

PÁGINA 36

PRACTICA

Números reales

1 ■■■ a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros?

$$-2; 1,7; \sqrt{3}; 4,\widehat{2}; -3,\widehat{75}; 3\pi; -2\sqrt{5}$$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son racionales?

a) No pueden expresarse como cociente: $\sqrt{3}$; 3π y $-2\sqrt{5}$.

$$b) -2 = \frac{-4}{2}; 1,7 = \frac{17}{10}; 4,\widehat{2} = \frac{42-4}{9} = \frac{38}{9}; -3,\widehat{75} = -\frac{375-37}{90} = -\frac{338}{90} = -\frac{169}{45}$$

c) Son racionales: -2 ; $1,7$; $4,\widehat{2}$ y $-3,\widehat{75}$.

2 ■■■ a) Clasifica en racionales o irracionales los siguientes números:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}; 0,8\widehat{7}; -\sqrt{4}; -\frac{7}{3}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 2\pi$$

b) Ordénalos de menor a mayor.

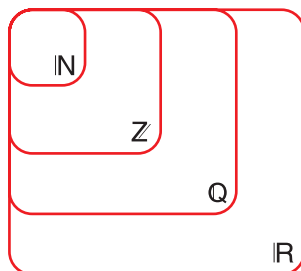
c) ¿Cuáles son números reales?

a) Racionales: $0,8\widehat{7}$; $-\sqrt{4}$; $-\frac{7}{3}$ Irracionales: $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2π

$$b) -\frac{7}{3} < -\sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0,8\widehat{7} < 2\pi$$

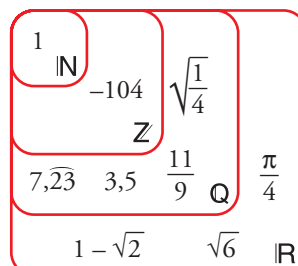
c) Todos son números reales.

3 ■■■ Sitúa los siguientes números en el diagrama adjunto:



$$1; 7,\widehat{23}; 1 - \sqrt{2}; 3,5$$

$$\frac{11}{9}; \sqrt{\frac{1}{4}}; \sqrt{6}; \frac{\pi}{4}; -104$$



1 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 4** ■■■ Indica a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} pertenece cada uno de los siguientes números:

$$-\frac{5}{4}; -3; \frac{13}{6}; \sqrt{5}; \sqrt{16}; 152; \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbb{N}: \sqrt{16}; 152$$

$$\mathbb{Z}: \sqrt{16}, 152, -3$$

$$\mathbb{Q}: \sqrt{16}; 152; -3; -\frac{5}{4}; \frac{13}{6}$$

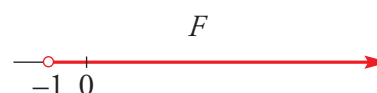
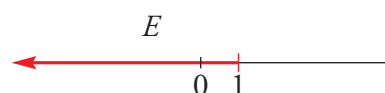
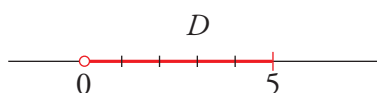
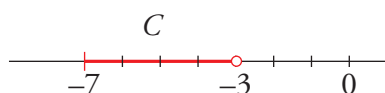
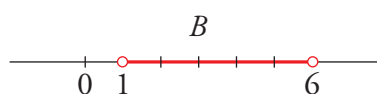
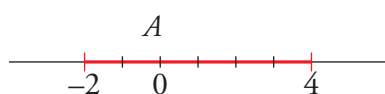
$$\mathbb{R}: -\frac{5}{4}; -3; \frac{13}{6}; \sqrt{5}; \sqrt{16}; 152 \text{ y } \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Intervalos y semirrectas

- 5** ■■■ Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos y semirrectas:

$$A = [-2, 4] \quad B = (1, 6) \quad C = [-7, -3]$$

$$D = (0, 5] \quad E = (-\infty, 1] \quad F = (-1, +\infty)$$



- 6** ■■■ Escribe en forma de intervalo o semirrecta y representa en la recta real los números que cumplen la desigualdad indicada en cada caso:

a) $-3 \leq x \leq 2$

b) $-1 < x < 5$

c) $0 < x \leq 7$

d) $x > -5$

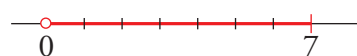
a) $[-3, 2]$



b) $(-1, 5)$



c) $(0, 7]$

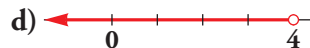
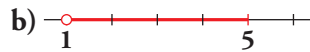
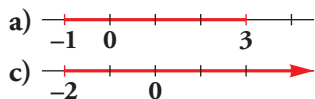


d) $(-5, +\infty)$



1 Soluciones a los ejercicios y problemas

7 ■■■ Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados.



