POTENCIAS Y RAÍCES DE NÚMEROS REALES

1. POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL.

Una ***potencia*** $\boldsymbol{a^n}$ de ***base*** un número real $\boldsymbol{a}$ y ***exponente*** un número natural $\boldsymbol{n}$ **(*n* > 1)** es el producto de $\boldsymbol{n}$ factores iguales a la base:

$$a^n = \overset{(n \text{ veces})}{a \cdot a \cdots a} \quad \text{con } n > 1$$

Ejemplo.

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

Observa que si el exponente es par la potencia es siempre positiva y, si el exponente es impar, la potencia tiene el mismo signo que la base.

1.1. Propiedades.

- Calculemos $5^2 \cdot 5^4 \Rightarrow 5^2 \cdot 5^4 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$

El **producto de dos potencias de la misma base** es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- Calculemos ahora $5^6 : 5^4 \Rightarrow 5^6 : 5^4 = \dfrac{5^6}{5^4} = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 = 5^2$

El **cociente de dos potencias de la misma base** es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente la diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad \text{con } n > m + 1$$

- Calculemos el producto de potencias $3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow 3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$

El **producto de dos potencias con el mismo exponente** es otra potencia que tiene por base el producto de las bases y por exponente el mismo.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

- Calculemos el cociente $6^2 : 3^2 \Rightarrow 6^2 : 3^2 = (6 \cdot 6) : (3 \cdot 3) = (6 : 3) \cdot (6 : 3) = (6 : 3)^2 = 2^2$

El **cociente de dos potencias con el mismo exponente** es otra potencia que tiene por base el cociente de las bases y por exponente el mismo.

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

- Calculemos, por último, $(2^3)^4 \Rightarrow (2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$

La **potencia de una potencia** es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente el producto de los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

EJERCICIOS

1. Calcula las siguientes potencias.
   a) 3^4 b) 4^5 c) 6^2 d) $(-4)^3$ e) 5^6 f) $(-5)^4$ g) 2^{10} h) $(-3)^6$

2. Escribe en forma de una sola potencia.
   a) $5^4 \cdot 3^4$ b) $2^2 \cdot 4^2$ c) $3^4 \cdot 4^4 \cdot 5^4$ d) $x^n \cdot y^n$ e) $(-5)^4 \cdot (-3)^4$
   f) $8^3 : 4^3$ g) $9^5 : 3^5$ h) $x^n : y^n$ i) $(-10)^4 : 2^4$ j) $(-6)^3 : (-3)^3$

3. Escribe en forma de una sola potencia.
   a) $(5 \cdot 3)^4$ b) $(2 \cdot 4)^2$ c) $(3 \cdot 4 \cdot 5)^4$ d) $(x \cdot y)^n$ e) $[(-5) \cdot (-3)]^4$
   f) $(8 : 4)^3$ g) $(9 : 3)^5$ h) $(x : y)^n$ i) $[(-10) : 2]^4$ j) $[(-6) : (-3)]^3$

4. Completa los huecos.
   a) $2\ \ \cdot 2^{11} = 2^{20}$ b) $(-4)^6 : (-4)\ \ = (-4)^3$ c) $(-6)^3 \cdot (-6)^5 = (-6)$ d) $[(-1)^7]\ \ = (-1)^{21}$ e) $(3^{11})^2 = 3$

2. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO.

La definición dada anteriormente de potencias de exponente natural exige que el exponente sea > 1. ¿Qué sucede entonces con las expresiones …, a^{-m}, …, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1? ¿Se les puede asignar algún número de modo que sigan siendo válidas las mismas propiedades que tienen las potencias de exponente natural?

La respuesta es afirmativa. La justificación la tenemos en el siguiente cuadro, donde se aplica la definición de potencia y la propiedad del cociente de potencias.

Aplicando la definición de potencia	Aplicando formalmente la propiedad del cociente de potencias	Si estos dos resultados deben ser el mismo, conviene tomar
$a^5 : a^5 = \frac{a^5}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{1} = 1$	$a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0$	$a^0 = 1$
$a^6 : a^5 = \frac{a^6}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{a}{1} = a$	$a^6 : a^5 = a^{6-5} = a^1$	$a^1 = a$
$a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$	$a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Las potencias de base un número real ***a*** y exponente entero se define así:

$$\boldsymbol{a^n = a \times \overset{(n \text{ veces})}{a \text{xxxxxxxxxxx} a}} \quad \text{con } \boldsymbol{n > 1}$$

$$\boldsymbol{a^0 = 1}, \qquad \boldsymbol{a^1 = a}, \qquad \boldsymbol{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} \quad \text{con } \boldsymbol{m} \text{ ³ } \boldsymbol{1}$$

Con esta definición, las propiedades de estas potencias son las mismas que las de las potencias de exponente natural.

Ejemplo.

$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

$(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = \frac{1}{-216} = -\frac{1}{216}$

$5^{-3} \cdot 5^3 = 5^{-3+3} = 5^0 = 1$

$8^2 : 8^{-2} = 8^{2-(-2)} = 8^4 = 4.096$

$2^{-2} \cdot 3^{-2} = (2 \cdot 3)^{-2} = 6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

$12^{-3} : 4^{-3} = (12 : 4)^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

$(2^3)^{-2} = 2^{3 \cdot (-2)} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

