

Combinatoria

Conceptos de combinatoria

En todo problema combinatorio hay varios conceptos claves que debemos distinguir:

1. Población

Es el conjunto de elementos que estamos estudiando. Denominaremos con **m** al número de elementos de este conjunto.

2. Muestra

Es un subconjunto de la población. Denominaremos con **n** al número de elementos que componen la muestra.

Los diferentes tipos de muestra vienen determinados por dos aspectos:

Orden

Es decir, si es importante que los elementos de la muestra aparezcan ordenados o no.

Repetición

La posibilidad de repetición o no de los elementos.

Factorial de un número natural

Es el producto de los “n” factores consecutivos desde “n” hasta 1. El **factorial de un número** se denota por **n!**.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

Ejemplo

Calcular factorial de 5.

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Variaciones

Se llama **variaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n ($n \geq m$)** a los distintos grupos formados por n elementos de forma que:

No entran todos los elementos.

Sí importa el orden.

No se repiten los elementos.

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)$$

También podemos calcular las **variaciones** mediante **factoriales**:

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Las **variaciones** se denotan por V_m^n o $V_{m,n}$

Ejemplos

1. Calcular las **variaciones** de 6 elementos tomados de tres en tres.

$$V_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

$$V_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

2. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 ?

$$m = 5, n = 3, m \geq n$$

No entran todos los elementos. De 5 dígitos entran sólo 3.

Sí importa el orden. Son números distintos el 123, 231, 321.

No se repiten los elementos. El enunciado nos pide que las cifras sean diferentes.

$$V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

3. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 ?

$$m = 6, n = 3, m \geq n$$

Tenemos que separar el número en dos bloques:

— — —

El primer bloque, de un número, lo puede ocupar sólo uno de 5 dígitos porque un número no comienza por cero (excepto los de las matriculas, los de la lotería y otros casos particulares),

$$m = 5 \quad n = 1$$

El segundo bloque, de dos números, lo puede ocupar cualquier dígito.

$$m = 6 \quad n = 2$$

$$V_5^1 \cdot V_5^2 = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$$

4. A un concurso literario se han presentado 10 candidatos con sus novelas. El cuadro de honor lo forman el ganador, el finalista y un accésit. ¿Cuántos cuadros de honor se pueden formar?

$$m = 10 \quad n = 3$$

No entran todos los elementos. De 10 candidatos entran sólo 3.

Sí importa el orden. No es lo mismo quedar ganador que finalista.

No se repiten los elementos. Suponemos que cada candidato presenta una sola obra.

$$V_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Variaciones con repetición

Se llaman **variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n** a los distintos grupos formados por n elementos de manera que:

No entran todos los elementos si $m > n$. **Sí** pueden entrar todos los elementos si $m \leq n$

Sí importa el orden.

Sí se repiten los elementos.

$$VR_m^n = m^n$$

Ejemplos

1. ¿Cuántos números de tres cifras se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 ?

$$m = 5 \quad n = 3$$

No entran todos los elementos. De 5 dígitos entran sólo 3.

Sí importa el orden. Son números distintos el 123, 231, 321.

Sí se repiten los elementos. El enunciado nos pide que las cifras sean diferentes.

$$VR_5^3 = 5^3$$

2. ¿Cuántos números de tres cifras se puede formar con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 ?

$$m = 6 \quad n = 3$$

Tenemos que separar el número en dos bloques:

— — —

El primer bloque, de un número, lo puede ocupar sólo uno de 5 dígitos porque un número no comienza por cero (excepto los de las matriculas, los de la lotería y otros casos particulares),

$$m = 5 \quad n = 1$$

El segundo bloque, de dos números, lo puede ocupar cualquier dígito.

$$m = 6 \quad n = 2$$

$$V_5^1 \cdot VR_6^2 = 5 \cdot 6^2 = 180$$

3. ¿Cuántas quinielas de una columna han de rellenarse para asegurarse el acierto de los 15 resultados?

$$m = 3 \quad n = 15 \quad m < n$$

Sí entran todos los elementos. En este caso el número de orden es mayor que el número de elementos.

Sí importa el orden.

Sí se repiten los elementos.

$$V_3^{15} = 3^{15} = 14348907$$

Permutaciones

Se llama **permutaciones de m elementos (m = n)** a las diferentes agrupaciones de esos m elementos de forma que:

Sí entran todos los elementos.

Sí importa el orden.

No se repiten los elementos.

$$P_n = n!$$

Ejemplos

1. Calcular las permutaciones de 6 elementos.

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{720}$$

2. ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5.

$$m = 5 \quad n = 5$$

Sí entran todos los elementos. De 5 dígitos entran sólo 3.

Sí importa el orden. Son números distintos el 123, 231, 321.

No se repiten los elementos. El enunciado nos pide que las cifras sean diferentes.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}$$

3. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?

Sí entran todos los elementos. Tienen que sentarse las 8 personas.

Sí importa el orden.

No se repiten los elementos. Una persona no se puede repetir.

Permutaciones circulares

$$P_8 = 8! = \mathbf{40320}$$

Es un caso particular de las **permutaciones**.