a) $[-1, 3]$
 $-1 \leq x \leq 3$

b) $(1, 5]$
 $1 < x \leq 5$

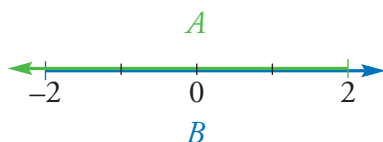
c) $[-2, +\infty)$
 $x \geq -2$

d) $(-\infty, 4)$
 $x < 4$

8 ■■■ Representa en una misma recta las semirrectas:

$$A = (-\infty, 2] \text{ y } B = [-2, +\infty)$$

¿Cuáles son los números que pertenecen a A y a B ($A \cap B$)? Exprésalo como un intervalo.



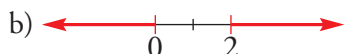
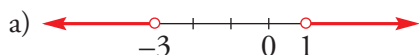
$$A \cap B = [-2, 2]$$

9 ■■■ Resuelto en el libro de texto.

10 ■■■ Representa en la recta real:

a) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

b) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$



Números aproximados. Notación científica

11 ■■■ Da una cota del error absoluto y una cota del error relativo de cada una de las aproximaciones siguientes sobre los presupuestos de algunos equipos deportivos:

a) 128 mil euros

b) 25 millones de euros

c) 648 500 €

d) 3 200 €

a) Error absoluto < 500 €
Error relativo $< 0,0039$

b) Error absoluto $< 500\,000$ €
Error relativo $< 0,02$

c) Error absoluto < 50 €
Error relativo $< 0,000077$

d) Error absoluto < 50 €
Error relativo $< 0,0156$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

12 ■■■ Expresa con un número razonable de cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo de la aproximación que des.

a) Oyentes de un programa de radio: 843 754

b) Precio de un coche: 28 782 €

c) Tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia: 0,0375 segundos.

d) Gastos de un ayuntamiento: 48 759 450 €

a) 840 000 oyentes $\left\{ \begin{array}{l} \text{Error absoluto} < 5\,000 \\ \text{Error relativo} < 0,0059 \end{array} \right.$

b) 29 000 € $\left\{ \begin{array}{l} \text{Error absoluto} < 500 \\ \text{Error relativo} < 0,017 \end{array} \right.$

c) 0,04 segundos $\left\{ \begin{array}{l} \text{Error absoluto} < 0,005 \\ \text{Error relativo} < 0,13 \end{array} \right.$

d) 49 000 000 € $\left\{ \begin{array}{l} \text{Error absoluto} < 500\,000 \\ \text{Error relativo} < 0,01 \end{array} \right.$

13 ■■■ Escribe en notación científica.

a) 752 000 000

b) 0,0000512

c) 0,000007

d) 15 000 000 000

a) $7,52 \cdot 10^8$

b) $5,12 \cdot 10^{-5}$

c) $7 \cdot 10^{-6}$

d) $1,5 \cdot 10^{10}$

PÁGINA 37

14 ■■■ Expresa en notación científica.

a) $32 \cdot 10^5$

b) $75 \cdot 10^{-4}$

c) $843 \cdot 10^7$

d) $458 \cdot 10^{-7}$

e) $0,03 \cdot 10^6$

f) $0,0025 \cdot 10^{-5}$

a) $3,2 \cdot 10^6$

b) $7,5 \cdot 10^{-3}$

c) $8,43 \cdot 10^9$

d) $4,58 \cdot 10^{-5}$

e) $3 \cdot 10^4$

f) $2,5 \cdot 10^{-8}$

15 ■■■ Da una cota del error absoluto de cada una de las siguientes aproximaciones y compara sus errores relativos.

a) $8 \cdot 10^5$

b) $5,23 \cdot 10^6$

c) $1,372 \cdot 10^7$

d) $2,5 \cdot 10^{-4}$

e) $1,7 \cdot 10^{-6}$

f) $4 \cdot 10^{-5}$

a) $5 \cdot 10^4$

b) $5 \cdot 10^3$

c) $5 \cdot 10^3$

d) $5 \cdot 10^{-6}$

e) $5 \cdot 10^{-8}$

f) $5 \cdot 10^{-6}$

El menor error relativo se da en c) y el mayor, en f).