EJERCICIOS

5. Calcula las siguientes potencias.

a) $5^6 \cdot 5^{-3}$ b) $(-4)^{-6} : (-4)^{-2}$ c) $[(-3)^2]^{-5}$ d) $4^3 \cdot 4^{-3}$

e) $(-75)^3 : 5^3$ f) $(6^{-2})^{-5}$ g) $8^6 \cdot (-4)^6$ h) $(-3)^5 : (-3)^4$

6. Halla el valor de las siguientes expresiones.

a) $2^2 - 4^2 : 8 + 3^0$ b) $2 \cdot 3^2 - 5^2 : 5 + 5^3$ c) $3^{-1} \cdot 3 - 3^0 + 1 - 25^1$

d) $3^2 : 2 - 1 - 3^2 : 2^{-1}$ e) $\frac{3^2}{3} - \frac{2^{-1}}{3} + \frac{1}{3^{-1}}$ f) $\frac{2^2}{3} - 1 - \frac{3^2}{2^{-1}}$

7. Simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones y calcula su valor.

a) $\frac{(-3)^2 \cdot (-5) \cdot (-2)^3}{-8}$ b) $\frac{(-3)^2 \cdot (-2)^3 \cdot 2^2}{12}$ c) $\frac{(-15)^3 \cdot (-3)^{-1}}{(-3)^5 \cdot 5^2}$ d) $\frac{(-6)^3 \cdot 9^2 \cdot (-2)^6}{(-12)^5}$

3. POTENCIAS DE BASE 10. NOTACIÓN CIENTÍFICA.

- **Utilidad de la notación potencial**

Si decimos que el número de quinielas de 14 partidos es 4.782.969, es fácil que a la mayoría se les olvide; pero si decimos que es 3^{14} (3, resultados de un partido, y 14, número de partidos), seguro que es más fácil recordarlo.

La velocidad de la luz en el vacío es aproximadamente 300.000 km/s. Esta cantidad escrita en metros por segundo es 300.000.000 m/s. Con potencias se puede escribir así: $3 \cdot 10^8$ m/s.

- **Expresión potencial de números muy grandes**

La masa de la Tierra es, aproximadamente 5.980.000.000.000.000.000.000.000 kg. Utilizando potencias se escribe $5'98 \cdot 10^{24}$ kg.

Un año luz es la longitud que recorre la luz en un año. Su valor es, aproximadamente, 9.460.000.000.000.000 m, que utilizando potencias se escribe $9'46 \cdot 10^{15}$ m.

- **Expresión potencial de números muy pequeños**

La masa de un protón es 0'000000000000000000000000000167 kg. Con potencias se puede escribir de la forma $1'67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Cuando se trabajan con números muy grandes o muy pequeños surge el problema de cómo representarlos de la forma más simple posible. Solventaremos esta dificultad mediante la utilización de la notación científica.

Un número en ***notación científica, N** = **a'bcd…** x **10^k**,* consta de:

- Una parte entera formada por una sola cifra no nula (***a*** es un número entero del 1 al 9).
- Una parte decimal.
- Una potencia de base 10 con exponente entero (***k*** es un entero positivo o negativo).

En esta notación el exponente ***k*** indica el ***orden de la magnitud.***

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de conversión a notación científica.

- 745'23 tiene tres dígitos enteros y, por tanto, habrá que desplazar la coma hacia la izquierda dos lugares. Luego $745'23 = 7'4523 \cdot 10^2$.
- 0'00000000569 tiene un dígito entero pero es nulo. Habrá, pues, que desplazar la coma hacia la derecha hasta el primer dígito no nulo, es decir, nueve lugares. Así, $0'00000000569 = 5'69 \cdot 10^{-9}$.

En la tabla adjunta se muestran algunas potencias de 10.

Con exponente positivo	Con exponente negativo
$10^0 = 1$ = una unidad	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0'1$ = una décima
$10^1 = 10$ = una decena	$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0'01$ = una centésima
$10^2 = 100$ = una centena	$10^{-3} = \frac{1}{1.000} = 0'001$ = una milésima
$10^3 = 1.000$ = una unidad de millar	$10^{-4} = \frac{1}{10.000} = 0'0001$ = una diezmilésima

3.1. Operaciones en notación científica.

- Para **sumar** $1'873 \cdot 10^{12} + 4'145 \cdot 10^{12}$ sacamos factor común 10^{12} y sumamos la parte decimal de cada número.

$$1'873 \cdot 10^{12} + 4'145 \cdot 10^{12} = (1'873 + 4'145) \cdot 10^{12} = 6'018 \cdot 10^{12}$$

Cuando los exponentes son distintos, por ejemplo $1'873 \cdot 10^{12} + 4'145 \cdot 10^9$, como no podemos sacar factor común se reducen a exponente común (el mayor de ellos) y operamos como anteriormente.

$$1'873 \cdot 10^{12} + 4'145 \cdot 10^9 = 1'873 \cdot 10^{12} + 0'004145 \cdot 10^{12} = (1'873 + 0'004145) \cdot 10^{12} = 1'877145 \cdot 10^{12}$$

- Para **restar** dos números en notación científica se procede como en la suma: se reducen a exponente común (el mayor de ellos) y, posteriormente, se restan la parte decimal de ambos números.

$$8'593 \cdot 10^9 - 3'212 \cdot 10^7 = 8'593 \cdot 10^9 - 0'03212 \cdot 10^9 = (8'593 - 0'03212) \cdot 10^9 = 8'56088 \cdot 10^9$$

- Para **multiplicar** dos números en notación científica se multiplican las partes decimales y se multiplican los exponentes.

$$(2'4532 \cdot 10^6) \cdot (3'42 \cdot 10^{12}) = (2'4532 \cdot 3'42) \cdot (10^6 \cdot 10^{12}) = 8'389944 \cdot 10^{18}$$

- Para **dividir** dos números en notación científica se dividen las partes decimales y se dividen los exponentes.

$$(2'25 \cdot 10^{25}) : (1'2 \cdot 10^7) = (2'25 : 1'2) \cdot (10^{25} : 10^7) = 1'875 \cdot 10^{18}$$