Se utilizan cuando los elementos se han de ordenar "en círculo", (por ejemplo, los comensales en una mesa), de modo que el primer elemento que "se sitúe" en la muestra determina el principio y el final de muestra.

$$PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$$

Ejemplos

1. Calcular las **permutaciones circulares** de 7 elementos.

$$PC_7 = (7-1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{720}$$

2. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?

$$PC_8 = P_{8-1} = (8 - 1)! = 7! = 5040$$

Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición de **m** elementos donde el **primer elemento** se repite **a** veces , el **segundo b** veces , el **tercero c** veces, ...(**m = a + b + c + ... = n**) son los distintos grupos que pueden formarse con esos m elementos de forma que :

Sí entran todos los elementos.

Sí importa el orden.

Sí se repiten los elementos.

$$PR_n^{a,b,c,\dots} = \frac{P_n}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots}$$

Ejemplos

Calcular las **permutaciones con repetición** de: $PR_{12}^{6,4,2}$.

$$\begin{aligned} PR_{12}^{6,4,2} &= \frac{12!}{6! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \\ &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7 = 13860 \end{aligned}$$

2. Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?

$$m = 9 \quad a = 3 \quad b = 4 \quad c = 2 \quad a + b + c = 9$$

Sí entran todos los elementos.

Sí importa el orden.

Sí se repiten los elementos.

$$PR_9^{3,4,2} = \frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = 1260$$

3. En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?

Sí entran todos los elementos.

Sí importa el orden.

Sí se repiten los elementos.

$$PR_9^{3,2,4} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 1260$$

Combinaciones

Se llama **combinaciones de m elementos tomados de n en n** ($m \geq n$) a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que:

No entran todos los elementos.

No importa el orden.

No se repiten los elementos.

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n}$$

También podemos calcular las **combinaciones** mediante **factoriales**:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Las **combinaciones** se denotan por C_m^n o $C_{m,n}$

Ejemplos

1. Calcular el número de combinaciones de 10 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{6!}} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

2. En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

No entran todos los elementos.

No importa el orden: Juan, Ana.

No se repiten los elementos.

$$C_{35}^3 = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6545$$

Combinaciones con repetición

Las **combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n** (CR_m^n), son los distintos grupos formados por n elementos de manera que:

No entran todos los elementos.

No importa el orden.

Sí se repiten los elementos.

$$\text{CR}_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

Ejemplo

En una bodega hay en un cinco tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?

No entran todos los elementos. Sólo elije 4..

No importa el orden. Da igual que elija 2 botellas de anís y 2 de ron, que 2 de ron y 2 de anís.

Sí se repiten los elementos. Puede elegir más de una botella del mismo tipo.

$$\text{CR}_5^4 = \frac{(5+4-1)}{4!(5-1)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

Números combinatorios

El número C_m^n se llama también **número combinatorio**. Se representa por $\binom{m}{n}$ y se lee "m sobre n".

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Ejemplo

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2} = 35$$

Propiedades de los números combinatorios

1. $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

2. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

Los números de este tipo se llaman **complementarios**.

3. $\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$

$$\binom{11}{4} + \binom{11}{5} = \binom{12}{5}$$

Ejemplo

Hallar el número de combinaciones de 75 elementos de orden 72.

$$\binom{75}{72} = \binom{75}{75-72} = \binom{75}{3} = \frac{75 \cdot 74 \cdot 73}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 67525$$

Triángulo de Pascal o de Tartaglia

El **triángulo de números combinatorios de Tartaglia o de Pascal** (debido a que fue este matemático quien lo popularizó) es un triángulo de números enteros, infinito y simétrico, del que podemos ver sus primeras líneas:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \binom{0}{0} \\ & & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ & & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ & & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ & & & & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ & & & & & & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \end{array}$$

Propiedades del Triángulo de Pascal o de Tartaglia

1. La primera fila corresponde a los números combinatorios de 1, el número superior es un 1, la segunda de 2, la tercera de 3 y así sucesivamente.

2. Todas las filas empiezan y acaban en 1.

$$\binom{m}{0} = 1 \qquad \binom{m}{m} = 1$$

3. Todas las filas son simétricas.

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

4. Cada número se obtiene sumando los dos que están situados sobre él.

Aplicando estas propiedades podemos escribir el **triángulo de Pascal**:

Ejemplos del binomio de Newton

1. $(x + 2y)^5 =$

$$= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 2y + \binom{5}{2}x^3 \cdot (2y)^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot (2y)^3 + \binom{5}{4}x \cdot (2y)^4 + \binom{5}{5} \cdot (2y)^5 =$$
$$= x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$$

2. $(2 - 3y)^4 =$

$$= \binom{4}{0}2^4 - \binom{4}{1}2^3 \cdot 3y + \binom{4}{2}2^2 \cdot (3y)^2 - \binom{4}{3}2 \cdot (3y)^3 + \binom{4}{4}(3y)^4 =$$
$$= 16 - 96y + 216y^2 - 216y^3 + 81y^4$$

Cálculo del término que ocupa el lugar k

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} \quad \text{para } (a+b)^n$$

$$T_k = (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} \quad \text{para } (a-b)^n$$

Ejemplos

1. El término quinto del desarrollo de $(x + 2y)^5$ es:

$$T_5 = \binom{5}{4} x \cdot (2y)^4 = 80xy^4$$

2. El término cuarto del desarrollo de $(2 - 3y)^4$ es:

$$T_4 = (-1)^3 \binom{4}{3} 2 \cdot (3y)^3 = -216y^3$$

3. Hallar el término octavo del desarrollo de $(x^2 - 3y^3)^{10}$

$$T_8 = (-1)^7 \binom{10}{7} (x^2)^3 (3y^3)^7 = -262\,440x^6y^{21}$$