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

16 ■■■ Calcula mentalmente.

a) $(1,5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$

c) $(4 \cdot 10^{-7}) : (2 \cdot 10^{-12})$

a) $3 \cdot 10^{12}$

c) $2 \cdot 10^5$

b) $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{11})$

d) $\sqrt{4 \cdot 10^8}$

b) $1,5 \cdot 10^{-5}$

d) $2 \cdot 10^4$

17 ■■■ Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.

a) $(3,5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$

c) $(1,2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$

a) $14 \cdot 10^{15} = 1,4 \cdot 10^{16}$

c) $0,24 \cdot 10^{13} = 2,4 \cdot 10^{12}$

b) $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2,5 \cdot 10^5)$

d) $(6 \cdot 10^{-7})^2$

b) $12,5 \cdot 10^{-3} = 1,25 \cdot 10^{-2}$

d) $36 \cdot 10^{-14} = 3,6 \cdot 10^{-13}$

18 ■■■ Efectúa a mano utilizando la notación científica y comprueba después con la calculadora.

a) $5,3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{11}$

b) $3 \cdot 10^{-5} + 8,2 \cdot 10^{-6}$

c) $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$

d) $7,2 \cdot 10^8 + 1,5 \cdot 10^{10}$

a) $53 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{11} = 50 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^{12}$

b) $30 \cdot 10^{-6} + 8,2 \cdot 10^{-6} = 38,2 \cdot 10^{-6} = 3,82 \cdot 10^{-5}$

c) $6 \cdot 10^{-9} - 50 \cdot 10^{-9} = -44 \cdot 10^{-9} = -4,4 \cdot 10^{-8}$

d) $7,2 \cdot 10^8 + 150 \cdot 10^8 = 157,2 \cdot 10^8 = 1,572 \cdot 10^{10}$

19 ■■■ Expresa el resultado de las siguientes operaciones en notación científica con 3 cifras significativas como máximo:

a) $(2,8 \cdot 10^{-5}) : (6,2 \cdot 10^{-12})$

b) $(7,2 \cdot 10^{-6})^3 : (5,3 \cdot 10^{-9})$

c) $7,86 \cdot 10^5 - 1,4 \cdot 10^6 + 5,2 \cdot 10^4$

d) $(3 \cdot 10^{-10} + 7 \cdot 10^{-9}) : (7 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^5)$

a) $4,52 \cdot 10^6$

c) $-5,62 \cdot 10^5$

b) $7,04 \cdot 10^{-8}$

d) $1,12 \cdot 10^{-15}$

Potencias y raíces

20 ■■■ Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[5]{x^2}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$

a) $x^{2/5}$

e) $(-3)^{3/5}$

b) $\sqrt{2}$

f) $\sqrt[4]{a}$

b) $2^{1/2}$

f) $a^{1/4}$

c) $\sqrt[3]{10^6}$

g) $(\sqrt[5]{x^{-2}})^3$

c) 10^2

g) $x^{-6/5}$

d) $\sqrt[4]{20^2}$

h) $\sqrt[15]{a^5}$

d) $20^{1/2}$

h) $a^{1/3}$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

21 ■■■ Pon en forma de raíz.

- | | | |
|--------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| a) $5^{1/2}$ | b) $(-3)^{2/3}$ | c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$ |
| d) $(a^3)^{1/4}$ | e) $(a^{1/2})^{1/3}$ | f) $(a^{-1})^{3/5}$ |
| a) $\sqrt{5}$ | b) $\sqrt[3]{(-3)^2}$ | c) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ |
| d) $\sqrt[4]{a^3}$ | e) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ | f) $\sqrt[5]{a^{-3}}$ |

22 ■■■ Obtén con la calculadora.

- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|---|
| a) $\sqrt[3]{-127}$ | b) $\sqrt[5]{0,2^{-3}}$ | c) $\sqrt[4]{\left(\frac{13}{9}\right)^3}$ |
| d) $12^{-2/3}$ | e) $\sqrt[6]{3^{-5}}$ | f) $\sqrt[5]{(-3)^{-2}}$ |
| a) $\sqrt[3]{-127} \approx -5,03$ | b) $\sqrt[5]{0,2^{-3}} \approx 2,63$ | c) $\sqrt[4]{\left(\frac{13}{9}\right)^3} \approx 1,32$ |
| d) $12^{-2/3} \approx 0,19$ | e) $\sqrt[6]{3^{-5}} \approx 0,4$ | f) $\sqrt[5]{(-3)^{-2}} \approx 0,64$ |

23 ■■■ Resuelto en el libro de texto.

24 ■■■ Expresa como potencia única.

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|---|
| a) $\sqrt{2} \sqrt[3]{4}$ | b) $3 \sqrt[3]{9}$ | c) $\sqrt[3]{25} : \sqrt{5}$ |
| d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}$ | e) $\sqrt[5]{\sqrt{a}}$ | f) $\sqrt[3]{m^2} : (m \cdot \sqrt{m})$ |
| a) $2^{1/2} \cdot 2^{2/3} = 2^{7/6}$ | b) $3 \cdot 3^{2/3} = 3^{5/3}$ | c) $5^{2/3} : 5^{1/2} = 5^{1/6}$ |
| d) $a^{1/2} \cdot a^{2/5} = a^{9/10}$ | e) $a^{1/10}$ | f) $m^{2/3} : (m \cdot m^{1/2}) = m^{-5/6}$ |

Radicales

25 ■■■ Simplifica.

- | | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------------|
| a) $\sqrt[4]{3^2}$ | b) $\sqrt[12]{a^8}$ | c) $\sqrt[5]{a^{15}}$ |
| d) $\sqrt[8]{a^2 b^4}$ | e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^8}}$ | f) $\sqrt[3]{a^6 b^9}$ |
| a) $\sqrt{3}$ | b) $\sqrt[3]{a^2}$ | c) a^3 |
| d) $\sqrt[4]{ab^2}$ | e) $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ | f) $a^2 b^3$ |

26 ■■■ Multiplica y simplifica.

- | | | |
|---|--|------------------------------------|
| a) $\sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{6}$ | b) $\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a^4} \sqrt[3]{a}$ | c) $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ |
| a) $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$ | | |
| b) $\sqrt[3]{a^6} = a^2$ | | |
| c) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$ | | |

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

27 ■■■ Extrae del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{16a^3}$

b) $\sqrt[4]{81a^5b^3}$

c) $\sqrt{8a^5}$

d) $\sqrt[3]{\frac{24}{a^4}}$

e) $\sqrt{\frac{162}{75}}$

f) $\sqrt[5]{\frac{9}{32}}$

a) $2a^3\sqrt{2}$

b) $3a^4\sqrt[4]{ab^3}$

c) $2a^2\sqrt{2a}$

d) $\frac{2}{a}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}$

e) $\frac{9}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$

f) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{9}$

28 ■■■ Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los radicales siguientes:

$$\sqrt{7}, \sqrt[3]{30}, \sqrt[4]{40}, \sqrt[6]{81}$$

$$\text{mín.c.m. } (2, 3, 4, 6) = 12$$

$$\sqrt{7} = \sqrt[12]{7^6} = \sqrt[12]{117649}$$

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[12]{30^4} = \sqrt[12]{810000}$$

$$\sqrt[4]{40} = \sqrt[12]{40^3} = \sqrt[12]{64000}$$

$$\sqrt[6]{81} = \sqrt[12]{81^2} = \sqrt[12]{6561}$$

$$\sqrt[6]{81} < \sqrt[4]{40} < \sqrt{7} < \sqrt[3]{30}$$

29 ■■■ Introduce dentro de la raíz y simplifica.

a) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $\frac{\sqrt{18}}{3}$

c) $2\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$

e) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$

f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

a) $\sqrt{\frac{5^2 \cdot 3}{5}} = \sqrt{15}$

b) $\sqrt{\frac{18}{3^2}} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 7}{4}} = \sqrt[3]{14}$

d) $\sqrt[4]{\frac{2^4 \cdot 5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{12}{2^2}} = \sqrt{3}$

f) $\sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 9}{3^3 \cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 38

30 ■■■ Divide y simplifica.

$$\text{a) } \sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}} \qquad \text{b) } \sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}} \qquad \text{c) } \sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{2}}$$

$$\text{a) } \sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}} = \sqrt{7 : \frac{21}{5}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{3}{5} : \frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6} : \frac{45}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