EJERCICIOS

8. Escribe en notación científica los siguientes números.
   a) 1.230.000.000.000.000 b) 0'000000000001230 c) 14 billones d) 527 billonésimas
9. Escribe en notación decimal los siguientes números.
   a) $5'213 \cdot 10^7$ b) $4'723 \cdot 10^{-6}$ c) $0'0042 \cdot 10^{11}$ d) $87'091 \cdot 10^{-5}$
10. La constante de Planck, $6'626176 \cdot 10^{-34}$ es uno de los números positivos más pequeños que se utilizan en física. Escrito en notación decimal 0'000 … 6626176, ¿cuántos ceros hay después de la coma antes de la primera cifra significativa?
11. Efectúa las siguientes operaciones expresando el resultado en notación científica.
    a) $7'14 \cdot 10^4 + 6'234 \cdot 10^4$ b) $8'273 \cdot 10^4 - 1'496 \cdot 10^6$ c) $1'273 \cdot 10^{-3} \cdot 4'197 \cdot 10^5$
    d) $(5'12 \cdot 10^3) : (1'28 \cdot 10^{-5})$ e) $\dfrac{5'24 \cdot 10^{-5} - 3'7 \cdot 10^{-7}}{2'645 \cdot 10^3 + 3'9}$ f) $\dfrac{(2'6 \cdot 10^{-1}) \cdot (7'2 \cdot 10^3)}{(3'8 \cdot 10^7) \cdot (6'5 \cdot 10^{-4})}$

4. RAÍCES DE NÚMEROS REALES.

Anteriormente se ha calculado la raíz cuadrada de un número por aproximaciones sucesivas utilizando la estrategia «menor-mayor». Extendemos ahora este método para hallar la raíz de índice cualquiera de un número.

¿Qué número positivo multiplicado por sí mismo tres veces da 15? Este número se indica con el símbolo $\sqrt[3]{15}$ y se llama *raíz cúbica* de 15. Por definición, $\left(\sqrt[3]{15}\right)^3 = 15$.

- Aproximación entera: 1, 2, 3, …

  $2^3 = 8$; $3^3 = 27$

  Luego **$2 < \sqrt[3]{15} < 3$**

  El error cometido es menor que una **unidad.**

- Aproximación decimal: 2'1, 2'2, 2'3, …

  $2'4^3 = 13'824$; $2'5^3 = 15'625$

  Luego **$2'4 < \sqrt[3]{15} < 2'5$**

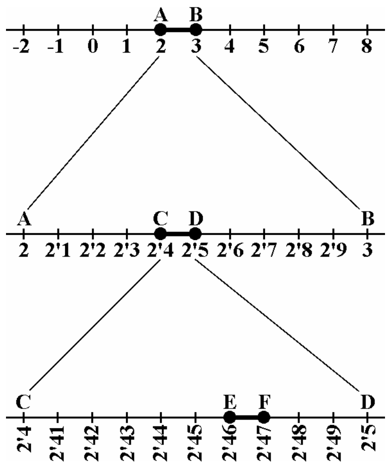
  El error cometido es menor que una **décima.**

- Aproximación centesimal: 2'41, 2'42, 2'43, …

  $2'46^3 = 14'886936$; $2'47^3 = 15'069223$

  Luego **$2'46 < \sqrt[3]{15} < 2'47$**

  El error cometido es menor que una **centésima.**



Las sucesivas aproximaciones dan 2'466212… que es la expresión decimal de la raíz cúbica de 15. Este número es irracional (no periódico).

Los números positivos cuyo cubo es 2, 3, 4, … se designan por $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, … y se llaman *raíces cúbicas*.

Los números positivos cuya cuarta potencia es 2, 3, 4, … se designan por $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, … y se llaman *raíces cuartas*.

Las raíces siguientes de números positivos se llaman *raíces quintas, sextas, séptimas,* … y en general *raíces enésimas*. Todas las raíces se pueden calcular utilizando la potencia y la estrategia «menor-mayor».

> ***Raíz enésima*** de un número real ***a***, se escribe $\sqrt[n]{a}$, siendo ***n*** un número natural, es otro número real ***b*** que cumple $b^n = a$.
>
> $$\sqrt[n]{a} = b \;\text{Û}\; b^n = a$$
>
> En la expresión $\sqrt[n]{a}$, ***n*** se llama ***índice*** y ***a radicando.***

4.1. Número de raíces.

- **Radicales de índice par**

  Si el radicando es **positivo,** existen **dos raíces opuestas.**
  Por ejemplo, la raíz cuadrada de 25 puede ser 5 ó –5. Para distinguirlas se escribe $\sqrt{25} = 5$ y $-\sqrt{25} = -5$.

  Si el radicando es 0 **tiene por raíz 0.**

  Si el radicando es **negativo no tiene raíces,** pues ningún número *b* puede ser raíz de un radicando negativo, ya que $b^n \geq 0$ cuando *n* es par.
  Por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no tiene raíces ya que no existe ningún número *b* tal que $b^2 = -4$.

- **Radicales de índice impar**

  En este caso todo número tiene **una sola raíz: positiva** si el radicando es positivo, **negativa** si el radicando es negativo y **nula** si el radicando es 0.

  Por ejemplo, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{0} = 0$, $\sqrt[3]{-8} = -2$.

