3 Polinomios

1. Ordena de forma decreciente los siguientes polinomios:

a) $P(x) = -4x^3 + 7 - 2x^2 + x^4 + 5x$

b) $Q(x) = 5x^2 - 3x^5 + 2x - x^3$

c) $R(x) = -2 + 3x - x^9 + 4x^4 - 8x^6$

2. Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ y $Q(x) = 2x^2 - x$, calcula:

a) $P(x) + Q(x)$ b) $Q(x) - P(x)$ c) $P(x) \cdot Q(x)$

3. Dados los polinomios $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - x$; $Q(x) = x^3 + 5x^2 - 2$, y $R(x) = x^2 - 4$, calcula:

a) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x)$

b) $P(x) - [Q(x) - R(x)]$

c) $Q(x) \cdot R(x) - P(x)$

4. Calcula las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(4x^4 - 8x^3 + 12x^2) : 4x^2$

b) $(2x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2) : (x^2 - 1)$

c) $(x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 3x + 4) : (x^2 + 2x + 1)$

5. Calcula las siguientes divisiones enteras de polinomios, hallando los polinomios cociente y resto:

a) $(6x^4 + x^3 - 20\ x^2 + 12x + 9) : (2x^2 - 3x + 1)$

b) $(x^5 + 6x^3 - 12x - 6) : (x^3 - 4)$

c) $(3x^3 - 2x^2 + 8x - 9) : (x^2 + 2x - 4)$

6. Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(2x^4 - 9x^3 + 4x^2 - x + 12) : (x - 2)$

b) $(x^5 - 3x^3 + 12x^2 - 2) : (x + 3)$

c) $(x^4 + 5) : (x + 1)$

7. Halla el valor de m para que cada una de las divisiones siguientes sea exacta:

a) $(x^2 + 5x + m) : (x + 2)$

b) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - mx + 3) : (x - 3)$

c) $(2x^4 + x^3 + mx^2 - 5x + 1) : (x + 1)$

8. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{x}{2} + 3\right)^2$ c) $(5x^4 - 3x^2)^2$ e) $(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$

b) $\left(2x^3 - \frac{3}{4}\right)^2$ d) $(x^2 - 4x + 1)^2$ f) $(3x^2 + 4x)(3x^2 - 4x)$

9. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$ b) $x^3 - 2x^2 + x - 2$ c) $2x^3 + 6x^2 - 8x - 24$

10. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ b) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$ c) $x^3 - x^2 + 4x - 4$

SOLUCIONES

1. a) $P(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 5x + 7$

b) $Q(x) = -3x^5 - x^3 + 5x^2 + 2x$

c) $R(x) = -x^9 - 8x^6 + 4x^4 + 3x - 2$

2. a) $P(x) + Q(x) = x^3 - 4x^2 + 1 + 2x^2 - x =$
$= x^3 - 2x^2 - x + 1$

b) $Q(x) - P(x) = 2x^2 - x - (x^3 - 4x^2 + 1) =$
$= 2x^2 - x - x^3 + 4x^2 - 1 =$
$= -x^3 + 6x^2 - x - 1$

c) $P(x) \cdot Q(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)(2x^2 - x) =$
$= 2x^5 - x^4 - 8x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x =$
$= 2x^5 - 9x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x$

3. a) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x) = [2x^4 + 3x^2 - x -$
$- (x^3 + 5x^2 - 2)](x^2 - 4) = (2x^4 - x^3 -$
$- 2x^2 - x + 2)(x^2 - 4) = 2x^6 - x^5 - 10x^4 +$
$+ 3x^3 + 10x^2 + 4x - 8$

b) $P(x) - [Q(x) - R(x)] = 2x^4 + 3x^2 - x -$
$- [x^3 + 5x^2 - 2 - (x^2 - 4)] = 2x^4 +$
$+ 3x^2 - x - (x^3 + 4x^2 + 2) = 2x^4 - x^3 -$
$- x^2 - x - 2$

c) $Q(x) \cdot R(x) - P(x) = (x^3 + 5x^2 - 2)$
$(x^2 - 4) - (2x^4 + 3x^2 - x) = x^5 + 5x^4 -$
$- 4x^3 - 22x^2 + 8 - (2x^4 + 3x^2 - x) = x^5 +$
$+ 3x^4 - 4x^3 - 25x^2 + x + 8$

4. a) $c(x) = x^2 - 2x + 3$

b) $c(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 2$

c) $c(x) = x^3 - 5x + 4$

5. a) $c(x) = 3x^2 + 5x - 4$; $r(x) = -5x + 13$

b) $c(x) = x^2 + 6$; $r(x) = 4x^2 - 12x + 18$

c) $c(x) = 3x - 8$; $r(x) = 36x - 41$

6. a) $c(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x - 13$; resto $= -14$

b) $c(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 6x + 18$;
resto $= -56$

c) $c(x) = x^3 - x^2 + x - 1$; resto $= 6$

7. a) $P(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + m = -6 + m = 0$
$m = 6$

b) $P(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 3m + 3 =$
$= 57 - 3m = 0$
$m = 19$

c) $P(-1) = 2(-1)^4 + (-1)^3 + m(-1)^2 -$
$-5(-1) + 1 = m + 7 = 0$
$m = -7$

8. a) $\dfrac{x^2}{4} + 3x + 9$

b) $4x^6 - 3x^3 + \dfrac{9}{16}$

c) $25x^8 - 30x^6 + 9x^4$

d) $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x + 1$

e) $x - 4$

f) $9x^4 - 16x^2$

9. a) Las posibles raíces enteras son ± 1 y ± 3; como $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$, $P(3) \neq 0$, $P(-3) = 0$ $\Rightarrow$ las raíces enteras son 1, -1 y -3.

b) Las posibles raíces enteras son ± 1 y ± 2; como $P(1) \neq P(-1) \neq 0$, $P(2) = 0$, $P(-2) \neq 0$ $\Rightarrow$ la única raíz entera es 2.

c) Puesto que 2 es factor común en todos los términos del polinomio, las posibles raíces enteras son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12; como $P(2) = 0$, $P(-2) = 0$, $P(-3) = 0$ $\Rightarrow$ las raíces enteras son -2, 2 y 3.

10. a) Las raíces enteras son -1, 1 y -3, puesto que $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$ y $P(-3) = 0$:

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x + 3)$

b) Sacando x factor común en todos los términos:
$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^3 - x^2 - 4x + 4)$
Las raíces enteras de $x^3 - x^2 - 4x + 4$ son 1, -2 y 2, por tanto:
$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = x(x - 1)(x - 2)(x + 2)$.

c) La única raíz entera de $x^3 - x^2 + 4x - 4$ es 1, por tanto:
$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x^2 + 4)$, que no se puede factorizar, puesto que $x^2 + 4$ es irreducible.