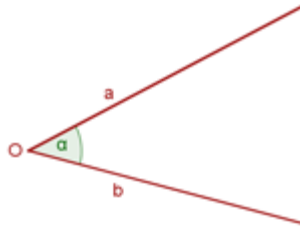


Medida de ángulos

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama **lados** y al origen común **vértice**.



El ángulo es **positivo** si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y **negativo** en caso contrario

Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

1 Grado sexagesimal (°)

Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal.

Un grado tiene 60 minutos (') y un minuto tiene 60 segundos (").

2 Radián (rad)

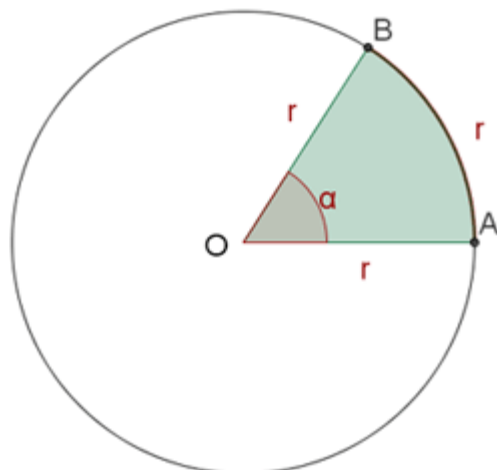
Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio.

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$30^\circ \longrightarrow \text{rad}$$

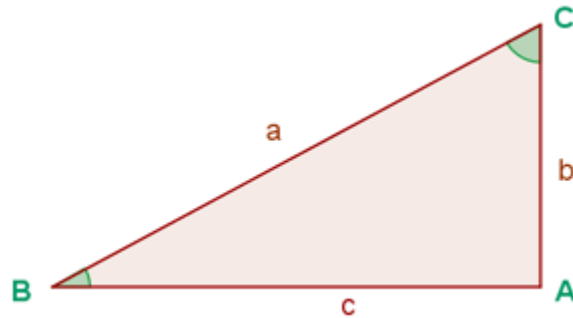
$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180^\circ}{30^\circ} \quad \alpha = \frac{30^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$



$$\pi/3 \text{ rad} \longrightarrow ^\circ$$

$$\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{180^\circ}{\alpha} \quad \alpha = \frac{180^\circ \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Razones trigonométricas



Seno

Seno del ángulo B: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Se denota por sen B.

$$\text{sen B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Coseno

Coseno del ángulo B: es la razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa.

Se denota por cos B.

$$\text{cos B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Tangente

Tangente del ángulo B: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo.

Se denota por $\text{tg } B$.

$$\text{tg } B = \frac{\text{sen } B}{\text{cos } B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

Cosecante

Cosecante del ángulo B : es la razón inversa del seno de B .

Se denota por $\text{cosec } B$.

$$\text{cosec } B = \frac{1}{\text{sen } B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Secante

Secante del ángulo B : es la razón inversa del coseno de B .

Se denota por $\text{sec } B$.

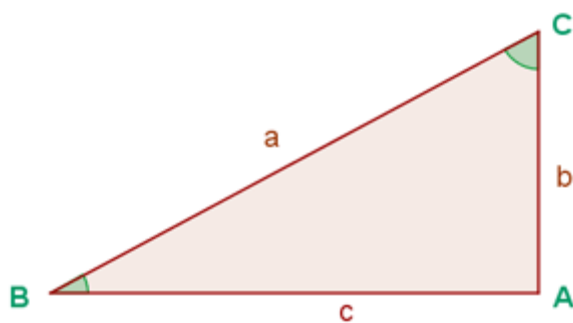
$$\text{sec } B = \frac{1}{\text{cos } B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$$

Cotangente

Cotangente del ángulo B : es la razón inversa de la tangente de B .

Se denota por $\text{cotg } B$.

$$\text{cotg } B = \frac{1}{\text{tg } B} = \frac{\text{cos } B}{\text{sen } B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$



Circunferencia goniométrica

Se llama circunferencia goniométrica a aquella que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio es la unidad. En la circunferencia goniométrica los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

QOP y TOS son triángulos semejantes.

QOP y T'OS' son triángulos semejantes.