En el siguiente cuadro se resume lo anterior:

Índice: *n*	**Radicando: *a***	**Nº de raíces**
Par	$a > 0$	2 raíces opuestas
	$a = 0$	1 raíz nula
	$a < 0$	No tiene raíces
Impar	$a > 0$	1 raíz positiva
	$a = 0$	1 raíz nula
	$a < 0$	1 raíz negativa

EJERCICIOS

12. Expresa en forma de potencia las relaciones siguientes.
    a) $\sqrt[3]{64} = 4$ b) $\sqrt[n]{x} = y$ c) $\sqrt{x} = 4$ d) $\sqrt[4]{625} = 5$ e) $\sqrt[5]{97'65625} = 2'5$

13. Halla aproximaciones por defecto y por exceso de las siguientes raíces con error menor que una décima.
    a) $\sqrt{17}$ b) $\sqrt[3]{183}$ c) $\sqrt{97'8}$ d) $\sqrt[4]{3.025}$ e) $\sqrt[5]{-105}$ f) $\sqrt{-38'2}$

4.2. Radicales equivalentes.

Dos radicales diferentes que tienen las mismas raíces se dice que son *equivalentes*. Por ejemplo, los radicales $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{5^2}$ y $\sqrt[6]{5^3}$ tienen la misma raíz: 2’23606…

Radicales equivalentes son los que tienen las mismas raíces.

Si se multiplica o divide el índice de un radical y el exponente del radicando por un mismo número natural distinto de 0, se obtiene otro radical equivalente.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} \ , \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:k]{a^{m:k}} \ , \quad k \neq 0$$

Esta propiedad permite **simplificar** radicales, obtener varios radicales con el **mismo índice** y **comparar** radicales. El proceso es similar al que se utiliza con las fracciones.

Para **simplificar radicales** se divide el índice y el exponente del radicando (nos ayudamos de la descomposición en factores primos del radicando) por un divisor común de ambos (en algunos casos es aconsejable dividirlos por el m.c.d. de estos).

Ejemplo. $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$, donde hemos dividido por 3

$\sqrt[12]{625} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[3]{5}$, aquí hemos dividido por 4

$\sqrt[18]{a^{12}} = \sqrt[3]{a^2}$, hemos dividido por el m.c.d. (18, 12) = 6

Para obtener **radicales con el mismo índice** se procede como se explica a continuación.

1. Se toma como índice común de todos los radicales el m.c.m. de los índices.
2. Se multiplica el exponente de cada radicando por el cociente de dividir el m.c.m. por el índice de dicho radical.

Dados dos radicales que tienen el mismo índice, es menor (<) o mayor (>) el que tiene menor o mayor radicando, respectivamente.

Ejemplo. Reduce a común índice y ordena los siguientes radicales: $\sqrt[4]{2^3}$, $\sqrt{2}$ y $\sqrt[6]{2^5}$.

Tomamos como índice común el m.c.m. (2, 4, 6) = 12 y hallamos los radicales equivalentes a los dados con índice 12:

$$12:4=3 \Rightarrow \sqrt[4]{2^3}=\sqrt[12]{2^9}\ ;\ 12:2=6 \Rightarrow \sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}\ ;\ 12:6=2 \Rightarrow \sqrt[6]{2^5}=\sqrt[12]{2^{10}}$$

Ordenación: $\sqrt{2} < \sqrt[4]{2^3} < \sqrt[6]{2^5}$ pues $\sqrt[12]{2^6} < \sqrt[12]{2^9} < \sqrt[12]{2^{10}}$

EJERCICIOS

14. Simplifica las siguientes expresiones radicales: $\sqrt[8]{2^4}$, $\sqrt[6]{125}$ y $\sqrt[5]{1.024}$
15. Reduce a común índice y ordena los siguientes radicales.
    a) $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{4}$ y $\sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[5]{8}$, $\sqrt[6]{15}$ y $\sqrt[4]{9}$

4.3. Potencias de exponente racional.

Hasta ahora se han definido las potencias de exponente entero. ¿A las expresiones $a^{1/2}$, $a^{2/3}$, $a^{-1/7}$, $a^{-5/9}$, … se les puede asignar algún número de modo que sigan siendo válidas las mismas propiedades que tienen las potencias de exponente entero? A continuación vamos a justificar la definición de estas potencias.

Aplicando la definición y las propiedades de las raíces	Para que se sigan cumpliendo las propiedades de las potencias	Para que estos dos resultados sean el mismo, conviene tomar
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$(a^{1/2})^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a^1 = a$	$a^{1/2} = \sqrt{a}$
$\sqrt[5]{a^3} = \left(\sqrt[5]{a}\right)^3$	$(a^{1/5})^3 = a^{\frac{1}{5}\cdot 3} = a^{3/5}$	$a^{3/5} = \sqrt[5]{a^3}$

En general:

Aplicando la definición y las propiedades de las raíces	**Para que se sigan cumpliendo las propiedades de las potencias**	**Para que estos dos resultados sean el mismo, conviene tomar**
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$(a^{1/n})^n = a^{\frac{1}{n}\times n} = a^1 = a$	$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$(a^{1/n})^m = a^{\frac{1}{n}\times m} = a^{m/n}$	$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Una ***potencia de exponente racional*** $a^{m/n}$ es igual a un radical donde:

- el **denominador** de la fracción es el **índice del radical;**
- el **numerador** de la fracción es el **exponente del radicando.**

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}\ ;\ a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo. Calculemos las siguientes potencias de exponente racional utilizando las propiedades de las raíces y las de las potencias.

a) $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$; $4^{3/2} = (2^2)^{3/2} = 2^{2\cdot\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

b) $8^{5/3} = \sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{32.768} = \sqrt[3]{32^3} = 32$; $8^{5/3} = (2^3)^{5/3} = 2^{3\cdot\frac{5}{3}} = 2^5 = 32$

EJERCICIOS

16. Escribe en forma radical las siguientes potencias de exponente racional.
a) $2^{1/2}$ b) $7^{-1/2}$ c) $7^{2/3}$ d) $9^{-1/3}$ e) $5^{0'5}$ f) $5^{10/5}$ g) $12^{0'2}$ h) $8^{-2/3}$

17. Escribe como potencias los siguientes radicales.
a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{7^{-1}}$ c) $\sqrt[3]{5^2}$ d) $\sqrt[3]{9^{-2}}$ e) $\sqrt[3]{13^5}$ f) $\sqrt[10]{13^5}$ g) $\sqrt[6]{5^{12}}$ h) $\sqrt[3]{5^{-2}}$

4.4. Propiedades de las raíces.

Las siguientes reglas indican como se opera con radicales. Para demostrarlas basta elevar a la potencia del índice los dos miembros y comprobar que el resultado es el mismo.

