorema de Thales

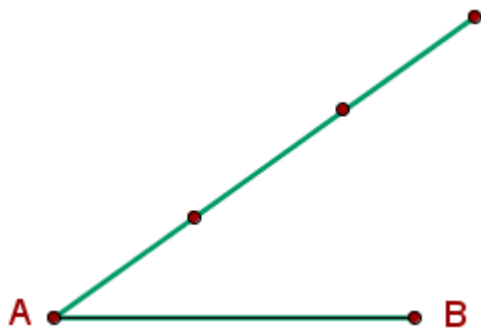
El **teorema de Thales** se utiliza para **dividir un segmento en varias partes iguales**.

Ejemplo

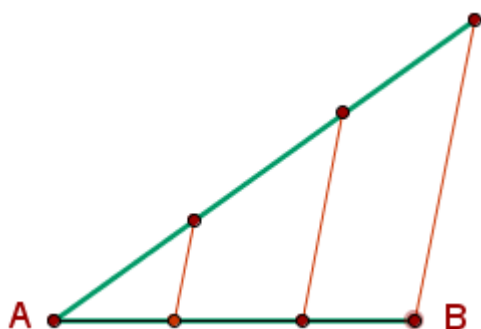
Dividir el segmento AB en 3 partes iguales



1. Se dibuja una semirrecta de origen el extremo A del segmento.



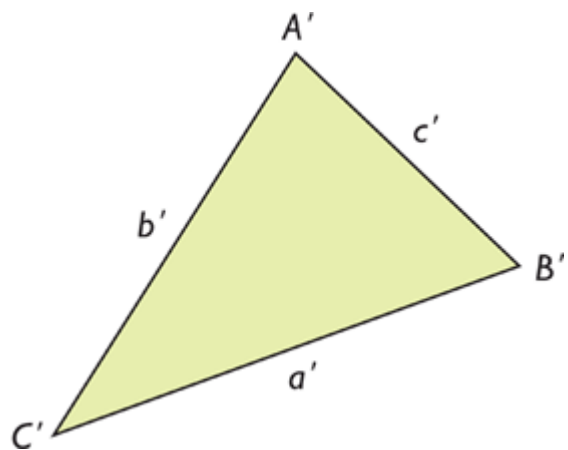
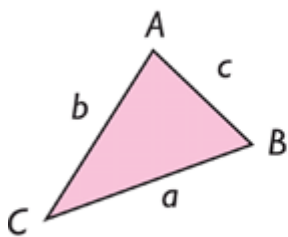
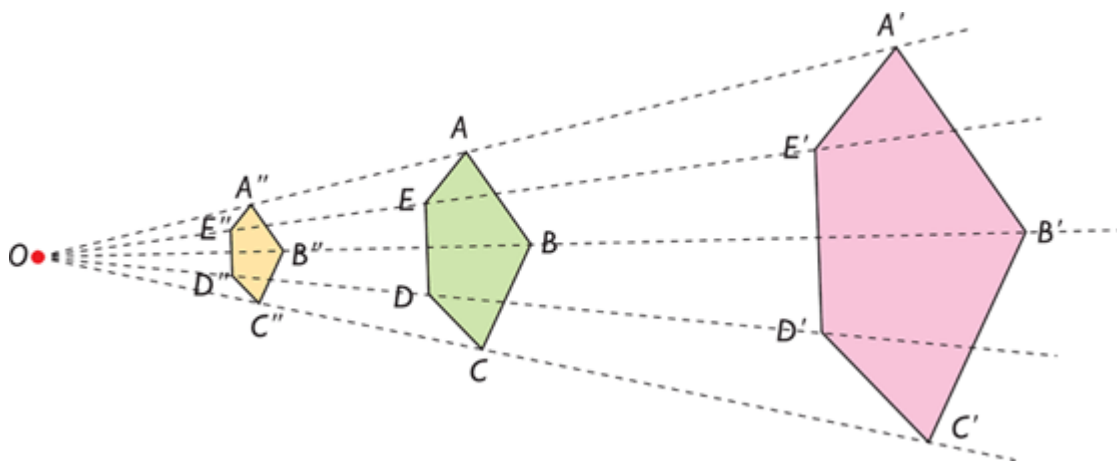
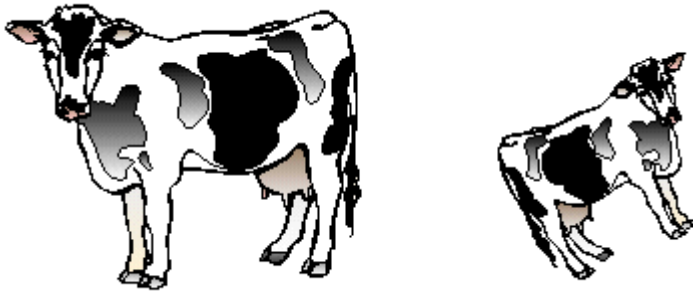
2. Tomando como unidad cualquier medida, se señalan en la semirrecta 3 unidades de medida a partir de A.



