

## Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Hallar los sucesos de un experimento aleatorio y realizar operaciones con ellos.
- Determinar si dos sucesos son compatibles o incompatibles.
- Calcular la probabilidad de un suceso mediante la regla de Laplace.
- Conocer las propiedades de la probabilidad.
- Hallar la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto.
- Hallar probabilidades de sucesos dependientes e independientes.
- Aplicar la probabilidad a situaciones de la vida cotidiana.

Antes de empezar.

1. Experimentos aleatorios ..... pág. 204  
Espacio muestral y sucesos  
Operaciones con sucesos  
Sucesos incompatibles  
Recta que pasa por dos puntos
2. Probabilidad de un suceso ..... pág. 206  
La regla de Laplace  
Frecuencia y probabilidad  
Propiedades de la probabilidad  
Calcular probabilidades
3. Experimentos compuestos ..... pág. 208  
Sucesos compuestos  
Regla de la multiplicación  
Extracciones con y sin devolución
4. Probabilidad condicionada ..... pág. 209  
Sucesos dependientes e independientes  
Diagramas de árbol  
Probabilidad total  
Probabilidad "a posteriori"

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor



## Antes de empezar

**EuroMillones** €  
**55 millones de**  
 18/01/08 un único acertante podría ganar

El juego más apasionante para hacerte millonario  
**La Quiniela**

**ADEMÁS.....**  
 reintegros, aproximaciones, centenas, últimas cifras.  
 1 de cada 3 décimos tiene premio

**BOTRO PRIMITIVA**

Este jueves por 3 euros  
**1.200.000**

**BonoLoto**  
**717**  
 Miles de € **VIERNES 18/01/08**

un único acertante podría ganar  
**El Quinigol BOTE**  
**219** 20/01/08 Miles de € **JORNADA: 32ª**

un único acertante podría ganar  
**Quíntuple Plus 43.000 €**  
 20/01/08 **Lototurf 1.430.000 €**

Seguro que de una forma u otra en muchas ocasiones has manejado probabilidades y no siempre en la escuela. Expresiones como "probablemente lloverá mañana" o como "es probable que lo que diga sea verdad" son bastante comunes en el lenguaje cotidiano.

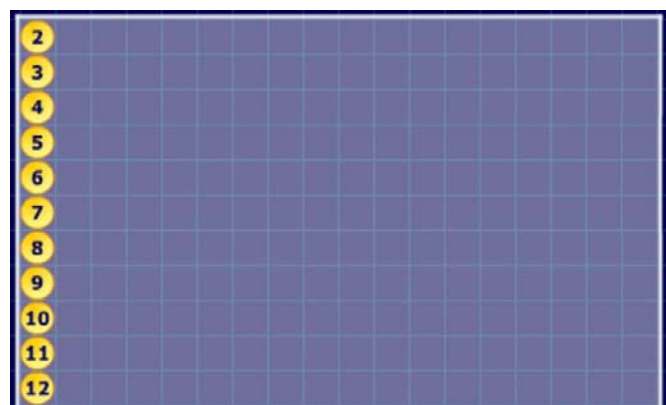
**Transmisión hereditaria.** Por ejemplo la sordera, una pareja de sordos , para cada hijo que tengan, la probabilidad de que sea también sordo es de 0.25. El grupo sanguíneo de los hijos depende del de los padres con unas probabilidades que se pueden calcular. Las enfermedades sanguíneas genéticas supera las 3500, y continuamente se descubren más.

**Probabilidad en el lenguaje ordinario:** Casual, accidental, eventual, fortuito, impensado, imprevisible, inesperado, inopinado, ocasional, por suerte, por chiripa, por rebote, de rechazo, sin querer, sin intención.

**Los juegos de azar.** Al jugar al dominó, a las cartas, a los dados, hay muchas ocasiones en las que "nos la jugamos", y de seguro barajamos si es más o menos probable que hagamos bien o mal.

### Investiga

Se tiran dos dados la ficha cuyo número coincide con la suma de los resultados avanza una casilla. ¿Todas tienen la misma probabilidad de ganar? , ¿por cuál apostarías?



# Probabilidad

## 1. Experimentos aleatorios

### Espacio muestral y sucesos.

Al extraer una carta de una baraja, lanzar una moneda, tirar un dado, y en otros ejemplos análogos, no podemos saber de antemano el resultado que se va a obtener. Son experimentos **aleatorios**, aquellos en los que no se puede predecir el resultado y de ellos se trata aquí.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral**, y cada uno de esos posibles resultados es un **suceso elemental**.

- ✓ Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral, se verifica cuando ocurre cualquiera de los sucesos elementales que lo forman.

Hay un suceso que se verifica siempre, el **suceso seguro** que es el mismo espacio muestral.