Veamos, por ejemplo, el valor de $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$:

Si elevamos al cuadrado y aplicamos la definición de raíz, $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 = 2\cdot 3 = 6$

Luego $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ es un número que, elevado al cuadrado, da 6; el número que cumple esta condición es $\sqrt{6}$

Por tanto, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$

Propiedad	Ejemplo	Descripción
$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\times b}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$	El **producto** de dos radicales del mismo índice es otro radical que tiene por índice el común y por radicando el producto de los radicandos.
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$	$\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{3}$	El **cociente** de dos radicales del mismo índice es otro radical que tiene por índice el común y por radicando el cociente de los radicandos.
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\left(\sqrt{6}\right)^3 = \sqrt{6^3} = \sqrt{216}$	La **potencia** de una raíz es otra raíz que tiene por índice el mismo y por radicando la potencia del radicando.
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{12}} = \sqrt[15]{12} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{12}}$	La **raíz** de una raíz es otra raíz que tiene por índice el producto de los índices y por radicando el mismo.

Estas propiedades permiten **introducir o sacar factores del radical y simplificar raíces.** Fíjate en los siguientes ejemplos.

Ejemplo.

- Introducir en la raíz los factores que están fuera en las siguientes expresiones: $2\sqrt{3}$ y $2\sqrt[3]{5}$.

$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{12} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$

$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8\cdot 5} = \sqrt[3]{40} \Rightarrow 2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$

- Sacar fuera de la raíz los factores posibles en las siguientes expresiones: $\sqrt{200}$ y $\sqrt[3]{250}$.

$\sqrt{200} = \sqrt{2^3\cdot 5^2} = \sqrt{2^2\cdot 5^2\cdot 2} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot 5\cdot\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3\cdot 2} = \sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2}$

EJERCICIOS

18. Realiza las siguientes operaciones utilizando radicales y potencias de exponente racional.
    a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ b) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$ c) $\sqrt{2}\cdot 8^{0'5}$ d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{15}$ e) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{3}$ f) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{8}$
19. Expresa como potencia y raíz única las siguientes expresiones.
    a) $\left(\sqrt{x}\right)^{1/3}$ b) $\sqrt{x}:\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^2}}$ e) $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ f) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}$
20. La raíz cuadrada de la raíz cúbica de un número positivo, ¿a qué equivale? Pon un ejemplo. Indica ahora cómo se calcula la raíz sexta del número positivo 15.625.
21. Si sabes calcular la raíz cuadrada de un número, ¿puedes hallar la raíz octava de cualquier número positivo? Aplícalo a $\sqrt[8]{65.536}$.
22. Introduce o saca factores del radical.
    a) $2\sqrt{5}$ b) $4\sqrt[3]{7}$ c) $5\sqrt{3}$ d) $5\sqrt[3]{2}$ e) $\sqrt{45}$ f) $\sqrt[3]{54}$ g) $\sqrt{1.200}$ h) $\sqrt[3]{500}$
23. Calcula las siguientes divisiones de radicales.
    a) $\sqrt{15}:\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}:\sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt{3}:\sqrt{4}$ d) $\sqrt{8}:\sqrt[4]{2}$ e) $\sqrt[3]{81}:\sqrt[3]{9}$ f) $\sqrt[3]{9}:\sqrt[6]{3}$
24. Calcula, sin utilizar la calculadora, las siguientes raíces.
    a) $\sqrt{0'25}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{0'216}$ d) $\sqrt{2^{-12}}$ e) $\sqrt[3]{7^6}$

4.5. Radicales semejantes.

Dos radicales son ***semejantes*** si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo. $\sqrt[3]{5}$, $6\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[3]{40}$ son radicales semejantes, pues $\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$.

Observa que para la obtención de radicales semejantes nos ayudamos sacando factores de las raíces.

Recuerda que las propiedades de las raíces hacían referencia al producto y cociente de éstas. Ahora además, si operamos con radicales semejantes, podremos realizar operaciones de sumas y restas; para ello es suficiente sacar factor común en tales expresiones.

Ejemplo. $6\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{40}=6\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{5}=(6-2)\sqrt[3]{5}=4\sqrt[3]{5}$

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(1+2+3-4)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

EJERCICIOS

25. Suma los siguientes números sacando previamente los factores posibles.
    a) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{500}+\sqrt{80}$ b) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}$
    c) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$ d) $2\sqrt[3]{81}+\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{3}-\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{24}$
26. Suma los siguientes radicales reduciéndolos previamente a radicales semejantes.
    a) $\sqrt{x}+\sqrt{xy^2}+\sqrt{xy^4}-\sqrt{xy^6}$ b) $\sqrt{5x}+\sqrt{45x}+\sqrt{180x}-\sqrt{80x}$ c) $\sqrt{24xy^2}-5\sqrt{6x^3}+\sqrt{486x^5y^4}$

4.6. Racionalización.

En las operaciones con radicales aparecen a veces fracciones con radicales en el denominador. ***Racionalizar*** consiste en hallar una **fracción equivalente** que no tenga en el denominador radicales. El proceso a seguir consiste en multiplicar por una expresión adecuada numerador y denominador.

