I N E C U A C I O N E S

DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Forma general: $a{\cdot}x + b > 0$
$a{\cdot}x + b \geq 0$
$a{\cdot}x + b < 0$
$a{\cdot}x + b \leq 0$

Para **resolverlas** se siguen los mismos pasos que en las ecuaciones de primer grado con una incógnita:

1. Quitar paréntesis.
2. Quitar denominadores.
3. Agrupar términos semejantes a ambos lados de la desigualdad.
4. Despejar la incógnita.

En este último paso hay que tener en cuenta una propiedad de las desigualdades: “Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un número negativo cambia el sentido de la misma”.

La **solución** de una inecuación de este tipo puede ser:

1. Un conjunto de números reales que se suele expresar en forma de intervalo.
2. Cualquier número real.
3. Ningún número real. Entonces se dice que no tiene solución.

EJERCICIOS RESUELTOS

1º) Resuelve:

a) $3x + 12 > 0$

b) $8x - 16 \geq 0$

c) $5x - 10 < 0$

d) $9x + 27 \leq 0$

SOLUCIÓN:

a) $3x > -12$

$x > \frac{-12}{3}$

$x > -4 \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $(4, +\infty)$

b) $8x \geq 16$

$x \geq \frac{16}{8}$

$x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $[2, +\infty)$

c) $5x < 10$

$x < \frac{10}{5}$

$x<2 \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $(-\infty, 2)$

d) $9x \le -27$

$x \le \dfrac{-27}{9}$

$x \le -3 \qquad \Rightarrow \qquad$ Solución: $(-\infty, -3]$

2º) Resuelve:

a) $-6x + 2 \ge 0$

b) $10 - 5x > 0$

c) $18 - 6x \le 0$

d) $-7x + 28 < 0$

SOLUCIÓN:

a) $-6x \ge -2$

RECUERDA: En los casos en los que el coeficiente de la x sea negativo, se multiplican los dos miembros por (–1) y por lo tanto, cambia el sentido de la desigualdad.

$6x \le 2$

$x \le \dfrac{2}{6}$

$x \le \dfrac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad$ Solución: $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$

b) $-5x > -10$

$5x < 10$

$x < \dfrac{10}{5}$

$x < 2 \qquad \Rightarrow \qquad$ Solución: $(-\infty, 2)$

c) $-6x \le -18$

$6x \ge 18$

$x \ge \dfrac{18}{6}$

$x \ge 3 \qquad \Rightarrow \qquad$ Solución: $[3, +\infty)$

d) $-7x < -28$

$7x > 28$

$x > \dfrac{28}{7}$

$x > 4 \quad \Rightarrow \qquad$ Solución: $[4, +\infty)$

3º) Resuelve:

a) $3x + 7 > 5 - 2x - 4$

$3x + 2x > 5 - 4 + 7$

$5x > 8$

$x > \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $\left(\frac{8}{5}, +\infty\right)$

b) $12 - 8x - 9 \geq x - 6 - 4x$

$-8x - x + 4x \geq -6 - 12 + 9$

$-x \geq -9$

$x \leq 9 \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $(-\infty, 9]$

c) $2x - 7 - 5x < 3 - x$

$2x - 5x + x < 3 + 7$

$-2x > 10$

$2x < -10$

$x < -\frac{10}{2}$

$x < -5 \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $(-\infty, -5)$

d) $10x + 6 - 8x - 4 \leq 5 - 3x + 12x$

$10x - 8x + 3x - 12x \leq 5 - 6 + 4$

$-7x \leq 3$

$7x \geq -3$

$x \geq -\frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $\left[-\frac{3}{7}, +\infty\right)$

4º) Resuelve las siguientes inecuaciones con paréntesis:

a) $2 \cdot (1 - x) + 9 < 3 - (2x + 5)$

$2 - 2x + 9 < 3 - 2x - 5$

$-2x + 2x < 3 - 5 - 2 - 9$

$0 < -13$

Como esta última desigualdad es falsa, la inecuación planteada *no tiene solución*.

b) $4x - (x + 2) \leq 3x + 6$

$4x - x - 2 \leq 3x + 6$

$4x - x - 3x \leq 6 + 2$

$0 \leq 8$

La última desigualdad es cierta sin importar el valor de x. Por tanto, la solución de la inecuación planteada es cualquier número real. Se escribe: $\mathbb{R}$.

c) $5x - (3 - 2x) + 8 > 9 + 3(2x - 4)$

$5x - 3 + 2x + 8 > 9 + 6x - 12$

$5x + 2x - 6x > 9 - 12 + 3 - 8$

$x > -8 \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $(-8, +\infty)$

d) $3x - 2 \cdot (4 - 2x) \geq 5x - (7x + 9)$

$3x - 8 + 4x \geq 5x - 7x - 9$

$$3x+4x-5x+7x \geq -9+8$$

$$9x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } \left(-\infty, -\frac{1}{9}\right]$$

5º) Halla la solución de las siguientes inecuaciones con denominadores:

a) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}<\frac{2x-5}{6}-1$

$$\frac{6x}{12}+\frac{4\cdot(x+1)}{12}<\frac{2\cdot(2x-5)}{12}-\frac{12}{12}$$

$$12\cdot\left[\frac{6x}{12}+\frac{4\cdot(x+1)}{12}<\frac{2\cdot(2x-5)}{12}-\frac{12}{12}\right]$$

$$6x+4\cdot(x+1)<2\cdot(2x-5)-12$$

$$6x+4x+4<4x-20-12$$

$$6x+4x-4x<-20-12-4$$

$$6x<-36$$

$$x<-\frac{36}{6}$$

$$x<-6 \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } (-\infty, -6)$$

b) $x-\frac{2-x}{5} \leq \frac{4x+1}{3}-\frac{x-5}{15}$

$$\frac{15x}{15}-\frac{3\cdot(2-x)}{15} \leq \frac{5\cdot(4x+1)}{15}-\frac{x-5}{15}$$

$$15\cdot\left[\frac{15x}{15}-\frac{3\cdot(2-x)}{15} \leq \frac{5\cdot(4x+1)}{15}-\frac{x-5}{15}\right]$$

$$15x-3\cdot(2-x) \leq 5\cdot(4x+1)-(x-5)$$

$$15x-6+3x \leq 20x+5-x+5$$

$$15x+3x-20x+x \leq 5+5+6$$

$$-2x \leq 16$$

$$2x \geq -16$$

$$x \geq -\frac{16}{2}$$

$$x \geq -8 \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } [-8, +\infty)$$

c) $3-2x-\frac{5x-4}{8}>\frac{x}{2}-\frac{2-3x}{4}$

$$\frac{8\cdot(3-2x)}{8}-\frac{5x-4}{8}>\frac{4x}{8}-\frac{3\cdot(2-3x)}{8}$$

$$8\cdot\left[\frac{8\cdot(3-2x)}{8}-\frac{5x-4}{8}>\frac{4x}{8}-\frac{3\cdot(2-3x)}{8}\right]$$

$$8\cdot(3-2x)-(5x-4)>4x-3\cdot(2-3x)$$

$$24-16x-5x+4>4x-6+9x$$

$$-16x-5x-4x-9x>-6-24-4$$

$$-34x>-34$$

$$34x<34$$

$$x<\frac{34}{34}$$

$$x<1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } (-\infty,1)$$

d) $\dfrac{2-7x}{4}-\dfrac{3-x}{2}+x\le 6-\dfrac{2x+1}{5}$

$$20\cdot\left[\frac{2-7x}{4}-\frac{3-x}{2}+x\le 6-\frac{2x+1}{5}\right]$$

$$5\cdot(2-7x)-10\cdot(3-x)+20x\le 10\cdot 6-4\cdot(2x+1)$$

$$10-35x-30+10x+20x\le 120-8x-4$$

$$-35x+10x+20x+8x\le 120-4-10+30$$

$$3x\le 136$$

$$x\le\frac{136}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } \left(-\infty,\frac{136}{3}\right]$$