El seno es la ordenada (y).

El coseno es la abscisa (x).

$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = PQ$$

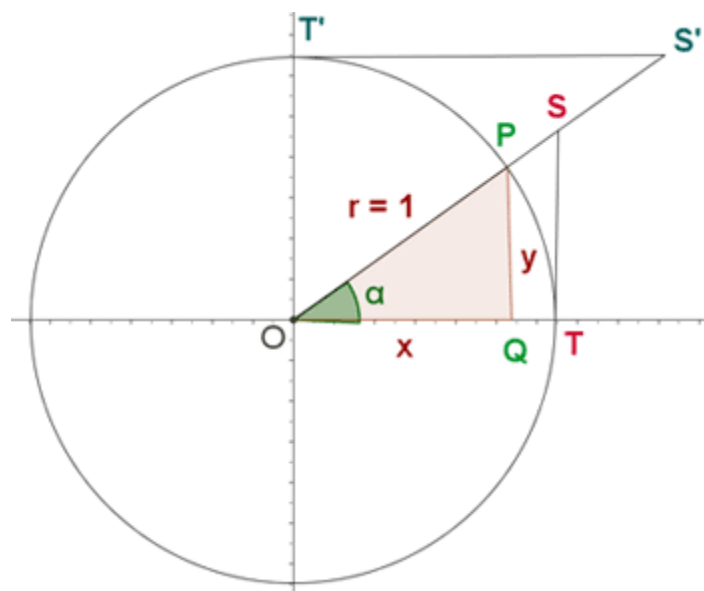
$$\text{cosec } \alpha = \frac{OP}{PQ} = \frac{OS'}{OT'} = \frac{OS'}{r} = OS'$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{OQ}{OP} = OQ$$

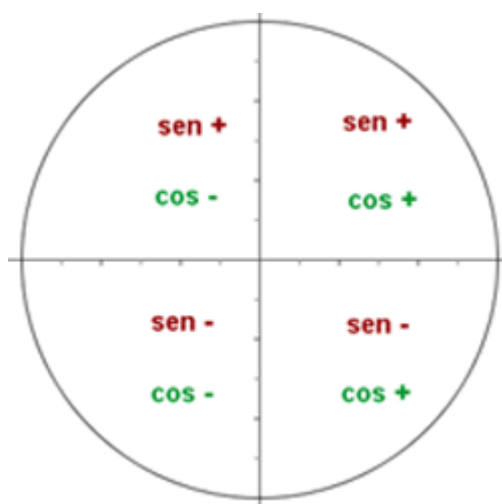
$$\text{sec } \alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{OT} = \frac{OS}{r} = OS$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{r} = ST$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{OQ}{PQ} = \frac{S'T'}{OT'} = \frac{S'T'}{r} = S'T'$$



Signo de las razones trigonométricas



Razones trigonométricas de 0°, 90°, 180° y 270°

$\alpha :$	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

Seno, coseno y tangente de 30° y 60°

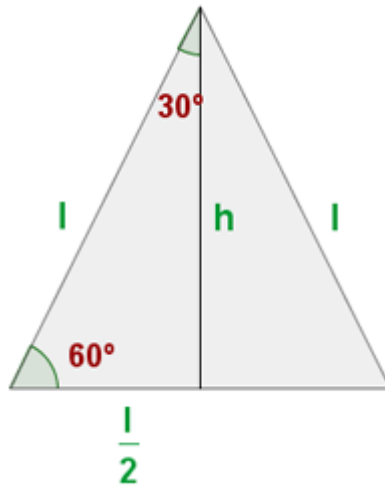
Si dibujamos un triángulo equilátero ABC, cada uno de sus tres ángulos mide 60° y, si trazamos una altura del mismo, h, el ángulo del vértice A por el que la hemos trazado queda dividido en dos iguales de 30° cada uno. Recurriendo al Teorema de Pitágoras, tenemos que la altura es:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{cos } 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} l} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$$