- Al tirar una moneda y un dado, una forma de representar el espacio muestral es:



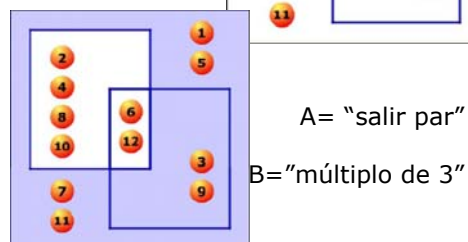
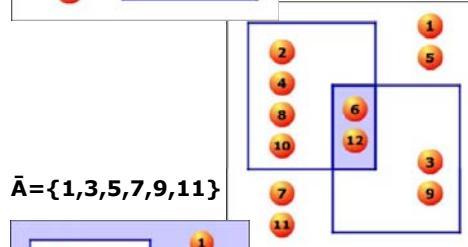
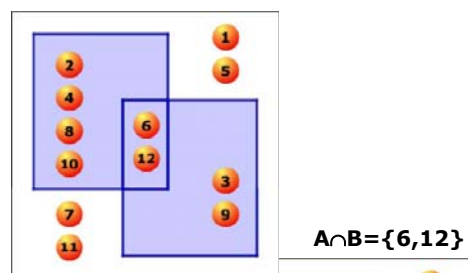
O bien: (cara, 1) (cara, 2),...

- Al tirar tres monedas (o una moneda tres veces) el espacio muestral es:



$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$



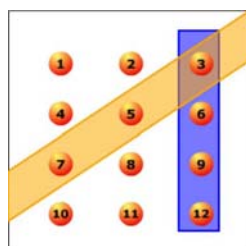
### Operaciones con sucesos

Con los sucesos de un experimento aleatorio se pueden realizar distintas operaciones. Dados dos sucesos A y B:

- La **unión** de A y B,  **$A \cup B$** , es el suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B. Ocurre cuando sucede A ó sucede B ó ambos.
- La **intersección**,  **$A \cap B$** , es el suceso formado por los sucesos elementales comunes a A y B. Se verifica cuando ocurren A y B a la vez.
- La **diferencia** de A y B,  **$A \setminus B$** , es el suceso formado por los sucesos elementales de A que no están en B. Ocurre si sucede A pero no B.

El suceso **contrario** a uno dado A, está formado por todos los sucesos del espacio muestral que no están en A. Es el que ocurre cuando no sucede A y se indica  **$\bar{A}$** .

- El suceso **contrario** del **seguro** es el **suceso imposible**, que no se verifica nunca, se indica con  $\emptyset$ .

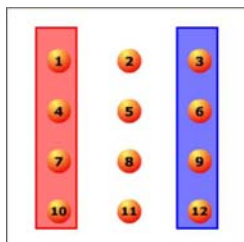


## Sucesos compatibles

Cuando sale 3 ocurren ambos.

## Sucesos incompatibles

No ocurren a la vez, pero no son contrarios



## Sucesos compatibles e incompatibles

En un experimento aleatorio hay sucesos que pueden ocurrir a la vez y sucesos que no.

- Dos sucesos se dicen **compatibles** si tienen algún suceso elemental común. En este caso  $A \cap B \neq \emptyset$ , pueden ocurrir a la vez.
- Dos sucesos se dicen **incompatibles** si no tienen ningún suceso elemental común, en este caso  $A \cap B = \emptyset$  y no pueden ocurrir a la vez

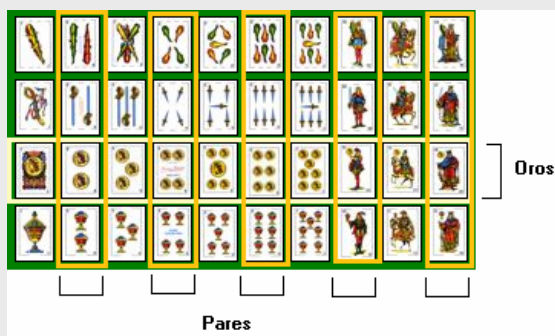
Un suceso y su contrario son siempre incompatibles, pero dos sucesos incompatibles no siempre son contrarios, como se puede ver en el ejemplo de la izquierda.

## EJERCICIOS resueltos

1. En una bolsa tenemos tres bolas numeradas como 1, 2 y 3. Consideramos el experimento de extraer una bola y anotar su número. Escribe todos los sucesos posibles. Indica cuáles de ellos son los elementales.

$\{\}, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}$  y  $\{3\}$ . Los tres últimos son los elementales.