6º) Resuelve las inecuaciones:

a) $3\cdot(x-5)+\dfrac{1-2x}{4}>\dfrac{x+1}{2}-(5+x)$

$$3x-15+\frac{1-2x}{4}>\frac{x+1}{2}-5-x$$

$$4\cdot\left[3x-15+\frac{1-2x}{4}>\frac{x+1}{2}-5-x\right]$$

$$12x-60+1-2x>2\cdot(x+1)-20-4x$$

$$12x-2x-2x+4x>2-20+60-1$$

$$12x>41$$

$$x>\frac{41}{12} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } \left(\frac{41}{12},+\infty\right)$$

b) $\dfrac{1}{3}\cdot(2-5x)+2x\ge\dfrac{7}{4}-(3x+2)$

$$\frac{2-5x}{3}+2x\ge\frac{7}{4}-3x-2$$

$$12\cdot\left[\frac{2-5x}{3}+2x\ge\frac{7}{4}-3x-2\right]$$

$$4\cdot(2-5x)+12\cdot 2x \geq 3\cdot 7-12\cdot 3x-12\cdot 2$$

$$8-20x+24x \geq 21-36x-24$$

$$-20x+24x+36x \geq 21-24-8$$

$$40x \geq -11$$

$$x \geq -\frac{11}{40} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } \left[-\frac{11}{40},+\infty\right)$$

c) $5-2x+\dfrac{3x-1}{9}<2\cdot(4-2x)+6$

$$5-2x+\frac{3x-1}{9}<8-4x+6$$

$$45-18x+3x-1<72-36x+54$$

$$-18x+3x+36x<72+54-45+1$$

$$21x<82$$

$$x<\frac{82}{21} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } \left(-\infty,\frac{82}{21}\right)$$

d) $\dfrac{3}{4}\cdot(5-x)-\dfrac{x+1}{3}\leq\dfrac{3+2x}{6}-x$

$$\frac{15-3x}{4}-\frac{x+1}{3}\leq\frac{3+2x}{6}-x$$

$$\frac{45-9x}{12}-\frac{4x+4}{12}\leq\frac{6+4x}{12}-\frac{12x}{12}$$

$$45-9x-(4x+4)\leq 6+4x-12x$$

$$45-9x-4x-4\leq 6+4x-12x$$

$$-9x-4x-4x+12x\leq 6-45+4$$

$$-11x\leq -35$$

$$11x\geq 35$$

$$x\geq\frac{35}{11} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } \left[\frac{35}{11},+\infty\right)$$

EJERCICIO

1º) Resuelve las siguientes inecuaciones:

1. $2x+4>0$
2. $3x-7<5$
3. $2-x>3$
4. $7>8x-5$
5. $1-5x<-8$
6. $x-3<3-x$
7. $3x+5\geq 4x-1$
8. $2x+5>6x+4$
9. $3x+7\geq 2x-3$
10. $-4x+9<x-1$
11. $3x-1\geq x-3$
12. $3x-1\leq 2x+1$

13. $2(x-1) < 6 - x$

14. $5(x+1) > 2x + 6$

15. $1-(4-x) < 2(x+1)$

16. $5(x-2) \geq 3(2x+6)$

17. $2x-1 \leq x - 3(x-1)$

18. $x-2(x-3) < -2$

19. $3x + 2 < 10 + 3(x-2)$

20. $3(2x+5) - 4(x-1) > 0$

21. $6x-3(x+5) > 7x + 4$

22. $6x + 5 \geq 3 - 2(x+3)$

23. $2(3x-6) < 3(5x+4)$

24. $2(3x-1) - 5(x-2) < 3(x+22)$

25. $-6(x-2) - (4-3x) > x - 5$

26. $(3x+2)5 - 3(x+1) \geq 4$

27. $\dfrac{x+2}{4} \leq 3x - 5$

28. $3x + 2 > \dfrac{x-2}{2}$

29. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} > -1$

30. $\dfrac{x-1}{2} > x + 1$

31. $5x - 7 \leq 2x + \dfrac{1}{2}$

32. $2-\dfrac{3x+4}{5} \geq 4x - \dfrac{1+2x}{3}$

33. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-3}{3} \geq 1$

34. $\dfrac{x-4}{4} + 1 < \dfrac{x+4}{8}$

35. $\dfrac{2x+3}{5} - \dfrac{3}{2} \geq \dfrac{x-1}{5}$

36. $-2x + 7 \geq \dfrac{x}{2} - 3$

37. $\dfrac{3x+1}{3} < x - \dfrac{1+x}{2}$

38. $\dfrac{x}{8} - \dfrac{x}{10} > \dfrac{x}{12} - 1$

39. $\dfrac{x+3}{4} - \dfrac{x}{3} \geq 1 - \dfrac{3x-1}{2}$

40. $\dfrac{2x+13}{7} < 4x + 1$

41. $\dfrac{7-3x}{2} < x + 1$

42. $2 + \dfrac{x}{4} \leq \dfrac{2x}{5}$

43. $x \geq \frac{x-1}{3} - \frac{x+3}{2}$

44. $\frac{1-x}{3} \geq x - \frac{4x-2}{4}$

45. $\frac{3x-1}{6} \leq x + \frac{x-1}{4} - \frac{x+2}{3}$

46. $\frac{2(x+2)}{3} < 2x$

47. $\frac{3(2-x)}{2} - \frac{16}{3} < x - \frac{x+1}{5}$

48. $2(3x-4)+5x < 1+\frac{x}{2}$

49. $2(1-x)+3x \leq \frac{x}{2} + \frac{x-1}{2}$

50. $\frac{3x+1}{4} - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{15}(x+3) + \frac{4(1-x)}{3}$

2º) En una fiesta, Olga, Begoña y Salvador hablan de la edad que tienen. Sabemos que la suma de las edades de los tres es inferior a 85 años, que Begoña tiene el doble de años que Olga y que Salvador tiene 15 años más que Begoña. ¿Podrías decir si la persona más joven es ya mayor de edad?

3º) La familia Sánchez quiere ir de viaje. Por eso se han puesto en contacto con dos agencias de viaje. La agencia Salimos cobra 75 euros más 0,50 euros por kilómetro y la agencia Marchamos cobra 95 euros más 0,40 euros por kilómetro.

a) ¿A partir de cuántos kilómetros resulta más barata la agencia Salimos?

b) Para hacer un viaje de 350 km, ¿qué agencia es la más rentable? ¿Y para hacer un viaje de 480 km?

4º) El lado desigual de un triángulo isósceles tien 8 cm. Determina la medida de uno de los otros dos lados si el perímetro tiene que ser mayor de 20 cm.

5º) Si al triple de un número le restamos diez unidades, resulta mayor que si al doble de este número le sumamos cuatro. ¿Qué números verifican este enunciado?

6º) El doble de la suma de un número más tres unidades es más grande que el triple de este número más seis unidades. ¿De qué número se trata?

7º) La suma de la mitad y la cuarta parte de un número es más pequeña o igual que el triple de este número menos seis unidades. Encuentra la solución de esta inecuación.

8º) Mónica ha ido a la papelería y ha comprado un cuaderno con espiral para la clase de matemáticas, un bolígrafo que vale la cuarta parte del precio del cuaderno y una escuadra para dibujar que cuesta 1,50 euros. En casa le dan una paga de 12 euros. Sabemos que ha gastado menos de las $\frac{2}{3}$ partes. ¿Qué podrías decir del precio del cuaderno de Matemáticas?

9º) El lado de un rectángulo tiene 20 cm y el otro x cm. Determina la medida de x para que el área del rectángulo sea inferior a 104 cm^2.