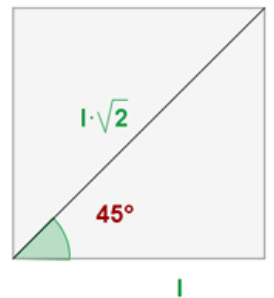
Seno, coseno y tangente de 45°

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$



Razones trigonométricas de ángulos notables

$\alpha:$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

Relaciones entre ángulos

Ángulos suplementarios

Son aquéllos cuya suma es 180° ó π radianes.

$$\text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

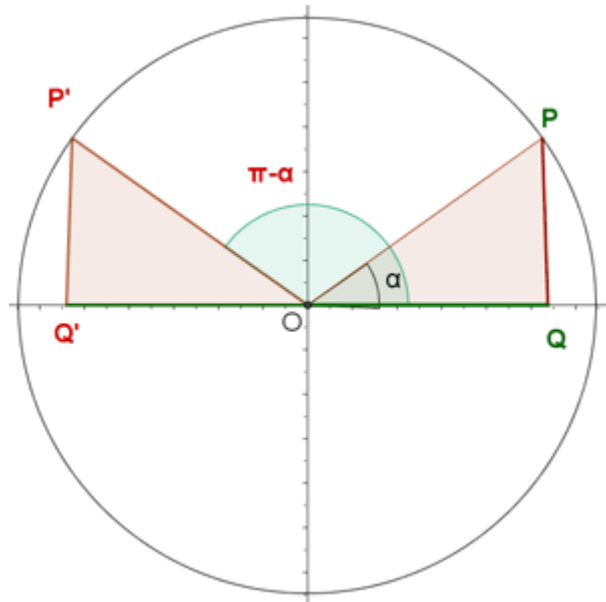
$$\text{cos } (\pi - \alpha) = -\text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$$

$$\text{sen } 150^\circ = \text{sen } (180^\circ - 30^\circ)$$

$$\text{cos } 150^\circ = \text{cos } (180^\circ - 30^\circ)$$

$$\text{tg } 150^\circ = \text{tg } (180^\circ - 30^\circ) =$$



Ángulos que se diferencian en 180°

Son aquéllos cuya suma es 180° ó π radianes.

$$\text{sen } (\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

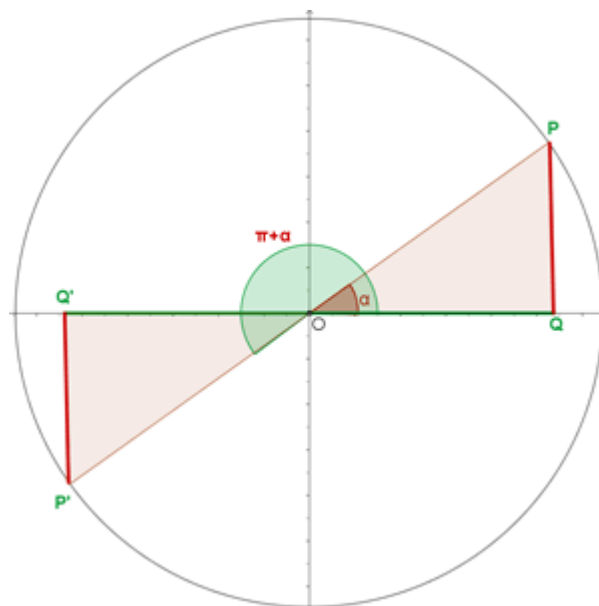
$$\text{cos } (\pi + \alpha) = -\text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha$$

$$\text{sen } 210^\circ = \text{sen } (180^\circ + 30^\circ)$$

$$\text{cos } 210^\circ = \text{cos } (180^\circ + 30^\circ)$$

$$\text{tg } 210^\circ = \text{tg } (180^\circ + 30^\circ) = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