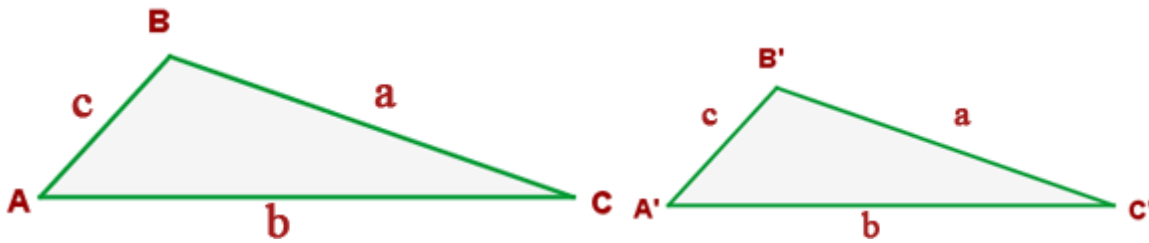
3. Por cada una de las divisiones de la semirrecta se trazan rectas paralelas al segmento que une B con la última división sobre la semirrecta. Los puntos obtenidos en el segmento AB determinan las 3 partes iguales en que se divide.

Figuras semejantes.

De manera intuitiva, diremos que dos figuras son semejantes cuando tienen "igual forma", aunque puedan tener distinto tamaño:



Semejanza de triángulos



Dados los triángulos ABC y A'B'C', los lados a y a' , b y b' , c y c' se llaman **lados homólogos**.

Los **ángulos homólogos** son:

$$\hat{A} \text{ y } \hat{A}' \quad \hat{B} \text{ y } \hat{B}' \quad \hat{C} \text{ y } \hat{C}'$$

Dos triángulos son **semejantes** cuando tienen sus **ángulos homólogos iguales** y sus **lados homólogos proporcionales**.

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

La **razón de la proporción** entre los **lados** de los triángulos se llama **razón de semejanza**.

La **razón de los perímetros** de los triángulos semejantes es igual a su **razón de semejanza**.

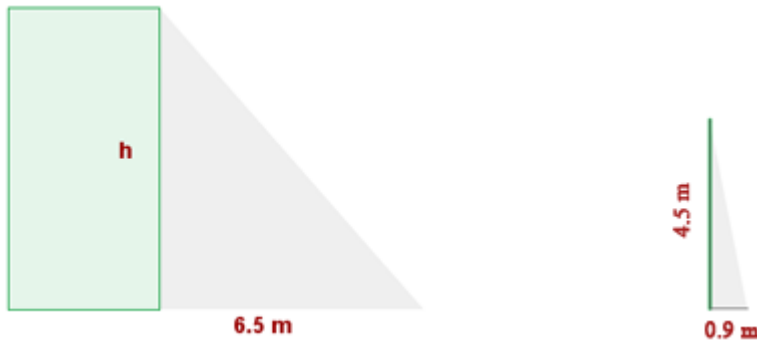
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{p}{p'} = r$$

La **razón de las áreas** de los triángulos semejantes es igual al **cuadrado de su razón de semejanza**.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r \quad \frac{S}{S'} = r^2$$

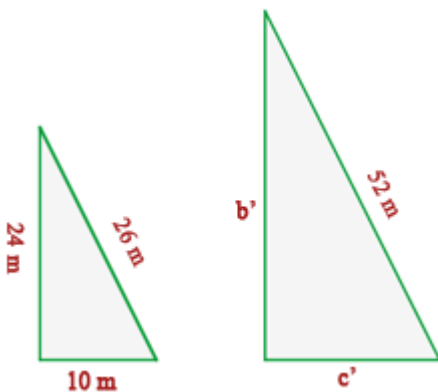
Ejemplos prácticos

1. Determinar la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6.5 m a la misma hora que un poste de 4.5 m de altura da una sombra de 0.90 m.



$$\frac{0.9}{6.5} = \frac{4.5}{x} \quad x = \frac{6.5 \cdot 4.5}{0.9} = 32.5 \text{ m}$$

2. Los catetos de un triángulo rectángulo que miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52 m?



$$a = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$$

$$\frac{26}{52} = \frac{24}{b'}$$

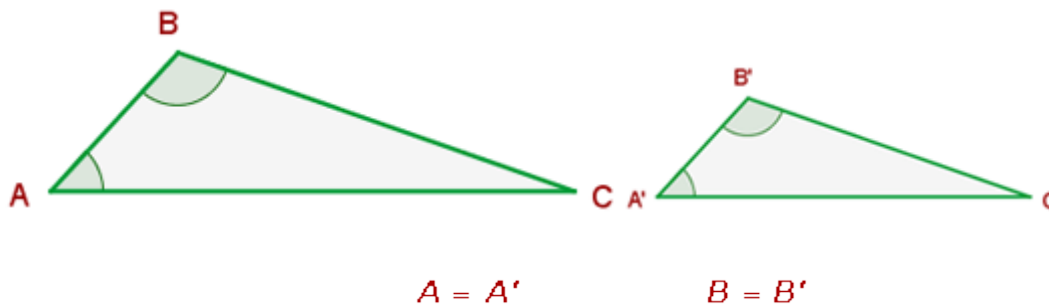
$$b' = \frac{52 \cdot 24}{26} = 48 \text{ m}$$