10º) Un club de tenis cobra a sus socios una cuota mensual de 36 euros, la cual les da derecho a disfrutar de las instalaciones y jugar al tenis tantas horas al mes como deseen. Un jugador que no sea socio tiene que pagar 4,50 €/h por utilizar las instalaciones. ¿Cuántas horas mensuales tendrá que jugar una persona para que le salga más rentable hacerse socia del club?

11º) La encargada de una tienda mezcla café de Colombia de 3,60 €/kg con café de Brasil de 4,30 €/kg. Pretende conseguir un café de calidad intermedia que no supere los 4 €/kg. Si necesita producir 60 kg de mezcla, ¿qué condiciones tienen que cumplir los pesos de las dos clases de café que mezcla?

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación de segundo grado se expresa de forma general de una de las siguientes formas:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

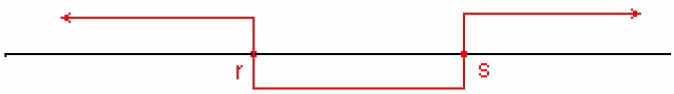
siendo a, b y c números reales.

Para resolverlas, lo primero que hay que hacer es calcular las raíces de los polinomios de segundo grado que aparecen en el primer miembro y a partir de ahí se pueden seguir dos procesos diferentes:

MÉTODO 1

Supongamos que las raíces obtenidas son r y s siendo r < s.

Si las situamos sobre la recta real, ésta queda dividida en intervalos: (-∞, r), (r, s) y (s, +∞). Se observa mejor en el gráfico,



En cada uno de esos intervalos, el polinomio $ax^2 + bx + c$ tendrá signo positivo o negativo. De modo que dependiendo del signo de la desigualdad, así elegiremos el (los) intervalo(s) solución.

También son importantes las raíces puesto que son los valores en los que el polinomio se anula y por tanto pertenecerán a la solución de la inecuación cuando la desigualdad sea del tipo ≥ o ≤

EJERCICIOS RESUELTOS

1º) $3x^2 + 7x + 2 > 0$

1. Se hallan las raíces del polinomio $3x^2 + 7x + 2$.

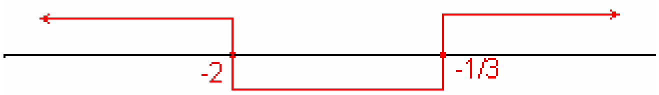
Para ello se iguala a cero y se resuelve la ecuación que resulta:

$$3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{-7+5}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-7-5}{6} = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

Las raíces son $-\frac{1}{3}$ y -2.

2. Al situar las raíces obtenidas en la recta real, esta queda dividida en tres intervalos:



Esos intervalos son (de izquierda a derecha) $(-\infty, -2)$, $\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$ y $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

3. En cada uno de los intervalos se estudia el signo del polinomio $3x^2 + 7x + 2$.

Para ello, se elige un número cualquiera de cada intervalo y se halla el valor numérico del polinomio en ese número, observando si es positivo o negativo.

	$(-\infty,-2)$	**$\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$**	**$\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$**
$3x^2+7x+2$	$3(-3)^2+7(-3)+2=8>0$	$3\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)+2=-2<0$	$3\cdot 0^2+7\cdot 0+2=2>0$

4. Se escribe la solución de la inecuación.

Como la inecuación que hay que resolver es $3x^2+7x+2>0$, se escogen los intervalos en los que al sustituir resultaban valores positivos (mayores que 0).

Los valores de las raíces no sirven puesto que para ellos, el polinomio $3x^2+7x+2$ se anula y el signo de la inecuación es estrictamente mayor que cero.

Solución: $(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$

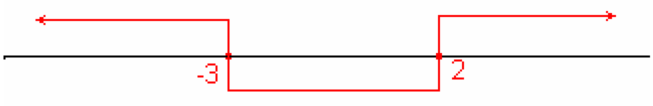
2º) $x^2+x-6\leq 0$

1. Se hallan las raíces del polinomio x^2+x-6, resolviendo la ecuación $x^2+x-6=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2 \\ x_2=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

Las raíces son -3 y 2.

2. Al situar las raíces obtenidas en la recta real, esta queda dividida en tres intervalos:



Esos intervalos son (de izquierda a derecha): $(-\infty,-3)$, $(-3,2)$ y $(2,+\infty)$

3. En cada uno de los intervalos se estudia el signo del polinomio x^2+x-6.

	$(-\infty,-3)$	**$(-3,2)$**	**$(2,+\infty)$**
x^2+x-6	$(-4)^2+(-4)-6=6>0$	$0^2+0-6=-6<0$	$3^2+3-6=6>0$

4. Se escribe la solución de la inecuación.

Como la inecuación que hay que resolver es $x^2+x-6\leq 0$, se escogen los intervalos en los que al sustituir resultaban valores negativos (menores que 0). En este caso los del intervalo central.

Los extremos del intervalo son los valores de x donde se anula el polinomio. Como la desigualdad que hay que resolver es del tipo ≤ 0, también son solución de la inecuación.

Solución: $[-3,2]$

3º) $x^2+9\leq 0$

1. Se hallan las raíces del polinomio x^2+9, resolviendo la ecuación $x^2+9=0$

$X^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{-9}$.

No tiene solución real. Por tanto, el polinomio $x^2 + 9$ no tiene raíces reales.

2. Al no tener raíces, la recta real no se divide en intervalos. Se estudia entonces el signo del polinomio en $\Re$, tomando un valor real cualquiera y hallando el valor numérico del polinomio en él.

El más sencillo para operar es 0. Se obtiene: $0^2 + 9 = 9 > 0$

Por tanto, para cualquier valor real el polinomio $x^2 + 9$ es positivo.

3. Se halla la solución.

Teniendo que cuenta la inecuación a resolver, $x^2 + 9 \le 0$ y el resultado obtenido en el paso anterior, se puede concluir que la inecuación **no tiene solución** porque no existe ningún valor real que haga que $x^2 + 9$ sea negativo o cero.

MÉTODO 2

Siendo r y s las raíces del polinomio con r < s, se puede descomponer el polinomio $ax^2 + bx + c$ de la siguiente forma: $ax^2 + bx + c = a\cdot(x - r)\cdot(x - s)$.

De modo que la suma se ha convertido en el producto de números.

Según la inecuación, ese producto ha de ser positivo o negativo. Teniendo en cuenta la regla de los signos de la multiplicación, se descompone la inecuación de segundo grado en dos sistemas de inecuaciones de primer grado.

EJERCICIOS RESUELTOS

1º) $2x^2 - x - 1 \ge 0$

1. Se hallan las raíces del polinomio $2x^2 - x - 1$, resolviendo la ecuación $2x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Las raíces son $-\frac{1}{2}$ y 1.

2. Se descompone el polinomio en producto de factores:

$$2x^2 - x - 1 = 2\cdot\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot(x - 1) = (2x + 1)\cdot(x - 1)$$

3. Se escribe de nuevo la inecuación sustituyendo el polinomio por su descomposición factorial.

$$2x^2 - x - 1 \ge 0 \qquad \Rightarrow \qquad (2x + 1)\cdot(x - 1) \ge 0$$

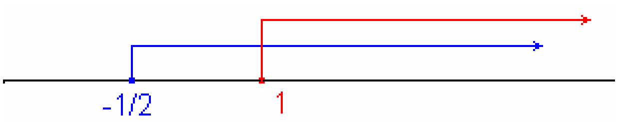
Se obtiene así que el producto de dos números, (2x+1) y (x–1), ha de ser positivo o cero.