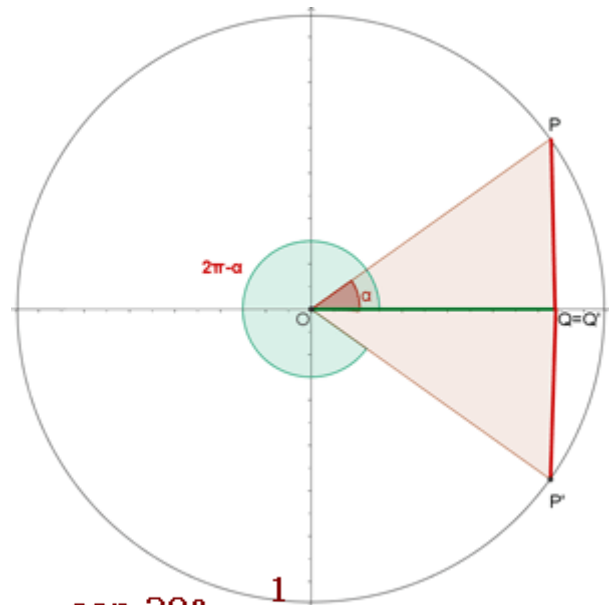
Ángulos opuestos

Son aquéllos cuya suma es 360° ó 2π radianes.

$$\text{sen } (2\pi - \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (2\pi - \alpha) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (2\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$$



$$\text{sen } 330^\circ = \text{sen } (360^\circ - 30^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 330^\circ = \text{cos } (360^\circ - 30^\circ) = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 330^\circ = \text{tg } (360^\circ - 30^\circ) = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ángulos negativos

El ángulo es negativo si se desplaza en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.

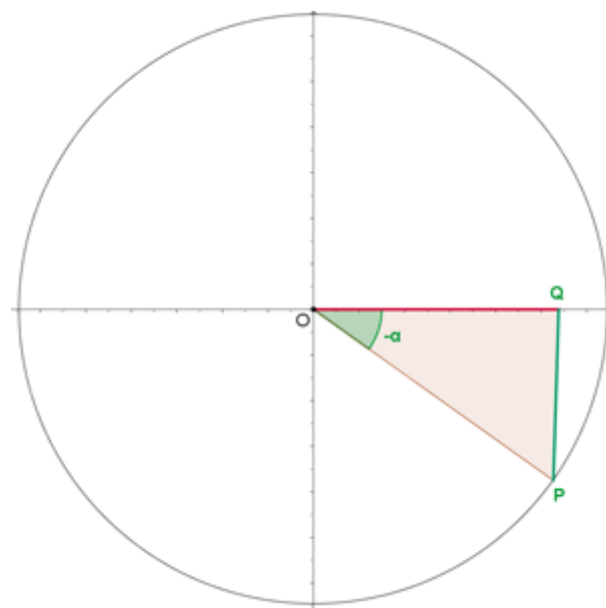
$$-\alpha = 360^\circ - \alpha$$

$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (-\alpha) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha$$

$$\text{sen } (-30^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$



$$\cos (-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} (-30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ángulos complementarios

Son aquéllos cuya suma es 90° ó $\pi/2$ radianes.

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$

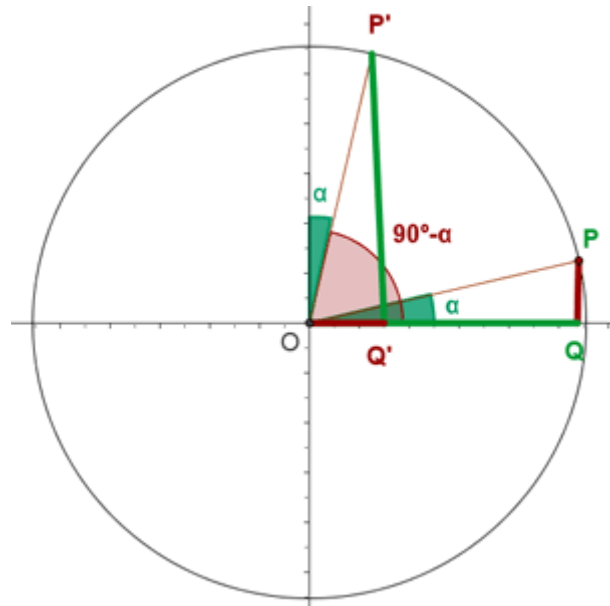
$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ - 30^\circ) =$$

$$\cos 60^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ) =$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} (90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3}$$



Mayores de 360°

Ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas.