$$\frac{26}{52} = \frac{10}{c'}$$

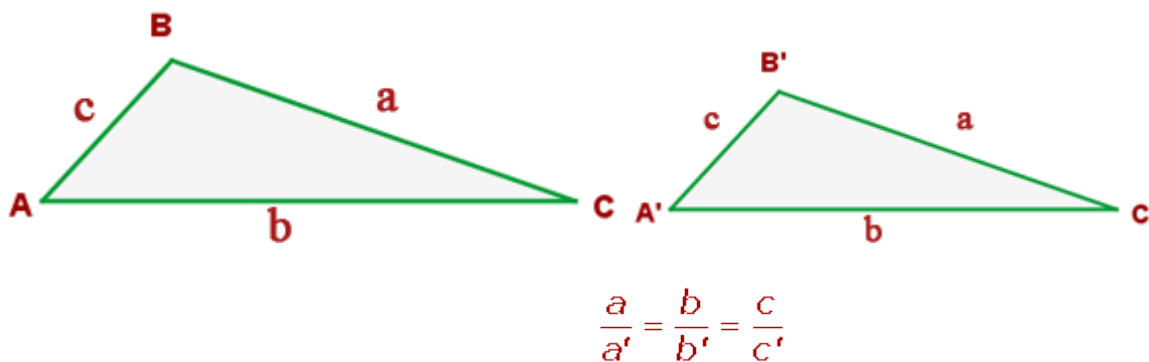
$$c' = \frac{52 \cdot 10}{26} = 20 \text{ m}$$

Criterios de semejanza

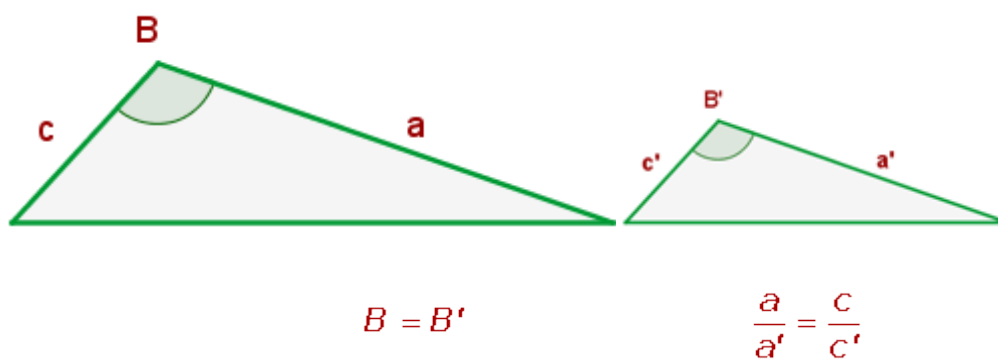
1 Dos triángulos son **semejantes** si tienen **dos ángulos iguales**.



2 Dos triángulos son **semejantes** si tienen los **lados proporcionales**.

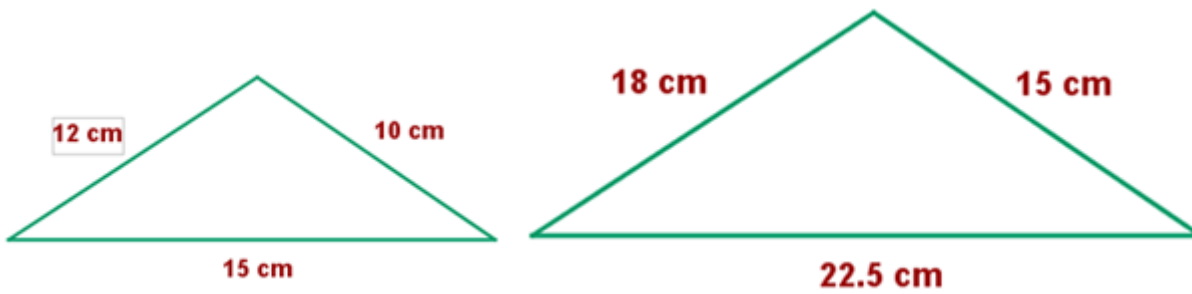


3 Dos triángulos son **semejantes** si tienen **dos lados proporcionales** y el **ángulo comprendido** entre ellos **igual**.



Ejemplos

Determinar si son **semejantes** los siguientes **triángulos**:

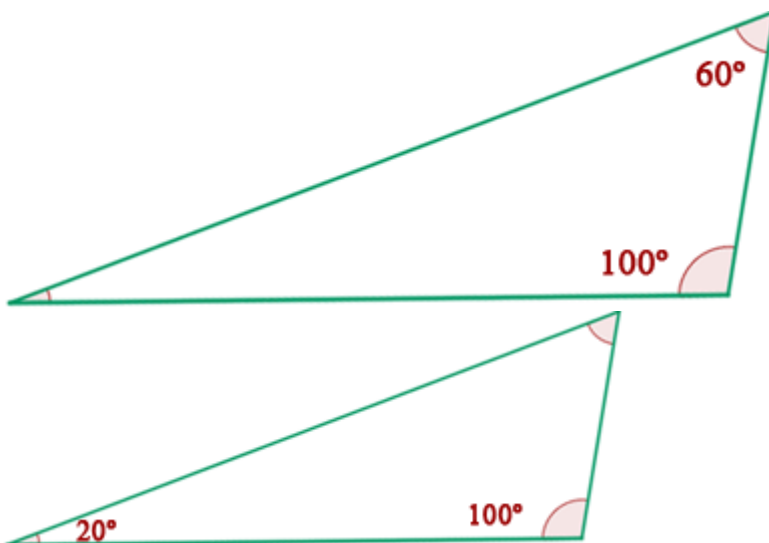


$$\frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{15}{22.5}$$

$$10 \cdot 18 = 12 \cdot 15 \quad 180 = 180$$

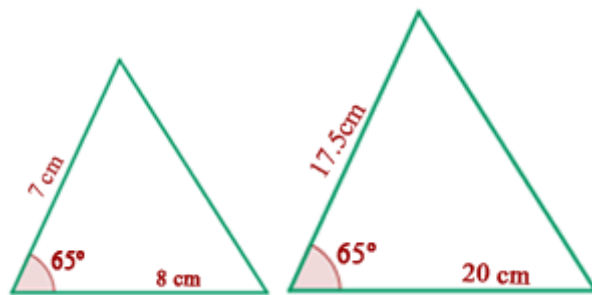
$$10 \cdot 22.5 = 15 \cdot 15 \quad 225 = 225$$

Son **semejantes** porque tienen los **lados proporcionales**.



$$180^\circ - 100^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

Son **semejantes** porque tienen **dos ángulos iguales**.



$$\frac{20}{17.5} = \frac{8}{7}$$

$$20 \cdot 7 = 17.5 \cdot 8$$

$$140 = 140$$

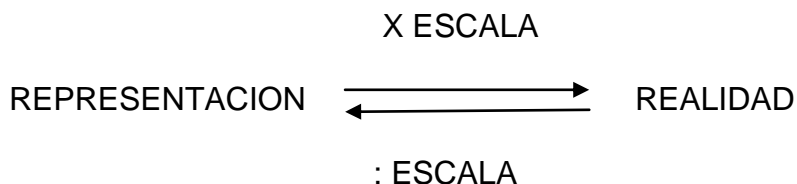
Son **semejantes** porque tienen **dos lados proporcionales** y **un ángulo igual**.

Mapas y Planos

Los mapas, planos, fotografías, etc... son representaciones de la realidad por medio de **figuras semejantes**, la escala de un mapa o plano es la razón de semejanza entre una medida de la representación y su correspondiente en la realidad.

Así por ejemplo si en un mapa leemos "**ESCALA 1:200.000**" significa que los objetos en la realidad son 200.000 veces más grandes que en el mapa o lo que es lo mismo que los objetos en el mapa son 200.000 veces más pequeños que en la realidad.

Para transformar medidas de la realidad a su representación o viceversa nos fijaremos en el siguiente cuadro:



Para encontrar la escala de la representación nos fijaremos en la siguiente relación:

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{MEDIDA EN LA REALIDAD}}{\text{MEDIDA EN LA REPRESENTACIÓN}}$$

Ejemplo 1:

En un mapa la distancia entre dos ciudades es de 20 cm, si la escala del mapa es 1:25.000 ¿Cuál es la distancia real en Km. entre las dos ciudades?

$$20 \times 25000 = 500000 \text{ cm}, 500000 : 100000 = 5 \text{ Km.}$$

Ejemplo 2: En un plano realizado a escala la longitud de una habitación que en la realidad es de 6 metros está representada por una línea de 3 cm. ¿Cuál es la escala del plano?

$$6 \times 100 = 600 \text{ cm, Escala} = \frac{600}{3} = 200 \quad \text{Escala } 1 : 200$$

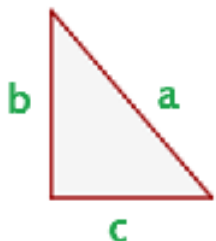
ACTIVIDADES:

- 1) El plano de una finca está dibujado a escala 1 : 250 ¿Cuál es en la realidad expresada en metros una distancia que en el plano es de 3 cm?
- 2) En un mapa la distancia entre dos ciudades es de 7'5 cm, sabiendo que en la realidad hay 37'5 Km. entre las dos ciudades ¿Cuál es la escala del mapa?
- 3) Una pista polideportiva mide 80 m. de largo y 50 m. de ancho ¿Qué largo y ancho tendrá la pista en un plano hecho a escala 1 : 200? Expresa el resultado en centímetros.
- 4) Dos ciudades en un mapa están a una distancia de 85 cm. si la distancia real entre las dos ciudades es de 127'5 Km. ¿Cuál es la escala del mapa?

SOLUCIONES

- 1) 7,5 m
- 2) 1 : 500000
- 3) 40 cm y 25 cm
- 4) 1 : 150000

Teorema de Pitágoras

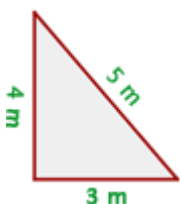


$$a^2 = b^2 + c^2$$

El teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Ejemplos de aplicaciones del teorema de Pitágoras

Conociendo los lados de un triángulo, averiguar si es rectángulo

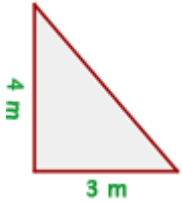


Para que un triángulo sea rectángulo el cuadrado de lado mayor ha de ser igual a la suma de los cuadrados de los dos menores.