4. Planteamos dos sistemas de inecuaciones de primer grado a partir del resultado anterior.

Para que el producto de esos dos números sea mayor o igual que cero, los dos han de ser positivos o negativos a la vez. Con este planteamiento se obtiene

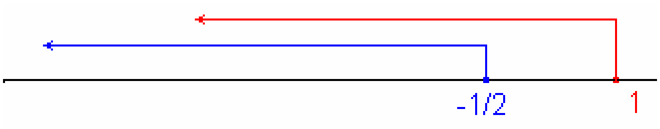
$$(2x+1)(x-1)\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 2x+1\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} 2x+1\leq 0 \\ x-1\leq 0 \end{array}\right\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} x\geq \frac{-1}{2} \\ x\geq 1 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} x\leq \frac{-1}{2} \\ x\leq 1 \end{array}\right\} \end{cases}$$

Representando gráficamente los resultados del primer sistema se observa la solución de este:



Por tanto su solución es: $[1,+\infty)$

Representando gráficamente los resultados del segundo sistema se ve su solución:



La solución de este sistema es: $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

5. La **solución** de la inecuación es la unión de las solución de los sistemas

$$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$$

2º) $3x^2-8x+4<0$

1. Se hallan las raíces del polinomio $3x^2-8x+4$, resolviendo la ecuación $3x^2-8x+4=0$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{8\pm 4}{6}=\begin{cases} x_1=\frac{8+4}{6}=\frac{12}{6}=2 \\ x_2=\frac{8-4}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Las raíces son $\frac{2}{3}$ y 2.

2. Se descompone el polinomio en producto de factores:

$$3x^2-8x+4=3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot(x-2)=(3x-2)\cdot(x-2)$$

3. Se escribe de nuevo la inecuación sustituyendo el polinomio por su descomposición factorial.

$$3x^2-8x+4<0 \qquad \Rightarrow \qquad (3x-2)\cdot(x-2)<0$$

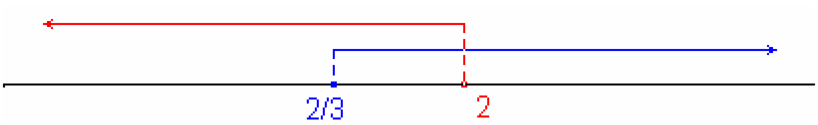
Se obtiene así que el producto de dos números, (3x+2) y (x–2), ha de ser negativo.

4. Planteamos dos sistemas de inecuaciones de primer grado a partir del resultado anterior.

Para que el producto de esos dos números sea menor que cero, uno de ellos ha de ser positivo y el otro negativo. Con este planteamiento se obtiene

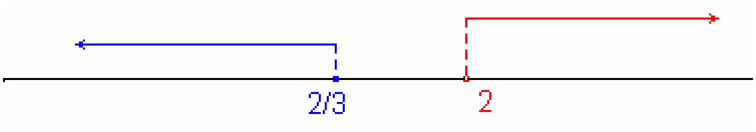
$$(3x-2)(x-2)<0 \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} 3x-2>0 \\ x-2>0 \end{matrix}\right\} \\ \left.\begin{matrix} 3x-2<0 \\ x-2>0 \end{matrix}\right\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} x>\frac{2}{3} \\ x<2 \end{matrix}\right\} \\ \left.\begin{matrix} x>\frac{2}{3} \\ x>2 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

Representando gráficamente los resultados del primer sistema se observa la solución de este:



Por tanto su solución es: $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

Representando gráficamente los resultados del segundo sistema se ve su solución:



Este sistema no tiene solución

5. La **solución** de la inecuación es: $\left(\mathbf{\frac{2}{3}, 2}\right)$

3º) $x^2-4x+4>0$

1. Se hallan las raíces del polinomio x^2-4x+4, resolviendo la ecuación $x^2-4x+4=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{4\pm 0}{2}=\frac{4}{2}=2$$

El polinomio tiene una raíz, 2, que es doble.

2. Se descompone el polinomio en producto de factores:

$$x^2-4x+4=(x-2)\cdot(x-2)=(x-2)^2$$

3. Se escribe de nuevo la inecuación sustituyendo el polinomio por su descomposición factorial.

$$x^2-4x+4>0 \qquad \Rightarrow \qquad (x-2)^2>0$$

4. En lugar de plantear los sistemas de inecuaciones a los que da lugar, se puede estudiar la inecuación obtenida mediante un razonamiento lógico:

En el miembro de la izquierda aparece el cuadrado de un número, $(x-2)^2$, que siempre es positivo sea cual sea el valor de la incógnita x.

Y eso es precisamente lo que se plantea en la inecuación, $(x-2)^2>0$. Por tanto, en principio la solución son todos los números reales. Pero como la desigualdad es estrictamente mayor que cero, no son solución los valores que x que anulan $(x-2)^2$, esto es, las raíces del polinomio, que en este caso ha sido solo una, 2.

5. **Solución**: $\Re-\{\mathbf{2}\}$

NOTA: *Una inecuación de segundo grado no se puede empezar a resolver utilizando los métodos anteriores si antes no está expresada en la forma general.*

Por eso, si la inecuación tiene paréntesis o denominadores, primero se hay que quitarlos y después pasar todos los términos a un miembro.

EJERCICIO

Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado por el método que prefieras:

1. $x^2 - 10x + 21 \geq 0$
2. $x^2 - 5x + 4 \geq 0$
3. $2x^2 - 12x + 16 > 0$
4. $x^2 - 3x - 4 < 0$
5. $x^2 + 7 > 0$
6. $x^2 + 6x + 5 \leq 0$
7. $x^2 - 12 \geq x$
8. $6x^2 < 5x + 6$
9. $x^2 - x < 0$
10. $3x^2 + 1 \leq 0$
11. $x^2 - x - 6 > 0$
12. $x^2 + 3x - 4 \leq 0$
13. $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$
14. $x^2 - 6x + 6 \geq 0$
15. $x^2 - 10x + 25 < 0$
16. $x^2 - 18 \leq 0$
17. $x(x+5) > 2x^2$
18. $x^2 < \frac{4}{5}x$
19. $x(1-x) + 2 \geq 3x$
20. $3x(2-x) + 1 \geq (1-x)^2$
21. $3x(x-1) + 2x < 12 - x$
22. $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$
23. $x^2 - 4x - 5 \leq 0$
24. $2x \quad + 9x - 5 > 0$
25. $-x^2 + 4x < 0$
26. $x^2 - 2x + 3 > x + 1$
27. $-x^2 + 3x - 6 < -x - 2$
28. $-x^2 + x - 5 \geq -2x - 3$
29. $(x-1)(x+3) > 0$
30. $x(x-4) < 0$
31. $(x-5)(x+2) \leq 0$
32. $(x+1)(3-x) \leq 0$
33. $\frac{x^2-9}{4} - \frac{(x+2)(x-2)}{15} < \frac{1-2x}{3}$
34. $\frac{x-1}{2} - \frac{1}{3} > x + \frac{3x-x^2}{3}$
35. $-x^2 + 4x > 2x - 3$
36. $x^2 + 5x < 0$
37. $9x^2 - 4 > 0$
38. $x^2 + 6x + 8 \geq 0$
39. $x^2 - 2x - 15 \leq 0$
40. $x^2 - 12 \geq x$
41. $6x^2 < 5x + 6$
42. $x^2 - 9 \leq 0$
43. $x^2 < 4$
44. $3x^2 + 1 \leq 0$
45. $x^2 - 2x + 2 \geq 0$
46. $x(x-2) < 0$
47. $(x-1)^2 > 0$
48. $(x+2)(x-5) > 0$
49. $4x^2 + 48x \leq 0$
50. $(2x-1)^2 - 16 > 0$
51. $x(x+1) < -3$
52. $x^2 - 7x + 10 \geq 0$
53. $(x-5)(x+5) \geq 600$
54. $3 \cdot \frac{x^2-11}{5} - 2 \cdot \frac{x^2-60}{7} \leq 36$

SISTEMAS DE DOS INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son los formados por dos inecuaciones de primer grado con una incógnita. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-2>3(2x+5) \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{3x-1}{2}\geq 6-x \end{array}\right\}$$

La **solución** del sistema es el conjunto de números reales que es a la vez solución de las dos inecuaciones que lo forman. Es decir, la intersección de las soluciones de las inecuaciones.