- En aquellas fracciones en las que en el denominador figure una expresión del tipo $\sqrt{a}$, multiplicaremos numerador y denominador por la misma expresión $\sqrt{a}$.
- Las expresiones $a - \sqrt{b}$ y $a + \sqrt{b}$, y las del tipo $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ y $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, se dice que son ***conjugadas.*** En las fracciones cuyo denominador aparezca alguna de estas expresiones, las racionalizaremos multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador.

Ejemplo.

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{3\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2} = \frac{3\sqrt{2}+3}{2-1} = 3\sqrt{2}+3$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$$

EJERCICIOS

27. Racionaliza las siguientes fracciones.
    a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{x}}$ c) $\frac{5}{4\sqrt{3}}$ d) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$ e) $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ f) $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
28. Halla el valor de las siguientes expresiones.
    a) $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}$
29. Multiplica por su conjugada cada una de las expresiones siguientes.
    a) $2-\sqrt{x}$ b) $\sqrt{x}-2$ c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$
30. Racionaliza las siguientes fracciones.
    a) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ c) $\frac{9}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ d) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Calcula las siguientes potencias.
   a) 3^4 b) 4^5 c) 6^2 d) $(-4)^3$ e) 5^6 f) $(-5)^4$ g) 2^{10} h) $(-3)^6$
   a) 81 b) 1.024 c) 36 d) -64 e) 15.625 f) 625 g) 1.024 h) 729

2. Escribe en forma de una sola potencia.
   a) $2^3 \cdot 2^4$ b) $3^5 \cdot 3^3 \cdot 3^4$ c) $(-7)^2 \cdot (-7)^5$ d) $4^5 : 4^2$ e) $7^6 : 7^3$
   f) $x^9 \cdot x^4$ g) $(5^2)^3$ h) $[(-2)^2]^3$ i) $(-2)^9 : (-2)^5$ j) $(-9)^7 : (-9)^4$
   a) 2^7 b) 3^{12} c) $(-7)^7$ d) 4^3 e) 7^3
   f) x^{13} g) 5^6 h) $(-2)^6 = 2^6$ i) $(-2)^4 = 2^4$ j) $(-9)^3$

3. Escribe en forma de una sola potencia.
   a) $5^4 \cdot 3^4$ b) $2^2 \cdot 4^2$ c) $3^4 \cdot 4^4 \cdot 5^4$ d) $x^n \cdot y^n$ e) $(-5)^4 \cdot (-3)^4$
   f) $8^3 : 4^3$ g) $9^5 : 3^5$ h) $x^n : y^n$ i) $(-10)^4 : 2^4$ j) $(-6)^3 : (-3)^3$
   a) 15^4 b) 8^2 c) 60^4 d) $(x \times y)^n$ e) 15^4
   f) 2^3 g) 3^5 h) $(x : y)^n$ i) $(-5)^4 = 5^4$ j) 2^3

4. Completa los huecos.
   a) $2^{\ } \cdot 2^{11} = 2^{20}$ b) $(-4)^6 : (-4)^{\ } = (-4)^3$ c) $(-6)^3 \cdot (-6)^5 = (-6)^{\ }$ d) $[(-1)^7]^{\ } = (-1)^{21}$ e) $(3^{11})^2 = 3^{\ }$
   a) 9 b) 3 c) 8 d) 3 e) 22

5. Calcula las siguientes potencias.
   a) $5^6 \cdot 5^{-3}$ b) $(-4)^{-6} : (-4)^{-2}$ c) $[(-3)^2]^{-5}$ d) $4^3 \cdot 4^{-3}$
   e) $(-75)^3 : 5^3$ f) $(6^{-2})^{-5}$ g) $8^6 \cdot (-4)^6$ h) $(-3)^5 : (-3)^4$
   a) $5^3 = 125$ b) $(-4)^{-4} = 1/256$ c) $(-3)^{-10} = 1/59.049$ d) $4^0 = 1$
   e) $(-15)^3 = -3.375$ f) $6^{10} = 60.466.176$ g) $(-32)^6 = 1.073.741.824$ h) $(-3)^1 = -3$

6. Halla el valor de las siguientes expresiones.
   a) $2^2 - 4^2 : 8 + 3^0 =$ **3** b) $2 \cdot 3^2 - 5^2 : 5 + 5^3 =$ **138** c) $3^{-1} \cdot 3 - 3^0 + 1 - 25^1 =$ **-24**
   d) $3^2 : 2 - 1 - 3^2 : 2^{-1} =$ **-29/2** e) $\frac{3^2}{3} - \frac{2^{-1}}{3} + \frac{1}{3^{-1}} =$ **35/6** f) $\frac{2^2}{3} - 1 - \frac{3^2}{2^{-1}} =$ **-53/3**

7. Simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones y calcula su valor.
   a) $\frac{(-3)^2 \cdot (-5) \cdot (-2)^3}{-8}$ b) $\frac{(-3)^2 \cdot (-2)^3 \cdot 2^2}{12}$ c) $\frac{(-15)^3 \cdot (-3)^{-1}}{(-3)^5 \cdot 5^2}$ d) $\frac{(-6)^3 \cdot 9^2 \cdot (-2)^6}{(-12)^5}$
   a) $3^2 \times (-5) = -45$ b) $3 \times (-2^3) = -24$ c) $(-3)^{-3} \times 5 = -5/27$ d) $2^{-1} \times 3^2 = 9/2$

8. Escribe en notación científica los siguientes números.
   a) 1.230.000.000.000.000 b) 0'000000000001230 c) 14 billones d) 527 billonésimas
   a) $1'23 \times 10^{15}$ b) $1'23 \times 10^{-12}$ c) $1'4 \times 10^{13}$ d) $5'27 \times 10^{-10}$

9. Escribe en notación decimal los siguientes números.
   a) $5'213 \cdot 10^7$ b) $4'723 \cdot 10^{-6}$ c) $0'0042 \cdot 10^{11}$ d) $87'091 \cdot 10^{-5}$
   a) 52.130.000 b) 0'000004723 c) 420.000.000 d) 0'00087091