Determinar si el triángulo es rectángulo.

$$5^2 = 3^2 + 4^2 \quad 25 = 25$$

Conociendo los dos catetos calcular la hipotenusa

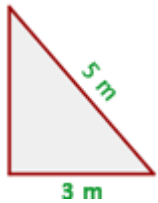


Los **catetos** de un **triángulo rectángulo** miden en 3 m y 4 m respectivamente. ¿Cuánto mide la **hipotenusa**?

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2 \quad a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$$

Conociendo la hipotenusa y un cateto, calcular el otro cateto

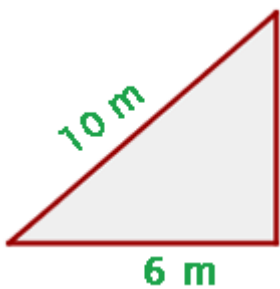


La **hipotenusa** de un **triángulo rectángulo** mide 5 m y uno de sus **catetos** 3 m. ¿Cuánto mide otro **cateto**?

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \begin{cases} c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$$

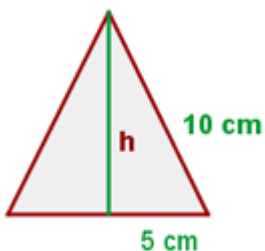
$$5^2 = 3^2 + c^2 \quad c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4m$$

Ejercicios



Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 6 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

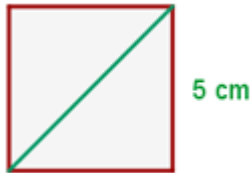
$$c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8m$$



Hallar el área del triángulo equilátero:

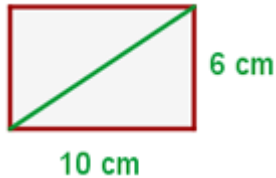
$$10^2 = h^2 + 5^2 \quad h = \sqrt{100 - 25} = 8.66 \text{ cm}$$

$$A = \frac{10 \cdot 8.66}{2} = 43.30 \text{ cm}^2$$



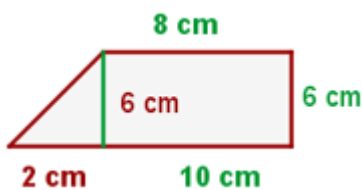
Hallar la diagonal del cuadrado:

$$d^2 = 5^2 + 5^2 \quad d = \sqrt{50} = 7.07 \text{ cm}$$



Hallar la diagonal del rectángulo:

$$d^2 = 10^2 + 6^2 \quad d = \sqrt{136} = 11.66 \text{ cm}$$

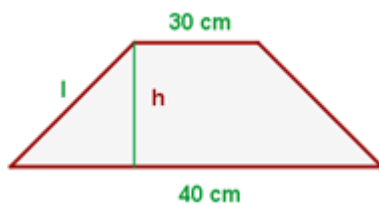


Hallar el perímetro y el área del trapecio rectángulo:

$$l^2 = 6^2 + 2^2 \quad l = \sqrt{40} = 6.32 \text{ cm}$$

$$P = 8 + 6 + 12 + 6.32 = 32.32 \text{ cm}$$

$$A = \frac{(12+8) \cdot 6}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

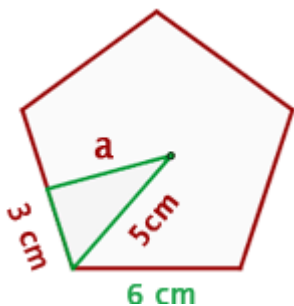


El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m, las bases miden 40 y 30 m respectivamente. Calcular los lados no paralelos y el área.

$$110 = 40 + 30 + 2l \quad l = 20 \text{ m}$$

$$h = \sqrt{20^2 - 5^2} = 19.36 \text{ m}$$

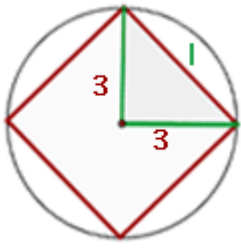
$$A = \frac{(40+30) \cdot 19.36}{2} = 677.77 \text{ m}^2$$



Hallar el área del pentágono regular:

$$5^2 = a^2 + 3^2 \quad a = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$A = \frac{30 \cdot 4}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

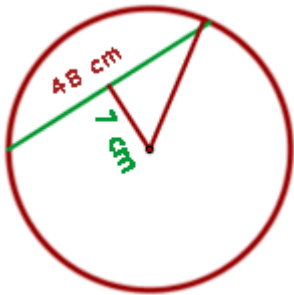


Calcular el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 18.84 m.

$$18.84 = 2 \cdot \pi \cdot r \quad r = \frac{18.84}{2 \cdot \pi} = 3 \text{ cm}$$

$$l = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$A = (\sqrt{18})^2 = 18 \text{ cm}^2$$



En una circunferencia una cuerda de 48 cm y dista 7 cm del centro. Calcular el área del círculo.