31 ■■■ Reduce a índice común y efectúa.

$$\text{a) } \sqrt[5]{6} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{4} : \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[6]{20} : \sqrt[4]{10}$$

$$\text{d) } (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) : (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3})$$

$$\text{a) } \sqrt[10]{6^2 \cdot 3^5} = \sqrt[10]{8748}$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[12]{20^2 : 10^3} = \sqrt[12]{\frac{4}{10}} = \sqrt[12]{\frac{2}{5}}$$

$$\text{d) } \sqrt[6]{(2^3 \cdot 3^2) : (2^2 \cdot 3^3)} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$$

32 ■■■ Resuelto en el libro de texto.

33 ■■■ Efectúa.

$$\text{a) } \sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$$

$$\text{c) } \sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63}$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2}$$

$$\text{e) } \sqrt{108} - 2\sqrt{12} - \sqrt{28} + \sqrt{7/4}$$

$$\text{a) } \sqrt{2^4 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{c) } \sqrt{2^2 \cdot 7} - \sqrt{7} + \sqrt{3^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\text{e) } \sqrt{2^2 \cdot 3^3} - 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 7} + \frac{\sqrt{7}}{2} = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

34 ■■■ Efectúa.

a) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$

c) $(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})$

a) $4 - 3 = 1$

c) $5 - 4 \cdot 3 = -7$

b) $(3\sqrt{2} + 2)^2$

d) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

b) $9 \cdot 2 + 4 + 12\sqrt{2} = 22 + 12\sqrt{2}$

d) $4 \cdot 5 + 3 - 4\sqrt{15} = 23 - 4\sqrt{15}$

35 ■■■ Racionaliza y simplifica.

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{3}{\sqrt{15}}$

d) $\frac{4}{\sqrt{12}}$

e) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$

f) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

a) $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$

c) $\frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

d) $\frac{4\sqrt{12}}{12} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

e) $\frac{3\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

f) $\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

36 ■■■ Racionaliza y simplifica si es posible.

a) $\frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

b) $\frac{3}{1 + \sqrt{3}}$

c) $\frac{14}{3 - \sqrt{2}}$

d) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

e) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 3}$

g) $\frac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

i) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

a) $\frac{(1 + \sqrt{6})\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{18}}{6} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$

b) $\frac{3(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{3 - 3\sqrt{3}}{-2} = \frac{-3 + 3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{14(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{42 + 14\sqrt{2}}{7} = 6 + 2\sqrt{2}$

d) $\frac{(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{1 - 2} = \frac{1 + 2 + 2\sqrt{2}}{-1} = -3 - 2\sqrt{2}$

e) $\frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{4 \cdot 5 - 9} = 2\sqrt{5} - 3$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

f)
$$\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} + 3)}{4 \cdot 2 - 9} = \frac{2 \cdot 2 + 3\sqrt{2}}{-1} = -4 - 3\sqrt{2}$$

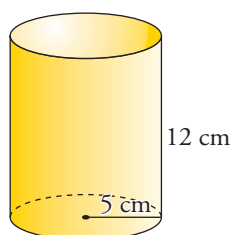
g)
$$\frac{10(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4 \cdot 3 - 2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$$

h)
$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2 - 3} = \frac{\sqrt{6} - 3}{-1} = -\sqrt{6} + 3$$

i)
$$\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{5 + 3 - 2\sqrt{15}}{2} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}$$

PIENSA Y RESUELVE

- 37** $\square\square\square$ Halla el área total y el volumen de un cilindro de 5 cm de radio y 12 cm de altura. Da su valor exacto en función de π .



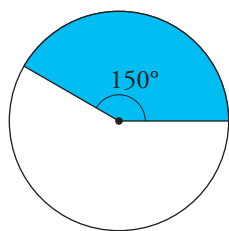
$$\text{Área lateral} = 2\pi R h = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área base} = \pi R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = 120\pi + 2 \cdot 25\pi = 170\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen} = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 300\pi \text{ cm}^3$$

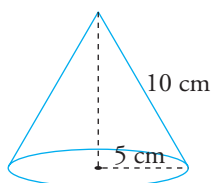
- 38** $\square\square\square$ En un círculo cuya circunferencia mide 30π m, cortamos un sector circular de 150° de amplitud. Halla el área de ese sector dando su valor exacto en función de π .