10. La constante de Planck, $6'626176 \cdot 10^{-34}$ es uno de los números positivos más pequeños que se utilizan en física. Escrito en notación decimal 0'000 … 6626176, ¿cuántos ceros hay después de la coma antes de la primera cifra significativa?

    $$\mathbf{6'626176 \times 10^{-34} = 0'\overbrace{0\ldots\ldots}^{33}06626176}$$

11. Efectúa las siguientes operaciones expresando el resultado en notación científica.
    a) $7'14 \cdot 10^4 + 6'234 \cdot 10^4$ b) $8'273 \cdot 10^4 - 1'496 \cdot 10^6$ c) $1'273 \cdot 10^{-3} \cdot 4'197 \cdot 10^5$
    d) $(5'12 \cdot 10^3) : (1'28 \cdot 10^{-5})$ e) $\frac{5'24 \cdot 10^{-5} - 3'7 \cdot 10^{-7}}{2'645 \cdot 10^3 + 3'9}$ f) $\frac{(2'6 \cdot 10^{-1}) \cdot (7'2 \cdot 10^3)}{(3'8 \cdot 10^7) \cdot (6'5 \cdot 10^{-4})}$
    a) $1'3374 \times 10^{15}$ b) $-1'41327 \times 10^6$ c) $5'342781 \times 10^2$
    d) 4×10^{-8} e) $1'96421155 \times 10^{-8}$ f) $7'5789473 \times 10^{-2}$

12. Expresa en forma de potencia las relaciones siguientes.

a) $\sqrt[3]{64}=4$ b) $\sqrt[n]{x}=y$ c) $\sqrt{x}=4$ d) $\sqrt[4]{625}=5$ e) $\sqrt[5]{97'65625}=2'5$

a) 4^3 = 64 **b) y^n = x** **c) 4^2 = x** **d) 5^4 = 625** **e) $2'5^5$ = 97'65625**

13. Halla aproximaciones por defecto y por exceso de las siguientes raíces con error menor que una décima.

a) $\sqrt{17}$ b) $\sqrt[3]{183}$ c) $\sqrt{97'8}$ d) $\sqrt[4]{3.025}$ e) $\sqrt[5]{-105}$ f) $\sqrt{-38'2}$

a) $4'1 < \sqrt{17} < 4'2$ **b) $5'6 < \sqrt[3]{183} < 5'7$** **c) $9'8 < \sqrt{97'8} < 9'9$**

d) $7'4 < \sqrt[4]{3.025} < 7'5$ **e) $-2'6 < \sqrt[5]{-105} < -2'5$** **f) No tiene raíces ¿por qué?**

14. Simplifica las siguientes expresiones radicales: $\sqrt[8]{2^4}$, $\sqrt[6]{125}$ y $\sqrt[5]{1.024}$

$\sqrt[8]{2^4}$ = $\mathbf{\sqrt{2}}$, $\sqrt[6]{125}$ = $\mathbf{\sqrt{5}}$ y $\sqrt[5]{1.024}$ = **4**

15. Reduce a común índice y ordena los siguientes radicales.

a) $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{4}$ y $\sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[5]{8}$, $\sqrt[6]{15}$ y $\sqrt[4]{9}$

a) $\sqrt[3]{7}$ = $\mathbf{\sqrt[15]{16.807}}$, $\sqrt[5]{4}$ = $\mathbf{\sqrt[15]{64}}$ y $\sqrt[5]{2}$ = $\mathbf{\sqrt[15]{8}}$ Þ $\mathbf{\sqrt[5]{2} < \sqrt[5]{4} < \sqrt[3]{7}}$

b) $\sqrt[5]{8}$ = $\mathbf{\sqrt[30]{2^{18}}}$, $\sqrt[6]{15}$ = $\mathbf{\sqrt[30]{15^5}}$ y $\sqrt[4]{9}$ = $\mathbf{\sqrt[30]{3^{15}}}$ Þ $\mathbf{\sqrt[5]{8} < \sqrt[6]{15} < \sqrt[4]{9}}$

16. Escribe en forma radical las siguientes potencias de exponente racional.

a) $2^{1/2}$ b) $7^{-1/2}$ c) $7^{2/3}$ d) $9^{-1/3}$ e) $5^{0'5}$ f) $5^{10/5}$ g) $12^{0'2}$ h) $8^{-2/3}$

a) $\mathbf{\sqrt{2}}$ **b)** $\mathbf{\frac{1}{\sqrt{7}}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt[3]{49}}$ **d)** $\mathbf{\frac{1}{\sqrt[3]{9}}}$ **e)** $\mathbf{\sqrt{5}}$ **f) 25** **g)** $\mathbf{\sqrt[5]{12}}$ **h)** $\mathbf{\frac{1}{4}}$

17. Escribe como potencias los siguientes radicales.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{7^{-1}}$ c) $\sqrt[3]{5^2}$ d) $\sqrt[3]{9^{-2}}$ e) $\sqrt[3]{13^5}$ f) $\sqrt[10]{13^5}$ g) $\sqrt[6]{5^{12}}$ h) $\sqrt[3]{5^{-2}}$

a) $3^{1/2}$ **b) $7^{-1/2}$** **c) $5^{2/3}$** **d) $9^{-2/3}$** **e) $13^{5/3}$** **f) $13^{1/2}$** **g) 5^2 = 25** **f) $5^{-2/3}$**