$$r = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$$

$$A = \pi \cdot 25^2 = 1963.50 \text{ cm}^2$$

Figuras planas

Cuadrado, rectángulo, rombo y romboide

Perímetro de un polígono

Es la suma de las longitudes de los lados de un polígono

Área de un polígono

Es la medida de la región o superficie encerrada por una figura plana

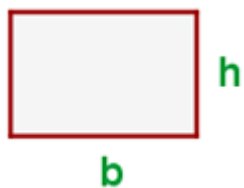
Área de un cuadrado



$$d = l\sqrt{2} \quad P = 4 \cdot l$$

$$A = l^2$$

Área de un rectángulo

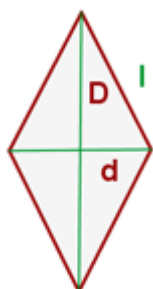


$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

$$P = 2 \cdot (b + h)$$

$$A = b \cdot h$$

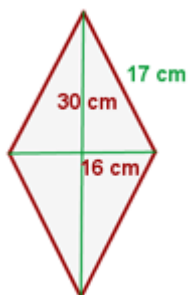
Área de un rombo



$$P = 4 \cdot l$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Ejemplo:

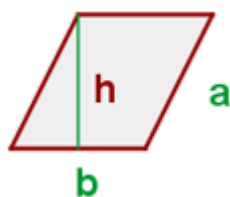


$$P = 4 \cdot 17 = 68 \text{ cm}$$

$$A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

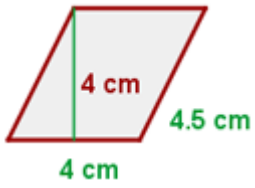
Área de un romboide

$$P = 2 \cdot (a + b)$$



$$A = b \cdot h$$

Ejemplo:

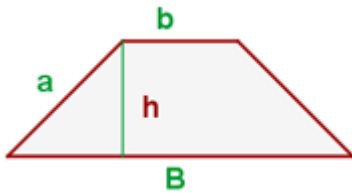


$$P = 2 \cdot (4.5 + 4) = 17 \text{ cm}$$

$$A = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$$

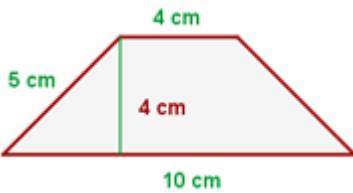
Trapezio, triángulo y polígono regular

Área de un trapezio



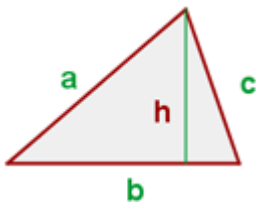
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Ejemplo:



$$A = \frac{(10 + 4) \cdot 4}{2} = 28 \text{ cm}^2$$

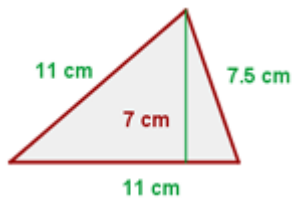
Área de un triángulo



$$P = a + b + c$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

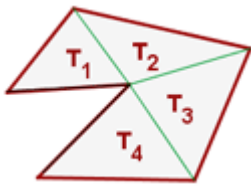
Ejemplo:



$$P = 11 + 11 + 7.5 = 29.5 \text{ cm}$$

$$A = \frac{11 \cdot 7}{2} = 38.5 \text{ cm}^2$$

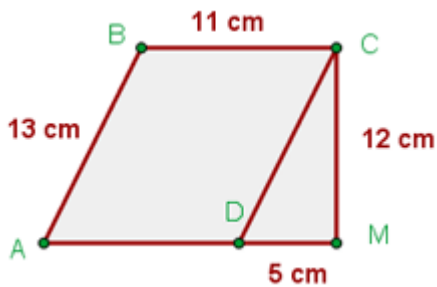
Área de un polígono



El área se obtiene triangulando el polígono y sumando el área de dichos triángulos.

$$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

Ejemplo:



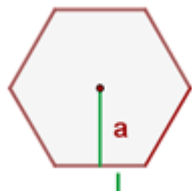
$$AD = BC; AB = DC \longrightarrow \text{Romboide}$$

$$P = 13 + 11 + 12 + 5 + 11 = 52 \text{ cm}$$

$$A = A_R + A_T$$

$$A = 11 \cdot 12 + (12 \cdot 5) : 2 = 162 \text{ cm}^2$$

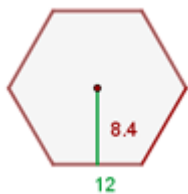
Área de un polígono regular



$$P = 6 \cdot l$$

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Ejemplo:



$$P = 6 \cdot 12 = 72 \text{ cm}$$

$$A = \frac{72 \cdot 8.4}{2} = 302.4 \text{ cm}^2$$

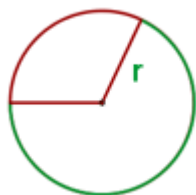
Circulo

Longitud de una circunferencia



$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Longitud de un arco de circunferencia



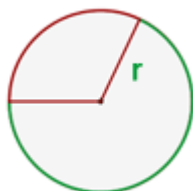
$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360^\circ}$$

Área de un círculo



$$A = \pi \cdot r^2$$

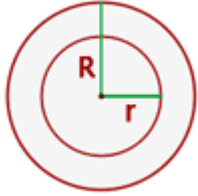
Área de un sector circular



$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$$

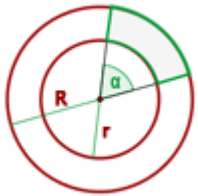


Área de una corona circular



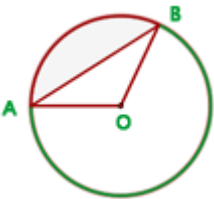
Es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

Área de un trapecio circular



Es igual al área del sector circular mayor menos el área del sector circular menor.