$$\text{Radio del círculo: } 2\pi R = 30\pi \rightarrow R = 15 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow \pi \cdot 15^2 \\ 150^\circ \rightarrow x \end{array} \right\} \text{Área} = \frac{150^\circ \cdot 15^2 \pi}{360^\circ} = \frac{375\pi}{4} \text{ m}^2$$

- 39** $\square\square\square$ Calcula el área total y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 cm de generatriz. Da el valor exacto.



$$\text{Altura} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Área lateral} = \pi R g = \pi \cdot 5 \cdot 10 = 50\pi \text{ cm}^2$$

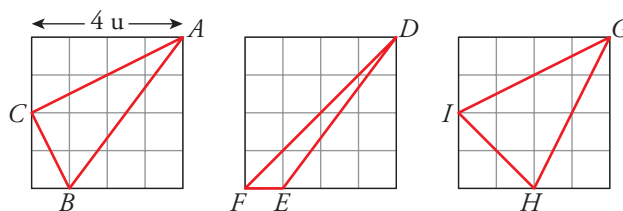
$$\text{Área base} = \pi R^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = 50\pi + 25\pi = 75\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 40** ■■■ Calcula el perímetro de los triángulos ABC , DEF y GHI . Expresa el resultado con radicales.



$$ABC \quad \overline{AC} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \quad \overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; \quad \overline{BC} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Perímetro de } ABC = 2\sqrt{5} + 5 + \sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5} \text{ u}$$

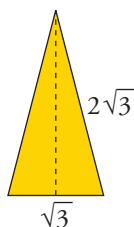
$$DFE \quad \overline{DF} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}; \quad \overline{DE} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; \quad \overline{FE} = 1$$

$$\text{Perímetro de } DFE = 4\sqrt{2} + 5 + 1 = 6 + 4\sqrt{2} \text{ u}$$

$$GHI \quad \overline{GH} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \quad \overline{GI} = \overline{GH} = 2\sqrt{5}; \quad \overline{HI} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Perímetro de } GHI = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2} \text{ u}$$

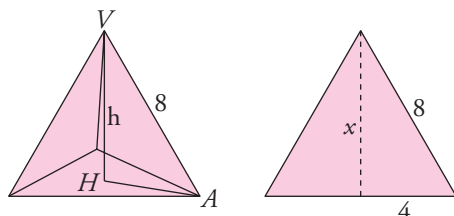
- 41** ■■■ Halla el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden el doble de la base cuya longitud es $\sqrt{3}$ cm. Expresa el resultado con radicales.



$$\text{Altura} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{12 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$$

- 42** ■■■ Calcula la altura de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Da su valor exacto.



Altura de una cara:

$$x = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

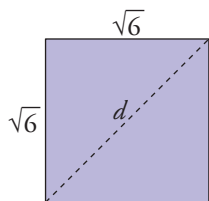
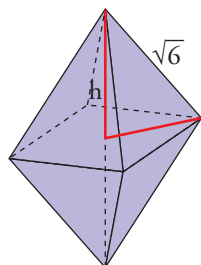
$$\overline{AH} = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Altura del tetraedro:

$$h = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{128}{3}} = \sqrt{\frac{2^7}{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 43** ■■■ Calcula el volumen de un octaedro regular cuya arista mide $\sqrt{6}$ cm. Da su valor exacto.



$$d = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\frac{d}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Altura de la pirámide} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Volumen del octaedro} = 2 \left(\frac{1}{3} (\sqrt{6})^2 \sqrt{3} \right) = 4\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

- 44** ■■■ Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x-7}$ b) $\sqrt{5-x}$ c) $\sqrt{-x}$ d) $\sqrt{x^2+1}$

a) $x-7 \geq 0 \rightarrow x \geq 7 \rightarrow x \in [7, +\infty)$

b) $5-x \geq 0 \rightarrow -x \geq -5 \rightarrow x \leq 5 \rightarrow x \in (-\infty, 5]$

c) $-x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0]$

d) $x^2 + 1 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$

- 45** ■■■ Comprueba que los números $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$.

$$\bullet (3 + \sqrt{2})^2 - 6(3 + \sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 + 6\sqrt{2} - 18 - 6\sqrt{2} + 7 = 0$$

$$\bullet (3 - \sqrt{2})^2 - 6(3 - \sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 - 6\sqrt{2} - 18 + 6\sqrt{2} + 7 = 0$$