18. Realiza las siguientes operaciones utilizando radicales y potencias de exponente racional.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ b) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$ c) $\sqrt{2}\cdot 8^{0'5}$ d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{15}$ e) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{3}$ f) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{8}$

a) 8 **b) 3** **c) 4** **d)** $\mathbf{\sqrt[6]{1.800}}$ @ **3'49** **e)** $\mathbf{\sqrt[15]{864}}$ @ **1'57** **f)** $\mathbf{\sqrt[15]{16.384}}$ @ **1'91**

19. Expresa como potencia y raíz única las siguientes expresiones.

a) $\left(\sqrt{x}\right)^{1/3}$ b) $\sqrt{x}:\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^2}}$ e) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ f) $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

a) $x^{1/6}$; $\sqrt[6]{x}$ **b) $x^{1/6}$; $\sqrt[6]{x}$** **c) $x^{37/30}$; $\sqrt[30]{x^{37}}$** **d) $x^{2/15}$; $\sqrt[15]{x^2}$** **e) $x^{-3/2}$; $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$** **f) $x^{2/3}$; $\sqrt[3]{x^2}$**

20. La raíz cuadrada de la raíz cúbica de un número positivo, ¿a qué equivale? Pon un ejemplo. Indica ahora cómo se calcula la raíz sexta del número positivo 15.625.

Se deja para que lo resuelva el alumno.

21. Si sabes calcular la raíz cuadrada de un número, ¿puedes hallar la raíz octava de cualquier número positivo? Aplícalo a $\sqrt[8]{65.536}$.

Se deja para que lo resuelva el alumno.

22. Introduce o saca factores del radical.

a) $2\sqrt{5}$ b) $4\sqrt[3]{7}$ c) $5\sqrt{3}$ d) $5\sqrt[3]{2}$ e) $\sqrt{45}$ f) $\sqrt[3]{54}$ g) $\sqrt{1.200}$ h) $\sqrt[3]{500}$

a) $\mathbf{\sqrt{20}}$ **b)** $\mathbf{\sqrt[3]{448}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{75}}$ **d)** $\mathbf{\sqrt[3]{250}}$ **e)** $\mathbf{3\sqrt{5}}$ **f)** $\mathbf{3\sqrt[3]{2}}$ **g)** $\mathbf{20\sqrt{3}}$ **h)** $\mathbf{5\sqrt[3]{4}}$

23. Calcula las siguientes divisiones de radicales.

a) $\sqrt{15}:\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}:\sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt{3}:\sqrt{4}$ d) $\sqrt{8}:\sqrt[4]{2}$ e) $\sqrt[3]{81}:\sqrt[3]{9}$ f) $\sqrt[3]{9}:\sqrt[6]{3}$

a) $\mathbf{\sqrt{5}}$ @ **2'24** **b)** $\mathbf{\frac{1}{2\sqrt[6]{2}}}$ @ **0'45** **c)** $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ @ **0'87** **d)** $\mathbf{2\sqrt[4]{2}}$ @ **2'38** **e)** $\mathbf{\sqrt[3]{9}}$ @ **2'08** **f)** $\mathbf{\sqrt{3}}$ @ **1'73**

24. Calcula, sin utilizar la calculadora, las siguientes raíces.

a) $\sqrt{0'25}$ b) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{0'216}$ d) $\sqrt{2^{-12}}$ e) $\sqrt[3]{7^6}$

a) 1/2 = 0'5 **b) 1/2 = 0'5** **c) 3/5 = 0'6** **d) 1/64 = 0'015625** **e) 49**

25. Suma los siguientes números sacando previamente los factores posibles.

a) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{500}+\sqrt{80} = \mathbf{-\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486} = \mathbf{6\sqrt{6}}$

c) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16} = \mathbf{\sqrt[3]{2}}$ d) $2\sqrt[3]{81}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{24} = \mathbf{\frac{83}{15}\sqrt[3]{3}}$

26. Suma los siguientes radicales reduciéndolos previamente a radicales semejantes.

a) $\sqrt{x}+\sqrt{xy^2}+\sqrt{xy^4}-\sqrt{xy^6}$ b) $\sqrt{5x}+\sqrt{45x}+\sqrt{180x}-\sqrt{80x}$ c) $\sqrt{24xy^2}-5\sqrt{6x^3}+\sqrt{486x^5y^4}$

a) $\mathbf{(1+y+y^2-y^3)\sqrt{x}}$ **b)** $\mathbf{6\sqrt{5x}}$ **c)** $\mathbf{(4y-5x+9x^2y^2)\sqrt{6x}}$

27. Racionaliza las siguientes fracciones.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{x}}$ c) $\frac{5}{4\sqrt{3}}$ d) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$ e) $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ f) $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

a) $\mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ **b)** $\mathbf{\frac{6\sqrt{x}}{x}}$ **c)** $\mathbf{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$ **d)** $\mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$ **e)** $\mathbf{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{3}}$ **f)** $\mathbf{\frac{2\sqrt{x}-x}{x}}$

28. Halla el valor de las siguientes expresiones.

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}$

a) $\mathbf{\frac{3\sqrt{2}+1}{2}}$ **b)** $\mathbf{\frac{12\sqrt{7}-7\sqrt{2}}{28}}$ **c)** $\mathbf{\frac{4\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{6}}$ **d)** $\mathbf{\frac{5\sqrt{3}}{6}}$

29. Multiplica por su conjugada cada una de las expresiones siguientes.

a) $2-\sqrt{x}$ b) $\sqrt{x}-2$ c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

a) $\mathbf{4-x}$ **b)** $\mathbf{x-4}$ **c)** $\mathbf{x-y}$

30. Racionaliza las siguientes fracciones.

a) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ c) $\frac{9}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ d) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

a) $\mathbf{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ **b)** $\mathbf{2\left(\sqrt{35}+\sqrt{15}\right)}$ **c)** $\mathbf{\frac{9\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}}$ **d)** $\mathbf{\frac{1+2\sqrt{x}+x}{1-x}}$