Área de un segmento circular



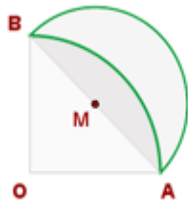
Área del segmento circular AB = Área del sector circular AOB - Área del triángulo AOB

Área de una lúnula

Construcción



Partimos de un triángulo isósceles rectángulo.



Con centro en O se traza el arco AB.

Con centro en M, que es el punto medio de la hipotenusa, se traza el otro arco.

La parte enmarcada por el color verde se llama **lúnula de Hipócrates** .

Área de la lúnula = Área del semicírculo – Área del segmento circular

Área de la lúnula = Área del semicírculo – Área del sector + Área del triángulo

$$\text{Área de la lúnula} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} + \text{Área del triángulo}$$

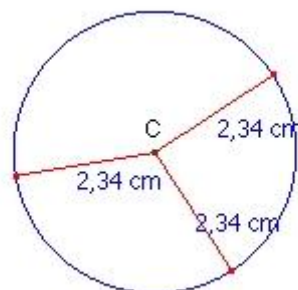
Área de la lúnula = Área del triángulo

Lugares geométricos

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos tales que satisfacen una propiedad y que solo estos puntos satisfacen dicha propiedad.

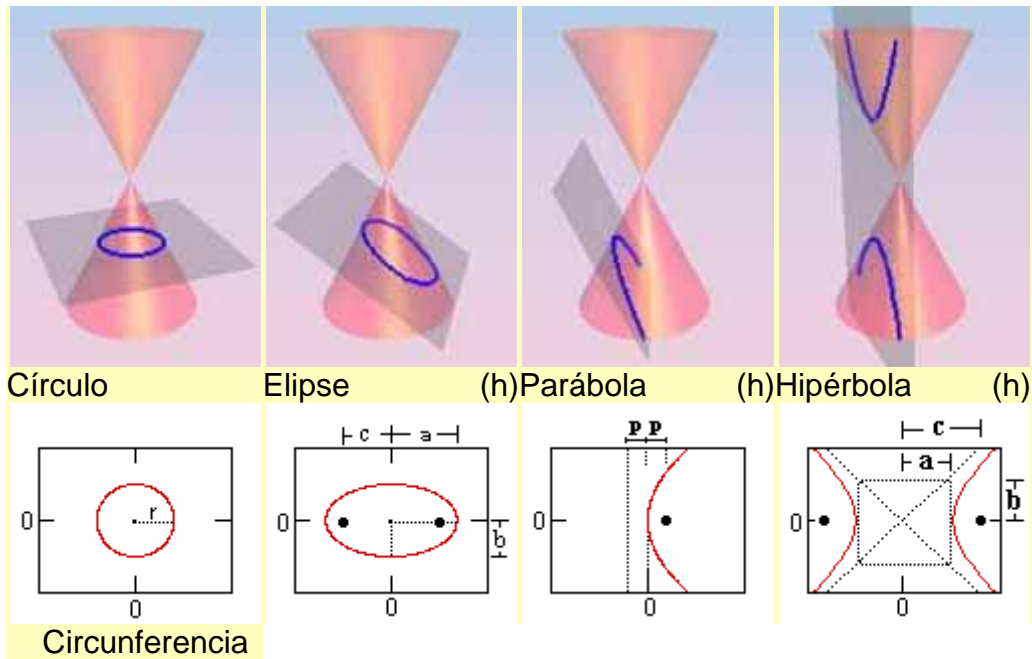
Ejemplo:

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de otro punto que es el que llamamos centro (C en el dibujo) de la circunferencia. Esa distancia que es siempre igual es lo que llamamos el radio de la circunferencia.



Cónicas

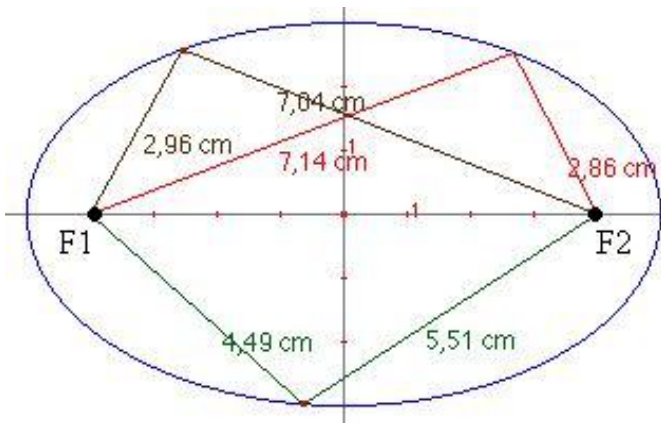
Una sección cónica es la intersección de un plano y un cono.



