

Tema 2 (II). Logaritmos**Resumen**

El logaritmo de un número x , en una base a , es otro número b al que hay que elevar la base para que dé x . Con símbolos matemáticos se define como sigue:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x; \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1; \quad x > 0.$$

• $\log_a x$ se lee *logaritmo en base a de x* , y significa que al número x se le asocia otro b que cumple de que $a^b = x$. Se trata, pues, de una transformación relacionada con la potenciación de base a , en la que a cada número x se le asocia el exponente b preciso para que $a^b = x$.

Ejemplos:

a) Si $x = 1000$ y $a = 10$, el valor de b debe ser 3, ya que $10^3 = 1000$. En este caso escribiríamos $\log_{10} 1000 = 3$.

b) Aplicando la definición puede verse que:

$$\log_2 16 = 4, \text{ pues } 2^4 = 16$$

$$\log_5 125 = 3, \text{ pues } 5^3 = 125$$

$$\log_{10} 100 = 2, \text{ pues } 10^2 = 100$$

$$\log 1 = 0, \text{ pues } 10^0 = 1$$

$$\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$$

$$\log 10^n = n, \text{ para todo } n$$

• Las bases usuales son $a = 10$ y $a = e$, el número de Euler: $e \approx 2,718281\dots$ Los logaritmos en base 10 se llaman decimales; los de base e se llaman naturales o neperianos. Ambos se pueden hallar con la ayuda de una calculadora, con las teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$, respectivamente. Así, por ejemplo: $\log_{10} 2500 = \log 2500 = 3,397940$, y $\log_e 325 = \ln 325 = 5,783825$.

ACLARACIONES:

1) Los logaritmos se inventaron (a principios del siglo XVII) para simplificar los cálculos matemáticos de multiplicación, división, potenciación y radicación, sobre todo cuando los resultados son números muy grandes y básicamente lo que importa es su orden de magnitud.

2) En base 10, el logaritmo de las sucesivas potencias de 10 es el exponente respectivo. Esto es:

$$\log 1 = \log 10^0 = 0; \quad \log 10 = \log 10^1 = 1; \quad \log 100 = \log 10^2 = 2;$$

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3; \quad \log 10000 = \log 10^4 = 4; \quad \text{y, en general, } \log 10^n = n.$$

3) En base 10, cuando un número multiplica su valor por 10, su logaritmo aumenta en una unidad. (Por ejemplo: $\log 8,3 = 0,919078$; $\log 83 = 1,919078$; $\log 830 = 2,919078$; y así sucesivamente.) Y al revés, cuando el valor del logaritmo de dos números se diferencia en una unidad, uno de ellos es diez veces mayor que el otro.

4) En base 10, el valor del logaritmo de cualquier número comprendido entre 10^p y 10^{p+1} es un número comprendido entre p y $p + 1$. Así, por ejemplo, si $\log A = 6,2$, el valor de A está entre 10^6 y 10^7 ; luego el orden de magnitud de A es 6. Análogamente, si $\log B = 12,48$, el número B es de orden de magnitud 12. Y si $\log C = -4,3$, el número C es de orden de magnitud -5 .

5) El logaritmo de los números reales menores o iguales que 0 no está definido. Esto es, $\log(-1000)$ carece de sentido. En estos casos, la calculadora da un mensaje de error.

6) Antilogaritmo: Es la transformación inversa del logaritmo. Esto es, si logaritmo de $A = b$, entonces antilogaritmo de $b = A$. ($\log A = b \Leftrightarrow \text{antilog } b = A$)

En algunas las calculadoras se indica \log^{-1} o \ln^{-1} y se halla pulsando sucesivamente las teclas SHIFT y \log o SHIFT \ln , respectivamente.

Ejemplos: a) antilog 3 = 1000;

b) antilog 2,5 = 316,227766.

Operaciones con los logaritmos

Cuando haya que realizar operaciones con logaritmos o calcular el logaritmo de expresiones en las que los números estén sujetos a cualquiera de las operaciones habituales, pueden utilizarse las propiedades que se indican a continuación, en donde A , B y n son números o expresiones algebraicas.

$$1. \log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$$

El logaritmo transforma productos en sumas, lo que conduce a una simplificación de los cálculos. Y al revés, la suma de dos logaritmos puede escribirse como el logaritmo de un producto.

Ejemplos:

$$a) \log 50 + \log 20 = \log (50 \cdot 20) = \log 1000 = 3.$$

$$b) \log(25 \cdot 300) = \log 25 + \log 300 = 3,875061$$

$$c) \log 5000 = \log (1000 \cdot 5) = \log 1000 + \log 5 = 3 + \log 5$$

$$2. \log_a A^n = n \log_a A$$

El logaritmo transforma potencias en productos.

Ejemplos:

$$a) \log 5^7 = 7 \cdot \log 5 = 7 \cdot 0,69897 = 4,89279.$$

$$b) \log 0,001 = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3 \cdot 1 = -3$$

$$3. \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

El logaritmo transforma cocientes en restas; y al revés, la resta de dos logaritmos puede escribirse como el logaritmo de un cociente.

Ejemplos:

$$a) \log \frac{5}{200} = \log 5 - \log 200 = 0,698970 - 2,301030 = -1,602060$$

$$b) \log 2000 - \log 8 = \log \frac{2000}{8} = \log 250 = \log(5^2 \cdot 10) = \log 5^2 + \log 10 = 2 \cdot \log 5 + 1$$

$$c) \log 0,0005 = \log \frac{5}{10000} = \log 5 - \log 10000 = \log 5 - 4$$

$$4. \log_a 1 = 0; \log_a a = 1; \log_a a^n = n$$

Ejemplos:

$$a) \log_{10} 10 = 1; \log_{10} 1 = 0; \log_{10} 10^5 = 5; \log_{10} 10^{-5} = -5.$$

$$b) \log_8 8 = 1; \log_8 1 = 0; \log_8 8^3 = 3$$