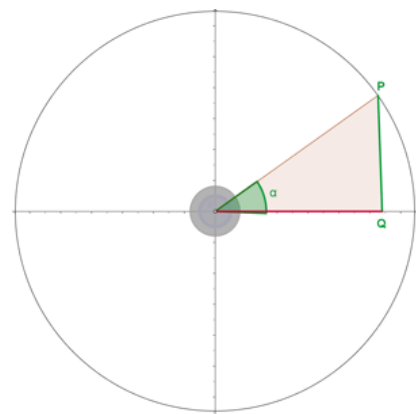
$$\operatorname{sen} (\alpha + 2\pi k) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos (\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\begin{array}{r} 750^\circ \\ 30^\circ \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{360^\circ} \\ 2 \end{array}$$

$$\operatorname{sen} 750^\circ = \operatorname{sen} (360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$



$$\cos 750^\circ = \cos (360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 750^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

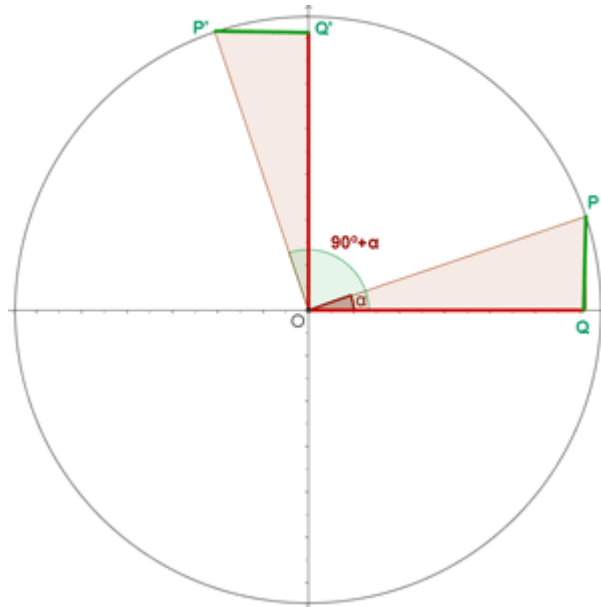
Razones trigonométricas de otros ángulos

Ángulos que difieren en 90° ó $\pi/2$ rad

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{cotg} \alpha$$



$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos (90^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} (90^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{cotg} 30^\circ = -\sqrt{3}$$

Identidades trigonométricas fundamentales

Relación seno coseno

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

Relación secante tangente

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Relación cosecante cotangente

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

Ejemplos de aplicación:

Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 2$, y que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sec \alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{2}$$

Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$, y que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\sec \alpha = -\frac{5}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{4}{3}$$

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Ejemplos de aplicación:

$$\text{sen } 15^\circ = \text{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \text{sen } 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \text{sen } 45^\circ \text{sen } 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

$$\text{tg } 15^\circ = \frac{\text{tg } 45^\circ - \text{tg } 30^\circ}{1 + \text{tg } 45^\circ \cdot \text{tg } 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\text{sen } 2a = 2 \text{ sen } a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\text{tg } 2a = \frac{2 \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

Ejemplos de aplicación:

$$\operatorname{sen} 120^\circ = 2 \operatorname{sen} 60^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 60^\circ = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

Ejemplos de aplicación:

$$\operatorname{sen}(22^\circ 30') = \operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos(22^\circ 30') = \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(22^\circ 30') = \operatorname{tg}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = -1 + \sqrt{2}$$

Transformaciones de sumas en productos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Ejemplos de aplicación:

$$\operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ = 2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 10^\circ$$

$$\operatorname{sen} 40^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ = 2 \cos 30^\circ \operatorname{sen} 10^\circ$$

$$\cos 40^\circ + \cos 20^\circ = 2 \cos 30^\circ \cos 10^\circ$$

$$\cos 40^\circ - \cos 20^\circ = -2 \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 10^\circ$$

Transformaciones de productos en sumas

$$\operatorname{sen} A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$$

Ejemplos de aplicación:

$$\operatorname{sen} 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x)$$

$$\cos 3x \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x)$$

$$\cos 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x)$$

$$\operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 2x)$$

Ecuaciones trigonométricas

Son las ecuaciones en las que la incógnita está afectada por una función trigonométrica. Como éstas son periódicas, habrá por lo general infinitas soluciones.