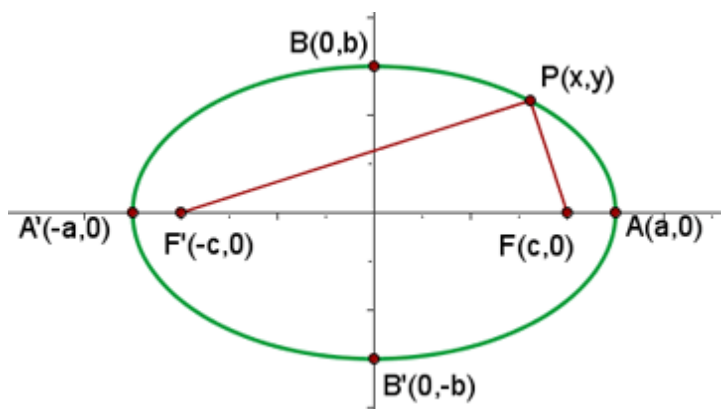
Cambiando el ángulo y el lugar de la intersección, podemos crear un círculo, un elipse, una parábola o una hipérbola.

Elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya **suma de distancias a dos puntos llamados focos (F1 y F2) es siempre la misma**. En el dibujo se puede ver que la suma de los dos segmentos verdes (las distancias del punto a cada uno de los focos) es igual que la de los segmentos marrones y que la suma de los segmentos rojos. Esa suma de distancias que es siempre la misma, es igual a la longitud del **eje mayor de la elipse**.



Elementos de la elipse



$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

Focos: son los puntos fijos F y F' .

Eje focal: es la recta que pasa por los focos.

Eje secundario: es la mediatriz del segmento FF' .

Centro: es el punto de intersección de los ejes.

Radios vectores: son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: PF y PF' .

Distancia focal: es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud $2c$, c es el valor de la **semidistancia focal**.

Vértices: son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: A , A' , B y B' .

Eje mayor: es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud $2a$, a es el valor del **semieje mayor**.

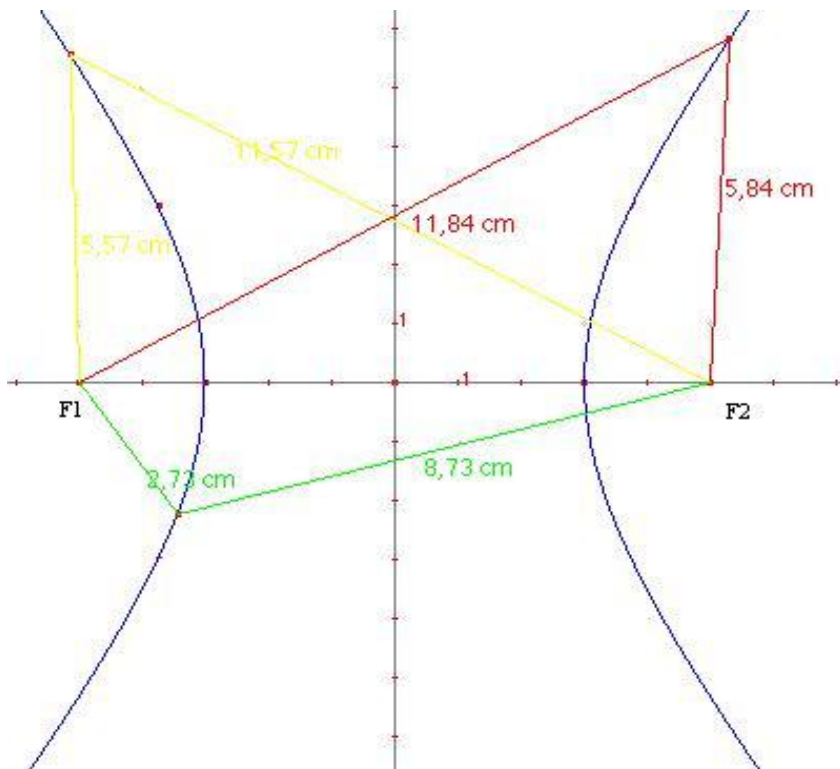
Eje menor: es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud $2b$, b es el valor del **semieje menor**.

Excentricidad de la elipse: Es un número que mide el mayor o menor achatamiento de la elipse. Y es igual al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

$$e = \frac{c}{a} \quad c \leq a \quad 0 \leq e \leq 1$$

Hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya **suma diferencia de distancias a dos puntos llamados focos (F1 y F2) es siempre la misma**. En el dibujo se puede ver que la diferencia de las líneas amarillas es igual que la diferencia entre las líneas rojas e igual que la diferencia entre las líneas verdes.



Parábola

En este caso se parte de un solo punto, que es el **foco**, y de una recta que se llama **directriz**. La parábola es el lugar geométrico de los puntos cuya **distancia al foco es igual que la distancia a la recta directriz**. Aquí se puede ver como los dos segmentos naranjas miden lo mismo, siendo una la distancia de un punto de la parábola al foco (F), y el otro la distancia a la recta directriz (d). Lo mismo ocurre con los segmentos amarillos y los segmentos verdes, que representan lo mismo pero para otros puntos de la parábola.