- 46** ■■■ ¿Cuál de los números $1 - \sqrt{3}$ o $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ es solución de la ecuación

$$2x^2 - 2x - 1 = 0?$$

$$\bullet 2(1 - \sqrt{3})^2 - 2(1 - \sqrt{3}) - 1 = 2(1 + 3 - 2\sqrt{3}) - 2 + 2\sqrt{3} - 1 = \\ = 8 - 4\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} - 1 \neq 0$$

El número $1 - \sqrt{3}$ no es solución de la ecuación.

$$\bullet 2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}\right) - 1 - \sqrt{3} - 1 = \\ = 2 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 = 0$$

El número $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ sí es solución de la ecuación.

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 39

47 ■■■ Halla el valor exacto de las siguientes expresiones en el caso en que

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2}:$$

a) $\frac{(1-2m)^2}{2}$ b) $\sqrt{1-m^2}$ c) $\frac{1+m}{1-m}$

a) $\frac{\left(1-2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = \frac{1+3-2\sqrt{3}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4-3} = \frac{4+3+4\sqrt{3}}{1} = 7+4\sqrt{3}$

48 ■■■ Calcula utilizando la notación científica. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto cometido en cada caso:

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^2$ b) $\frac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0,00015 - 0,00003}$

c) $(0,0073)^{-2} \cdot (0,0003)^{-3}$ d) $(4,5 \cdot 10^{12}) : (0,000837)$

a) $(3,30 \cdot 10^{19}) : (1,44 \cdot 10^8) = 2,29 \cdot 10^{11}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^8$

b) $\frac{2,70 \cdot 10^6 - 1,30 \cdot 10^7}{1,50 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-5}} = -8,58 \cdot 10^{10}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^7$

c) $(1,88 \cdot 10^4) \cdot (3,70 \cdot 10^{10}) = 6,96 \cdot 10^{14}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^{11}$

d) $(4,5 \cdot 10^{12}) : (8,37 \cdot 10^{-4}) = 5,38 \cdot 10^{15}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^{12}$

49 ■■■ Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}-1} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}+1}$ b) $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2})$

c) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5}$

a) $\frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{3-1} + \frac{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{10+6\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{3}-10}{2} =$
 $= \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

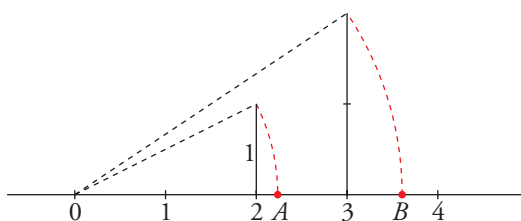
1 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$\begin{aligned} \text{b) } \left[\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3} \right] \cdot (3+2\sqrt{2}) &= \frac{9-2\sqrt{18}}{3} \cdot (3+2\sqrt{2}) = \\ &= \frac{27+18\sqrt{2}-6\sqrt{18}-4\cdot 6}{3} = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{5+1+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5} &= \frac{(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{5-1} - 3\sqrt{5} = \frac{8\sqrt{5}+16}{4} - 3\sqrt{5} = \\ &= 2\sqrt{5}+4-3\sqrt{5} = 4-\sqrt{5} \end{aligned}$$

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

50 ■■■ ¿Qué números representan los puntos A y B ?



$$A = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

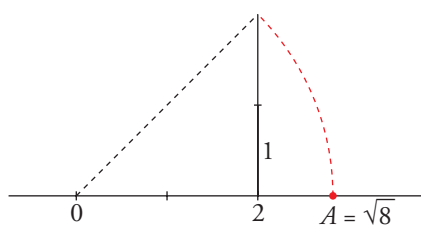
$$B = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

51 ■■■ Explica un procedimiento para construir un segmento que mida exactamente:

a) $\sqrt{8}$

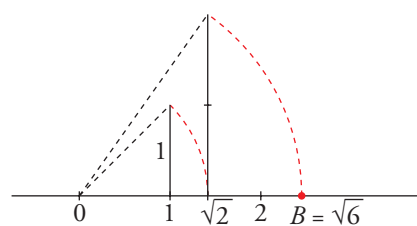
b) $\sqrt{6}$

a)



$$A = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

b)



$$B = \sqrt{6} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2}$$

52 ■■■ ¿Cuáles de las siguientes raíces no existen?

$$\sqrt[3]{-20}; \sqrt[6]{2^{-3}}; \sqrt{-1}; \sqrt[5]{0,001}; \sqrt[4]{-81}$$

No existen ni $\sqrt{-1}$ ni $\sqrt[4]{-81}$.