Ejemplos de ecuaciones trigonométricas

$$\text{sen } x = 0$$

El seno es nulo en el eje de abscisas y tiene de período 360° .

$$x = \arcsen 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k & x_1 = 0^\circ, 360^\circ, 720^\circ, \dots \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k & x_2 = 180^\circ, 540^\circ, 900^\circ, \dots \end{cases}$$

solución: $x = 0^\circ + 180^\circ k$

$$\text{cos } x = 0$$

El coseno es nulo en el eje ordenadas y tiene de período 360° .

$$x = \arccos 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ k & x_1 = 90^\circ, 450^\circ, 810^\circ, \dots \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ k & x_2 = 270^\circ, 630^\circ, 990^\circ, \dots \end{cases}$$

soluciones: $x = 0^\circ + 180^\circ k$

$$x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{tg } x = 0$$

La tangente es nula en el eje de abscisas y tiene de período 180° .

$$x = \text{arctg } 0$$

$$x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{sen } x = 1$$

$$x = \arcsen 1$$

$$x = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$\cos x = 1$$

$$x = \arccos 1$$

$$x = 0^\circ + 360^\circ k$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \operatorname{arctg} 1$$

$$x = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$\operatorname{sen} x = -1$$

$$x = \operatorname{arcsen}(-1)$$

$$x = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$\cos x = -1$$

$$\arccos(\cos x) = \arccos(-1)$$

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \arccos(-1)$$

$$x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

$$x = \operatorname{arctg}(-1)$$

$$x = 135^\circ + 180^\circ k$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

El seno es positivo en el 1^{er} y 2^o cuadrante.

$$x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad f \circ f^{-1} = x$$

El seno es negativo en el 2º y 4º cuadrante.

$$x = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 210^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{1}{2}$$

El coseno es positivo en el 1º y 4º cuadrante.

$$x = \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\operatorname{cos} x = -\frac{1}{2}$$

El coseno es negativo en el 2º y 3º cuadrante.

$$x = \operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 120^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

Ejercicios de ecuaciones trigonométricas

Resolver las ecuaciones trigonométricas:

Ejercicio 1

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} 60^\circ \\ \operatorname{sen} 120^\circ \end{cases}$$

$$x + 45^\circ = 60^\circ \quad x_1 = 15^\circ + 360^\circ k$$

$$x + 45^\circ = 120^\circ \quad x_2 = 75^\circ + 360^\circ k$$

Ejercicio 2

$$3\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$\operatorname{sen} x = 1 \quad x = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{3} \quad x = \begin{cases} 41^\circ 48' 37'' + 360^\circ k \\ 138^\circ 11' 23'' + 360^\circ k \end{cases}$$

Ejercicio 3

$$\cos 2x = 1 + 4\operatorname{sen} x$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + 4\operatorname{sen} x$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + 4\operatorname{sen} x$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x = 0$$

$$2\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \operatorname{sen} x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \operatorname{arcsen} 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \operatorname{arcsen}(-2) \quad \text{Sin solución}$$

Ejercicio 4

$$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$$

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3} \quad \begin{cases} x = 60^\circ + 180^\circ k \\ x = 120^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones trigonométricas

Ejercicio 5

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

Por reducción:

$$e_1 + e_2 \quad 2\operatorname{sen} x = \sqrt{3} \quad \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 120^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

Ejercicio 6

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \\ \operatorname{cotg} (x + y) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} (x + y)} = \frac{3}{4} \quad \operatorname{tg} (x + y) = \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \\ \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \\ 4\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$$

$$4\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0 \quad (2\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \quad x = 26^\circ 33' 54'' + 180^\circ k$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{2} \quad x = 26^\circ 33' 54'' + 180^\circ k$$

Ejercicio 7

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y = 1 \\ \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x + y) = 1 \\ \operatorname{sen}(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x - y = 30^\circ \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x &= 120^\circ + 360^\circ k \\ x &= 60^\circ + 180^\circ k \\ y &= 30^\circ + 180^\circ k \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x - y = 150^\circ \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x &= 240^\circ + 360^\circ k \\ x &= 120^\circ + 180^\circ k \\ y &= -30^\circ + 180^\circ k \end{aligned}$$