2. En una baraja, bajo el experimento de extraer una carta, considera los sucesos a) par, b) oros, c) par y oros, d) par u oros, e) par menos oros, f) oros menos par y g) no par



Observa la imagen,

- a) hay 20 cartas rodeadas de naranja, las pares,
- b) otras 20 que no, las impares,
- c) 10 oros.
- d) El 2, 4, 6, 10 y 12 de oros son pares.
- e) Todos los oros y pares juntos son 25 cartas (todas las rodeadas por amarillo o naranja)
- f) A los 2, 4, 6, 10 y 12 hay que quitar el 2, 4, 6, 10 y 12 de oros, a 20 cartas se le quitan 5 quedan 15
- g) El 1, 3, 5, 7 y 11 de oros.

3. Al tirar un dado consideramos los sucesos:  $A = \{\text{Par}\}$ ,  $B = \{\text{mayor de } 3\}$ , y  $C = \{\text{impar}\}$ . De los tres pares de sucesos posibles AB, AC y BC, indica cuáles son compatibles y/o incompatibles:

AB compatibles, cuando salga el 4 o el 6.

AC incompatibles, si es par no puede ser impar.

BC compatibles, cuando salga el 5.



## 2. Probabilidad de un suceso

### La regla de Laplace

Cuando un experimento aleatorio es regular, es decir que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir ó son **equiprobables**, para calcular la probabilidad de un suceso cualquiera A, basta contar y hacer el cociente entre el nº de sucesos elementales que componen A (**casos favorables**) y el nº de sucesos elementales del espacio muestral (**casos posibles**).

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}$$

Este resultado se conoce como **regla de Laplace**. Observa que para poder aplicarla es necesario que todos los casos posibles sean igualmente probables.

### Frecuencia y probabilidad

Como sabes la **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que aparece cuando se repite un experimento aleatorio, y la **frecuencia relativa** es la frecuencia absoluta dividida por el número de veces, **n**, que se repite el experimento aleatorio.

Cuando este número **n** es muy grande, la frecuencia relativa con que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo.

Este resultado, conocido como **ley de los grandes números**, nos lleva a definir la probabilidad de un suceso como ese número hacia el que tiende la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.

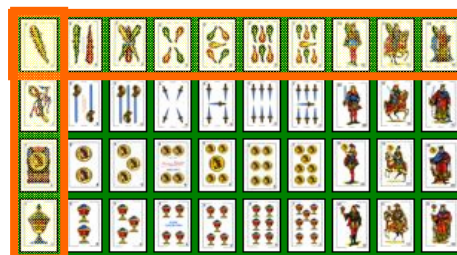
### Propiedades de la probabilidad

Vista la relación entre frecuencia relativa y probabilidad, se cumple que:

- La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1.
- La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible 0.
- La probabilidad de la unión de dos sucesos **incompatibles** A y B es  **$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$** .

Y de éstas se deduce además que:

- La probabilidad del contrario es  **$p(A) = 1 - P(A)$**
- La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es  **$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$**



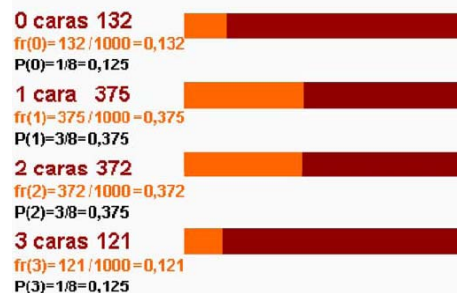
Extraemos una carta de una baraja de 40:

$$P(\text{bastos}) = 10/40 = 0,25$$

$$P(\text{as}) = 4/40 = 0,1$$

$$P(\text{as de bastos}) = 1/40 = 0,025$$

### Resultados obtenidos en la simulación del lanzamiento de tres monedas 1000 veces



Sospechamos que un dado está trucado y nos entretenemos en tirarlo 100 veces y anotar los resultados, obteniendo:

|    |     |     |      |      |     |     |
|----|-----|-----|------|------|-----|-----|
|    | 1   | 2   | 3    | 4    | 5   | 6   |
| F  | 20  | 30  | 15   | 15   | 10  | 10  |
| Fr | 0.2 | 0.3 | 0.15 | 0.15 | 0.1 | 0.1 |

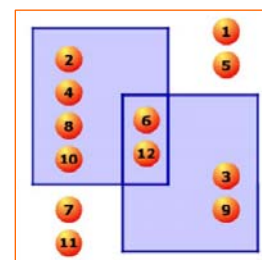
Concluimos,  $P(1)=P(2)=\dots$  ya no es  $1/6$ , sino aproximadamente  $P(1)=0,2$ ;  $P(2)=0,3$  etc. Aquí estaremos usando la frecuencia relativa como probabilidad, en lo sucesivo lo tendremos en cuenta al jugar con ese dado.