Para hallar la solución de un sistema, como el del ejemplo:

1. Se resuelve cada inecuación de forma independiente.

Primera inecuación: $4x-2>3(2x+5)$

$$4x-2>6x+15$$

$$4x-6x>15+2$$

$$-2x>17$$

$$2x<-17$$

$$x<\frac{-17}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } \left(-\infty,\frac{-17}{2}\right)$$

Segunda inecuación: $\dfrac{x}{4}-\dfrac{3x-1}{2}\geq 6-x$

$$\frac{x}{4}-\frac{6x-2}{4}\geq\frac{24-4x}{4}$$

$$4\cdot\left[\frac{x}{4}-\frac{6x-2}{4}\geq\frac{24-4x}{4}\right]$$

$$x-(6x-2)\geq 24-4x$$

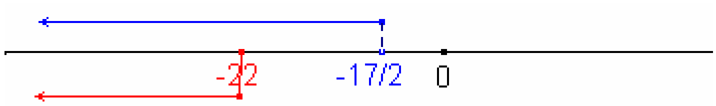
$$x-6x+2\geq 24-4x$$

$$x-6x+4x\geq 24-2$$

$$-x\geq 22$$

$$x\leq -22 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } (-\infty,-22]$$

2. Se halla la intersección de las soluciones obtenidas para cada inecuación. Representando las soluciones en la recta real, se puede ver donde coinciden:



NOTA: Observa que se ha dibujado con línea discontinua el segmento que une el punto $\dfrac{-17}{2}$ con el vector. Con ello se quiere indicar que ese punto no pertenece a la solución de la ecuación. En adelante se seguirá utilizando.

Las soluciones coinciden en el intervalo: $(-\infty,-22]$.

Por tanto **la solución del sistema** es: $\mathbf{(-\infty,-22]}$

CASO PARTICULAR:

Algunas inecuaciones con fracciones algebraicas dan lugar a sistemas de inecuaciones del tipo anterior. En general, si P(x) y Q(x) son polinomios, se puede escribir en la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ y $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$.

Para resolverlos, se tiene en cuenta la regla de los signos de la división y que el denominador de una fracción no puede ser igual a 0. Se obtienen las siguientes situaciones:

<u>CASO 1</u>

$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ y $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Para que el cociente sea positivo, P(x) y Q(x) deben tener el mismo signo, es decir:

$$\left.\begin{matrix} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{matrix}\right\} \text{ o } \left.\begin{matrix} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{matrix}\right\} \text{ cuando la inecuación es } \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

$$\left.\begin{matrix} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{matrix}\right\} \text{ o } \left.\begin{matrix} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{matrix}\right\} \text{ cuando la inecuación es } \frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

<u>CASO 2</u>

$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ y $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$. Para que el cociente sea negativo, P(x) y Q(x) deben tener distinto signo, es decir:

$$\left.\begin{matrix} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{matrix}\right\} \text{ o } \left.\begin{matrix} P(x) \leq 0 \\ Q(x) > 0 \end{matrix}\right\} \text{ cuando la inecuación es } \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

$$\left.\begin{matrix} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{matrix}\right\} \text{ o } \left.\begin{matrix} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{matrix}\right\} \text{ cuando la inecuación es } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1º) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $$\left.\begin{matrix} \frac{4}{3} - (9 - 5x) < \frac{2x+7}{6} \\ 2(3x-4) - 9x \geq 10 - 4x \end{matrix}\right\}$$

Primera inecuación: $\frac{4}{3} - (1 - x) < \frac{2x+7}{6}$

$$\frac{4}{3} - 1 + x < \frac{2x+7}{6}$$

$$\frac{8}{6} - \frac{6}{6} + \frac{6x}{6} < \frac{2x+7}{6}$$

$$8 - 6 + 6x < 2x + 7$$

$$6x - 2x < 7 - 8 + 6$$

$4x < 5$

$x < \dfrac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $\left(-\infty, \dfrac{5}{4}\right)$

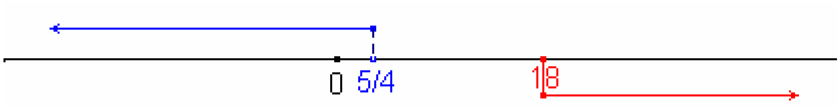
Segunda inecuación: $2(3x-4)-9x \geq 10-4x$

$6x-8-9x \geq 10-4x$

$6x-9x+4x \geq 10+8$

$x \geq 18 \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $[18,+\infty)$

Representando las soluciones en la recta real:



Se observa que las soluciones no tienen elementos comunes.

Por tanto, el sistema **no tiene solución**.

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{5}-\dfrac{3}{4} \leq x-\dfrac{3-2x}{10} \\ 2-(4-9x) < 6+5x \end{array}\right\}$

Primera inecuación: $\dfrac{x+2}{5}-\dfrac{3}{4} \leq x-\dfrac{3-2x}{10}$

$\dfrac{4x+8}{20}-\dfrac{15}{20} \leq \dfrac{20x}{20}-\dfrac{6-4x}{20}$

$4x+8-15 \leq 20x-(6-4x)$

$4x+8-15 \leq 20x-6+4x$

$4x-20x-4x \leq -6-8+15$

$-20x \leq 1$

$20x \geq -1$

$x \geq \dfrac{-1}{20} \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $\left[\dfrac{-1}{20},+\infty\right)$

Segunda inecuación: $2-(4-9x) < 6+5x$

$2-4+9x < 6+5x$

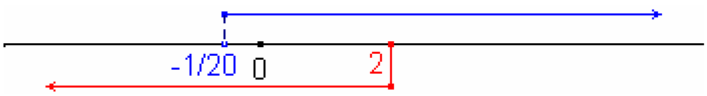
$9x-5x < 6-2+4$

$4x < 8$

$x < \dfrac{8}{4}$

$x < 2 \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $(-\infty,2)$

Representando las soluciones en la recta real:



La intersección de las soluciones es el intervalo: $\left(\frac{-1}{20}, 2\right]$

Por tanto, la **solución del sistema** es: $\left(\mathbf{\frac{-1}{20}, 2}\right]$

c) $\left.\begin{array}{r} 3(1-2x) \geq 7-5x \\ 2x+14 \geq 2-x \end{array}\right\}$

Primera inecuación: $3(1-2x) \geq 7-5x$

$3-6x \geq 7-5x$

$-6x+5x \geq 7-3$

$-x \geq 4$

$x \leq -4 \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $(-\infty, -4]$

Segunda inecuación: $2x+14 \geq 2-x$

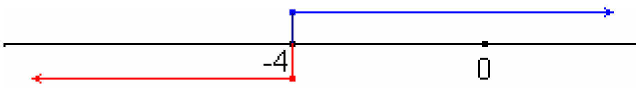
$2x+x \geq 2-14$

$3x \geq -12$

$x \geq \frac{-12}{3}$

$x \geq -4 \quad \Rightarrow \quad$ Solución: $[-4, +\infty)$

Representando las soluciones en la recta real:



La intersección de las soluciones es el punto –4.

Por tanto, la **solución del sistema** es: **–4**.

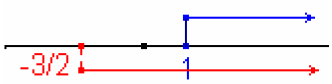
d) $\frac{x-1}{2x+3} \geq 0$

Como la fracción ha se ser positiva o cero, el numerador y el denominador han de tener el mismo signo. Además, el denominador no puede ser igual a 0. Se obtiene que:

$\left.\begin{array}{r} x-1 \geq 0 \\ 2x+3 > 0 \end{array}\right\}$ o $\left.\begin{array}{r} x-1 \leq 0 \\ 2x+3 < 0 \end{array}\right\}$.