53 ■■■ ¿Cuántos números racionales hay entre $0,\widehat{7}$ y $0,\widehat{8}$? ¿Y cuántos irracionales? Pon ejemplos.

Hay infinitos racionales e infinitos irracionales.

Racionales entre $0,\widehat{7}$ y $0,\widehat{8}$: $0,79$; $0,78$; $0,786$;...

Irracionales: $0,791791179111\dots$; $0,828228222\dots$; $\frac{\sqrt{17}}{5}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$;...

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

54 ■■■ ¿Cuáles son los números que pertenecen a $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$?

Todos los números reales excepto el 3.

55 ■■■ Escribe, en cada caso, un número racional y otro irracional comprendidos entre los dos que se dan:

a) $\sqrt{2}$ y 2

b) $1,\overline{3}$ y $1,\overline{4}$

c) $1,\overline{23}$ y $1,\overline{24}$

d) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

a) Racional: $1,5 = \frac{3}{2}$ Irracional: $\frac{\sqrt{10}}{2}$

b) Racional: 1,35 Irracional: $\sqrt{2}$

c) Racional: 1,235 Irracional: $\sqrt{1,54}$

d) Racional: 1,5 Irracional: $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$

56 ■■■ Escribe dos números racionales uno mayor y otro menor que $\sqrt{2}$ que se diferencien de él en menos de una milésima.

Menor que $\sqrt{2} \rightarrow 1,4141$

Mayor que $\sqrt{2} \rightarrow 1,4143$

57 ■■■ ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones de segundo grado tienen soluciones irracionales?

a) $x^2 - 2 = 0$

b) $9x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 + 4 = 0$

d) $x^2 - 18 = 0$

e) $x^2 - 2x - 2 = 0$

f) $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2} = 0$

a) $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$ son irracionales.

b) $x = \pm \frac{5}{3}$ son racionales.

c) No tiene solución.

d) $x = \pm \sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$ son irracionales.

e) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$ son irracionales.

f) $x = \pm 2$ son racionales.

58 ■■■ Justifica que $\frac{\sqrt{18}}{3}$, $\frac{8}{\sqrt{32}}$, $\sqrt[4]{4}$ y $2^{1/2}$ representan el mismo número irracional.

¿Es posible que $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$ represente ese mismo número?

$$\frac{\sqrt{18}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}; \quad \frac{8}{\sqrt{32}} = \frac{8\sqrt{32}}{32} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{2}}{32} = \sqrt{2}; \quad \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}; \quad 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

1 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$\begin{aligned}\frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} - 2)}{27 - 4} &= \frac{9\sqrt{18} - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{23} = \frac{27\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{23} = \\ &= \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

59 ■■■ ¿Cuáles de los siguientes números no están expresados en notación científica?

$$3,14 \cdot 10^{-17}; 1,32^{12}; 437 \cdot 10^7; 0,82 \cdot 10^3$$

No están en notación científica: $1,32^{12}$; $437 \cdot 10^7$; $0,82 \cdot 10^3$

PROFUNDIZA

60 ■■■ Ordena de menor a mayor en el caso $a \in (0, 1)$ y en el caso $a \in (1, +\infty)$.

$$\sqrt{a}; \frac{1}{a}; a^2; a$$

$$\text{Si } a \in (0, 1), \quad a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$$

$$\text{Si } a \in (1, +\infty), \quad \frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$$

61 ■■■ Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{(x-3)(x+3)}$

b) $\sqrt{x(4-x)}$

c) $\sqrt{x^2 + x - 6}$

d) $\sqrt{(x+1)(x-5)}$

a) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

b) $[0, 4]$

c) $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

d) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

62 ■■■ Prueba que $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

Elevamos al cuadrado.

$$(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

63 ■■■ Justifica que $\sqrt[4]{\sqrt{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt[3]{x}$.

$$\sqrt[4]{\sqrt{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt[8]{x^2 \cdot x^{2/3}} = \sqrt[8]{\sqrt[3]{x^6 \cdot x^2}} = \sqrt[24]{x^8} = \sqrt[3]{x}$$