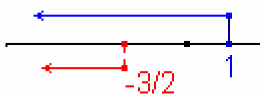
Dos sistemas de inecuaciones que se resuelven:

$\left.\begin{array}{r} x-1 \geq 0 \\ 2x+3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \geq 1 \\ x > \frac{-3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Solución:



$[1, +\infty)$

$\left.\begin{array}{r} x-1 \leq 0 \\ 2x+3 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \leq 1 \\ x < \frac{-3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Solución:



$\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$

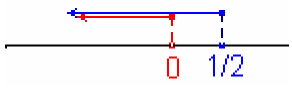
La solución de la inecuación inicial es la unión de las soluciones obtenidas de cada sistema: $\left(\mathbf{-\infty, \frac{-3}{2}}\right) \cup \mathbf{[1, +\infty)}$

e) $\dfrac{3-6x}{x}<0$

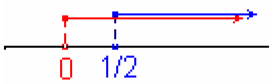
Como la fracción ha se ser negativa, el numerador y el denominador han de tener distinto signo. Se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{r}3-6x>0\\ x<0\end{array}\right\} \text{ o } \left.\begin{array}{r}3-6x<0\\ x>0\end{array}\right\}.$$

Dos sistemas de inecuaciones que se resuelven:

$\left.\begin{array}{r}3-6x>0\\ x<0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x<\dfrac{1}{2}\\ x<0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Su solución es: 

$(-\infty,0)$

$\left.\begin{array}{r}3-6x<0\\ x>0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x>\dfrac{1}{2}\\ x>0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Su solución es: 

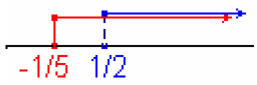
$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

La solución de la inecuación planteada es: $\mathbf{(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)}$

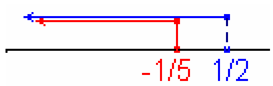
f) $\dfrac{4+x}{1-2x}\leq 2$

En este caso, hay que conseguir primero que uno de los dos miembros de la inecuación sean cero: $\dfrac{4+x}{1-2x}-2\leq 0$. Y después, que el otro miembro esté formado por una única fracción: $\dfrac{4+x}{1-2x}-\dfrac{2(1-2x)}{1-2x}\leq 0 \Rightarrow \dfrac{4+x-2+4x}{1-2x}\leq 0 \Rightarrow \dfrac{5x+2}{1-2x}\leq 0$.

Esta última inecuación se resuelve como las dos anteriores:

$\left.\begin{array}{r}5x+1\geq 0\\ 1-2x<0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x\geq -\dfrac{1}{5}\\ x>\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Su solución es: 

$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

$\left.\begin{array}{r}5x+1\leq 0\\ 1-2x>0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x\leq -\dfrac{1}{5}\\ x<\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Su solución es: 

$\left(-\infty,-\dfrac{1}{5}\right]$

La solución de la inecuación inicial es la unión de los dos intervalos: $\mathbf{\left(-\infty,-\dfrac{1}{5}\right]\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)}$

EJERCICIO

Resuelve los siguientes sistemas de dos inecuaciones lineales con una incógnita:

1. $\left.\begin{array}{r}3x+2\leq 10\\ x-5>1\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r}2x-5\geq 6\\ 3x+1\leq 15\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} 4x-3<1 \\ x+6>2 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r} 3x-2>-7 \\ 5-x<1 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{c} 5-x<-12 \\ 10-2x<3x-3 \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{r} 2x-3>0 \\ 5x+1<0 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{c} 2x-4<1+5x-3 \\ 4+x\leq -x \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{c} 4(x+1)-(2-x)>1+3x-6 \\ 10- \end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l} 2(x+1)-7<9x \\ \quad 3+5x>4(x-2)+3x \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{r} 2-5x+4(1-x)\geq 6-2x \\ 7x+2-(1+x)>3x+9 \end{array}\right\}$

11. $\dfrac{2}{x-3}>0$

12. $\dfrac{x-3}{x+2}<0$

13. $\dfrac{x}{x+1}\leq 0$

14. $\dfrac{x-1}{x+2}\geq 0$

15. $\dfrac{2x-1}{x+2}\geq 1$

16. $\dfrac{2-x}{x+3}<2$

17. $\dfrac{2-x}{x+1}\geq 3$

18. $\dfrac{1-2x}{2-x}>-5$

19. $\dfrac{4+6x}{1-x}-2<1$

20. $\dfrac{3+x}{2-6x}\leq 0$

21. $\dfrac{2-4x}{x}<1$

22. $4+\dfrac{x}{x-2}>0$

23. $\frac{2x+4}{3x-1}-6>0$

24. $\frac{1+5x}{x-2}\le -4$

25. $\frac{3x+1}{3x-1}\ge 2$

26. $\frac{2-x}{1+4x}\ge 1$

27. $\frac{x^2}{x+4}<0$

28. $\frac{3x+5}{x^2+1}\ge 0$

29. $\left.\begin{array}{r}\frac{3x+2}{5}-\frac{x-1}{2}\ge 1-x \\ x+2-3(1-2x)>6(x+1)-2x\end{array}\right\}$

30. $\left.\begin{array}{r}x+3-(2-4x)+1\ge 0 \\ 2(x-5)\ge x+6\end{array}\right\}$

31. $\left.\begin{array}{r}2(x-1)+3(x-4)<0 \\ 1-(6-x)>x+2\end{array}\right\}$

32. $\left.\begin{array}{r}3x+1-2(x+5)\ge 4 \\ \frac{2x+1}{5}-\frac{3-x}{10}>2\end{array}\right\}$

33. $\left.\begin{array}{r}4(x+1)+2(x+2)\le 6 \\ 2x+5-\frac{x}{4}+1\le 3+x\end{array}\right\}$

34. $\left.\begin{array}{r}\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{4}<1 \\ 3(x-2)+4(x+3)>0\end{array}\right\}$

35. $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{5}-\frac{2x}{4}<1-\frac{x}{2} \\ \frac{2x-3}{6}\le 3-x\end{array}\right\}$

36. $\left.\begin{array}{l}x+9-(2-x)\le 3-\frac{x}{2} \\ 4+\frac{x-1}{2}<0\end{array}\right\}$

37. $\left.\begin{array}{r}4+x-1\le 3-(1+2x) \\ 5-2(1-4x)>6-5(2x+1)\end{array}\right\}$

38. $\left.\begin{array}{r}\frac{x+6}{3}-\frac{x-1}{9}<2-x \\ \frac{6+2x}{4}<\frac{3x+1}{8}\end{array}\right\}$

39. $$\left.\begin{array}{r} \dfrac{8x+9}{6}-\dfrac{3x}{2}\le 1-x \\ 2\cdot(1-5x)+9x-6<0 \end{array}\right\}$$

40. $$\left.\begin{array}{l} 2x+\dfrac{7-x}{5}>1-\dfrac{3x-2}{3} \\ 9-(x-2)<\dfrac{1+x}{4}-\dfrac{x}{2} \end{array}\right\}$$

41. $$\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+1}{8}-\dfrac{x-2}{4}\ge 0 \\ \dfrac{3+x}{10}-\dfrac{1}{5}\ge\dfrac{x-2}{2} \end{array}\right\}$$

42. $$\left.\begin{array}{r} 6(1-x)+2(x-5)\le 9+x-(1+3x) \\ 2-(x+4)\ge 5(2-x)+6x+4 \end{array}\right\}$$

43. $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}>\dfrac{x+4}{6} \\ \dfrac{5-3x}{2}<1-\dfrac{x-7}{8} \end{array}\right\}$$

44. $$\left.\begin{array}{l} 7-\dfrac{x+1}{4}\le-\dfrac{1+2x}{6} \\ 3(10-2x)<7x-5(3x-3) \end{array}\right\}$$

45. $$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x-2}{9}-\dfrac{5x+1}{3}\ge 0 \\ \dfrac{6-2(3-x)}{8}<1+x-\dfrac{x+1}{2} \end{array}\right\}$$

46. $$\left.\begin{array}{r} 5x-\dfrac{1-x}{3}\le\dfrac{x+4}{6}-(2-x) \\ \dfrac{1}{2}(x-6)+\dfrac{1}{3}(2+x)>3+\dfrac{4x-2}{6} \end{array}\right\}$$

47. $$\left.\begin{array}{r} 2(3x-5)-x+9\ge x-\dfrac{x-2}{2} \\ 2+4x-6>5x-4(3+x) \end{array}\right\}$$

48. $$\left.\begin{array}{r} \dfrac{7-x}{2}-\dfrac{3+2x}{4}<\dfrac{5}{6}-\dfrac{x-3}{8} \\ \dfrac{2x-3(5+x)}{30}<\dfrac{8+6x}{15} \end{array}\right\}$$

49. $$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3}{4}(1-x)+\dfrac{2}{5}(x+3)>\dfrac{3x}{10}-\dfrac{x+1}{2} \\ \dfrac{2}{7}x-\dfrac{3}{2}(x+4)>\dfrac{5-x}{14}+\dfrac{x}{7} \end{array}\right\}$$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

La forma general de una inecuación de primer grado con dos incógnitas es:

$$ax + by > c$$

$$ax + by \geq c$$

$$ax + by > c$$

$$ax + by \leq c$$

siendo a, b y c números reales cualesquiera.

La solución de una inecuación de este tipo es un semiplano delimitado por la recta ax + by = c.

Para resolverlas se realizan los siguientes pasos:

1. Se representa la recta ax + by = c
2. Se elige un punto de uno de los dos semiplanos que determina esa recta y se sustituye en la inecuación que hay que resolver.
3. Si el punto verifica la desigualdad, entonces el semiplano que lo contiene es la solución y si no la verifica el semiplano solución es el que no contiene al punto.
4. Si en la inecuación aparece una desigualdad estricta, la recta no es solución de esa inecuación. En caso contrario, sí lo es.

NOTA: *La solución de estas inecuaciones se expresa gráficamente.*

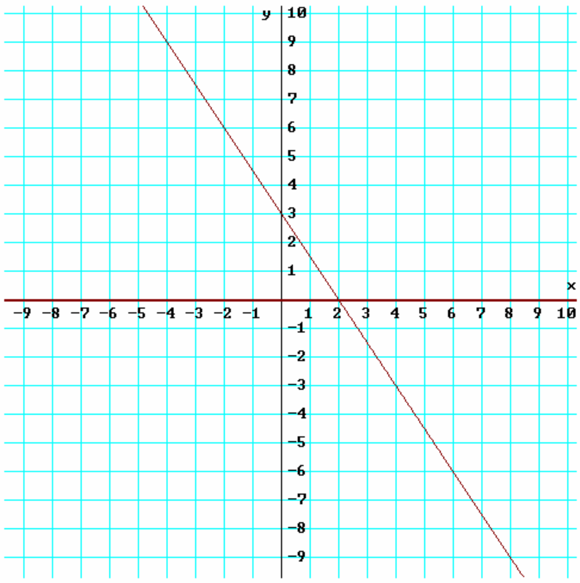
EJERCICIOS RESUELTOS

1º) $3x + 2y < 6$

1. Se representa la recta $3x + 2y = 6$.

   Para ello se hace una tabla de valores (con dos valores es suficiente).

x	0	2
y	3	0



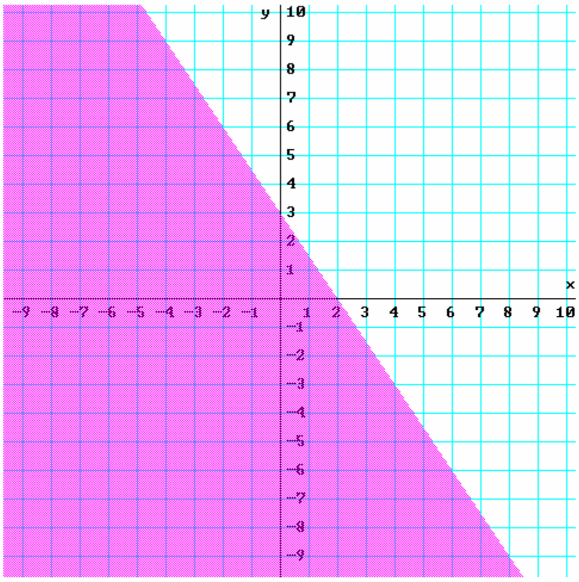
2. Se elige un punto de uno de los dos semiplanos que determina la recta y se sustituye en la inecuación a resolver. Como el más sencillo es (0,0) que está en el semiplano inferior será ese el elegido.

   $3x + 2y < 6 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 < 6 \quad \Rightarrow 0 < 6$

3. Como la desigualdad obtenida, 0 < 6, es cierta, la solución de la inecuación es el semiplano inferior.

   Y como además, la desigualdad es estricta, los puntos de la recta no pertenecen a la solución.

   Por tanto la solución es:

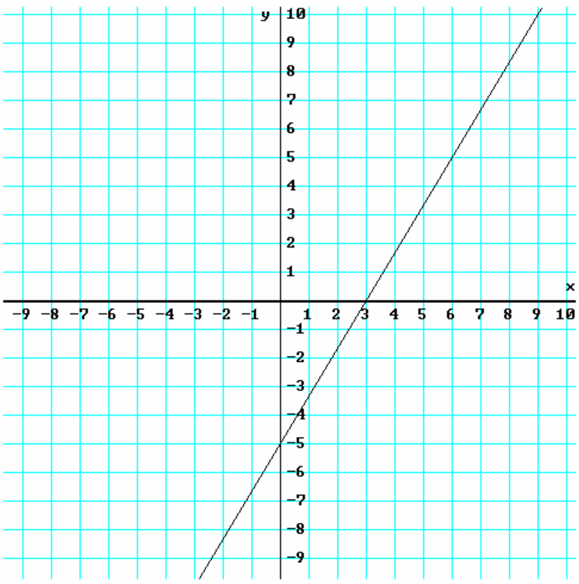


2º) $5x - 3y \geq 15$

1. Se representa la recta $5x - 3y = 15$.

   Para ello se hace una tabla de valores (con dos valores es suficiente).

x	0	3
y	–5	0



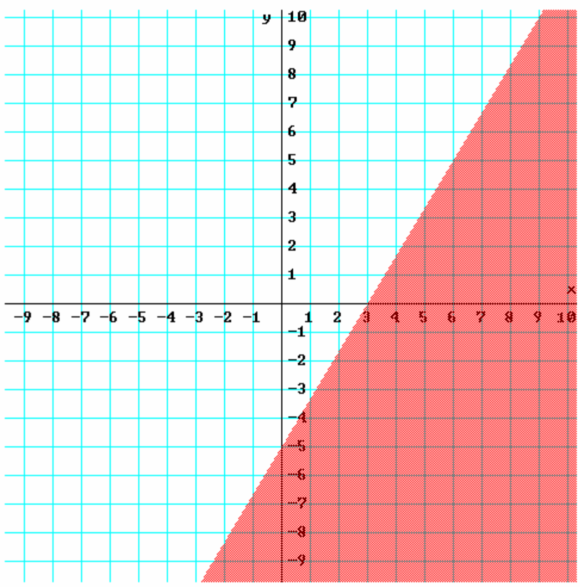
2. Se elige un punto de uno de los dos semiplanos que determina la recta y se sustituye en la inecuación a resolver. Como el más sencillo es (0,0) que está en el semiplano derecho será ese el elegido.

   $5x - 3y \geq 15 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \geq 15 \quad \Rightarrow 0 \geq 15$

3. Como la desigualdad obtenida, $0 \geq 15$, es falsa, la solución de la inecuación es el semiplano de la izquierda.

Y como además, la desigualdad no es estricta, los puntos de la recta también son solución.

Por tanto la solución es:

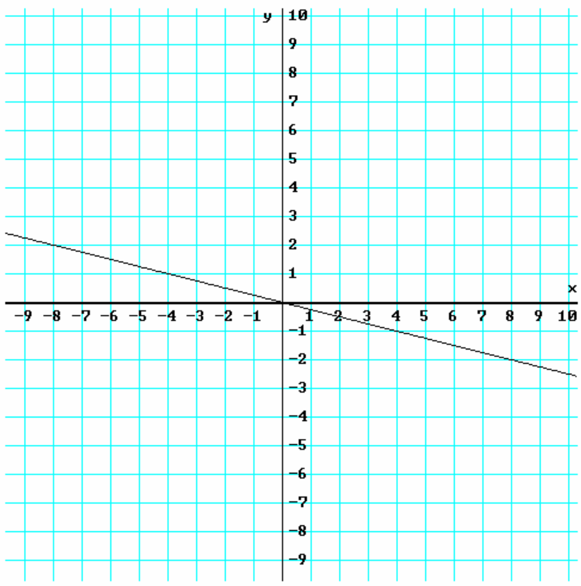


3º) $x + 4y \leq 0$

1. Se representa la recta $x + 4y = 0$.

   Para ello se hace una tabla de valores (con dos valores es suficiente).

x	0	1
y	0	−4



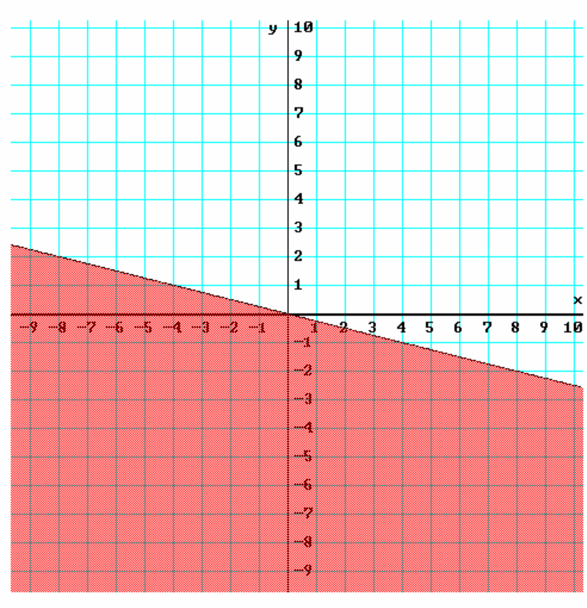
2. Se elige un punto de uno de los dos semiplanos que determina la recta y se sustituye en la inecuación a resolver. Como (0,0) está en la recta, hay que elegir otro punto. Por ejemplo, (2,3) que está en el semiplano de la derecha.

   $x + 4y \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + 4 \cdot 3 \leq 0 \quad \Rightarrow 14 \leq 0$

3. Como la desigualdad obtenida, $14 \leq 0$, no es cierta, la solución de la inecuación es el semiplano en el que no se encuentra ese punto, el de la izquierda.

   Los puntos de la recta son solución de la inecuación porque la desigualdad no es estricta

   Por tanto la solución es:

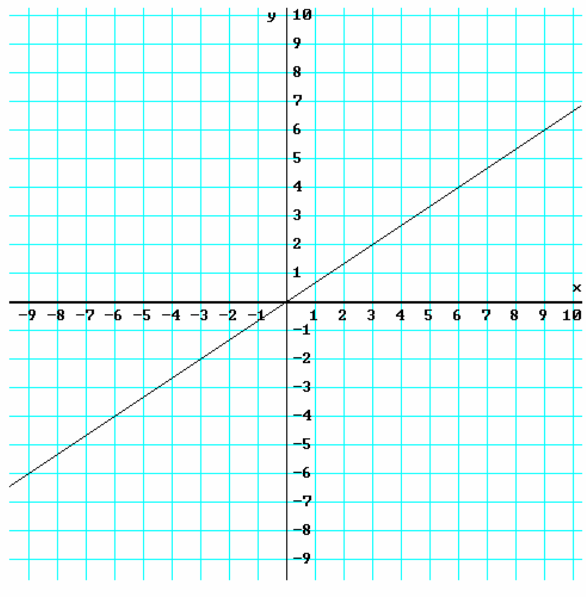


4º) $-2x + 3y > 0$

1. Se representa la recta $-2x + 3y = 0$.

   Para ello se hace una tabla de valores (con dos valores es suficiente).

x	0	3
y	0	2



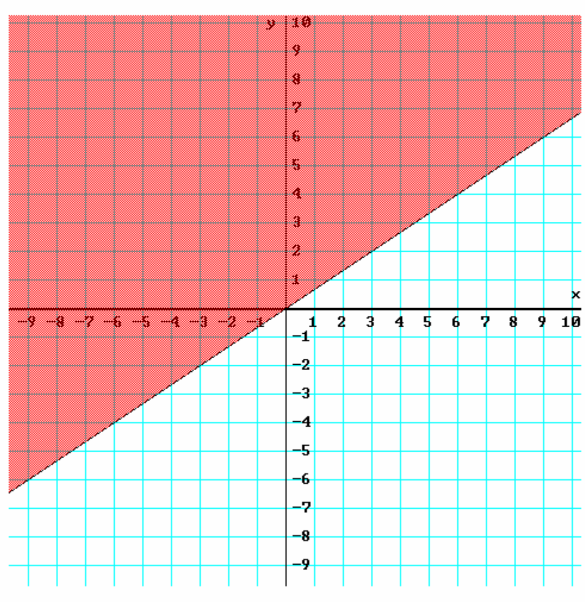
2. Se elige un punto de uno de los dos semiplanos que determina la recta y se sustituye en la inecuación a resolver. Como (0,0) está en la recta, hay que elegir otro punto. Por ejemplo, (−2,0) que está en el semiplano superior.

   $-2x + 3y > 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 > 0 \quad \Rightarrow \quad -4 > 0$

   Como la desigualdad obtenida, $-4 > 0$, es cierta, la solución de la inecuación es el semiplano en el que contiene ese punto.

   Los puntos de la recta no son solución de la inecuación porque la desigualdad es estricta.

   Por tanto la solución es:



EJERCICIO

Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

1. $x - 2y < 5$
2. $x - 2y \leq 5$
3. $3x + 2y + 5 \leq 0$
4. $x > y$
5. $x \leq y$
6. $x + y \geq 0$
7. $5x - 4y \leq 8$
8. $x - 2y > 0$
9. $5x + 6y \leq 4$
10. $4x - 3y > -1$
11. $3x + 9y \geq 0$
12. $5 - x + y > 1$
13. $2x \leq 3y - 7$
14. $-x + y \geq -2$
15. $3x + 6y - 8 < 0$
16. $3x + 8y - 4 \geq 0$
17. $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} > -1$
18. $3x + 2y - 9 > 0$
19. $6x + y + 4 < -2$
20. $5y \geq 10$
21. $3x < -12$

22. $x \geq 0$

23. $y \leq x + 1$

24. $x \geq y - 4$

25. $3x - y \geq 0$

26. $y < 0$

27. $-6x + 2y \geq 3$

28. $\frac{x}{9} - \frac{2y}{12} > -2$

29. $x - 1 + y + 5 \geq 7$

30. $7x < 5y - 4$

31. $2x \geq -12$

32. $6y \leq 15$

33. $3x - 2y + 1 > 0$

34. $5x - 2y + 9 < -2$

35. $x + 1 \geq -3$

36. $-3y + 6 \leq -9$

37. $y > 5x$

38. $x \leq -y + 2$

39. $y + 9 \geq 2x$

40. $5y - 4x \geq -3$