A="par"                      B="múltiplo de 3"

$$P(A) = 6/12 = 1/2 \quad P(B) = 4/12 = 1/3$$

$$P(\bar{A}) = 1/2 \quad p(B) = 2/3$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$



## EJERCICIOS resueltos

4. Tenemos un dado de 20 caras  $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6,6\}$  perfectamente equilibrado ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los resultados posibles}

$$P(1)=1/20=0,05 \quad P(2)=2/20=0,1 \quad P(3)=3/20=0,15$$

$$P(4)=4/20=0,2 \quad P(5)=5/20=0,25 \quad P(6)=5/20=0,25$$

5. Si lanzamos el dado anterior 1000 veces, ¿Cuántas veces se espera que salga cada resultado aproximadamente?

El 1 saldrá alrededor de 50 veces. El 2, alrededor de 100. El 3 alrededor de 150, el 4 alrededor de 200, el 5 alrededor de 250 y el 6 alrededor de 250.

6. Para el dado  $\{1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5\}$  de 20 caras calcula las probabilidades siguientes:

- a)  $P(\text{par})=8/20=0,4$  Hay tres 2 y cinco 4, 8 pares  
 b)  $P(\text{mayor de 3})=11/20=0,55$  11 posibles entre 20  
 c)  $P(\text{par y mayor de 3})=5/20=0,25$  Solo el 4 es par y mayor de 3, y hay 5  
 d)  $P(\text{par o mayor de 3})=14/20=0,7$  Si sale 2, 4 ó 5  
 e)  $P(\text{par menos mayor de 3})=3/20=0,15$  Solo si sale 2  
 f)  $P(\text{mayor de 3 menos par})=6/20=0,3$  Si sale 5  
 g)  $P(\text{no par})=12/20=0,6$  Si sale 1, 3 ó 5

7. En una bolsa tenemos 7 bolas rojas, 9 bolas azules y 4 verdes. Extraemos una bola, calcula la probabilidad de que

- a) No sea roja  $P(\text{no R})=13/20=0,65$  Hay 20 bolas, 7 rojas, 13 no rojas  
 b) Sea verde  $P(V)=4/20=0,2$  4 verdes  
 c) Sea roja o azul  $P(\text{RUA})=16/20=0,8$   $7+9=16$  rojas ó azules

8. En un grupo, el 40% juega baloncesto y el 60% fútbol, sabiendo que el 85% practica alguno de los dos deportes, ¿qué porcentaje juega a los dos?

$$P(F)=0,60 \quad P(B)=0,40 \quad P(F \cup B)=0,85$$

$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B)$$

$$0,85 = 0,60 + 0,40 - P(F \cap B) \quad P(F \cap B) = 0,15 \quad 15\%$$



9. En el grupo A hay 18 personas de las que 10 hablan inglés y 8 no; en el B hay 12 personas de las que 3 hablan inglés y 9 no; en el C hay 10 personas 3 que hablan inglés y 7 que no. Se elige al azar una persona de cada grupo, calcula la probabilidad de que de las tres, al menos una hable inglés.

En los siete sucesos de la derecha hay al menos una persona que habla inglés, en vez de mirar sus probabilidades, es más cómodo calcular la **del contrario, que ninguno de los tres hable inglés**, para escoger al del A cuento con 8 personas que no hablan inglés, para el del B con 9 y para el del C con 7, así los casos favorables de que ninguno hable inglés son  $8 \cdot 9 \cdot 7$  y los casos posibles  $18 \cdot 12 \cdot 10$

$$P(\text{al menos uno hable inglés}) =$$

$$= 1 - P(\text{ninguno habla inglés}) =$$

$$= 1 - 8 \cdot 9 \cdot 7 / 18 \cdot 12 \cdot 10 = 1 - 7/30 = \mathbf{23/30}$$

| Del A             | Del B             | Del C             |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| 😊 I speak English | 😊 I speak English | 😊 I speak English |
| 😊 I speak English | 😊 I speak English | 😞 No hablo Inglés |
| 😊 I speak English | 😞 No hablo Inglés | 😊 I speak English |
| 😞 No hablo Inglés | 😊 I speak English | 😊 I speak English |
| 😊 I speak English | 😞 No hablo Inglés | 😞 No hablo Inglés |
| 😞 No hablo Inglés | 😊 I speak English | 😞 No hablo Inglés |
| 😞 No hablo Inglés | 😞 No hablo Inglés | 😊 I speak English |

# Probabilidad

## 3. Experimentos compuestos

### Sucesos compuestos

Un **experimento compuesto** es el que está formado por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva.

Para calcular el espacio muestral de un experimento compuesto conviene, en muchas ocasiones, hacer un diagrama de árbol que represente todas las opciones. Cada resultado viene dado por un camino del diagrama. Observa en el ejemplo cómo construir el diagrama de árbol.

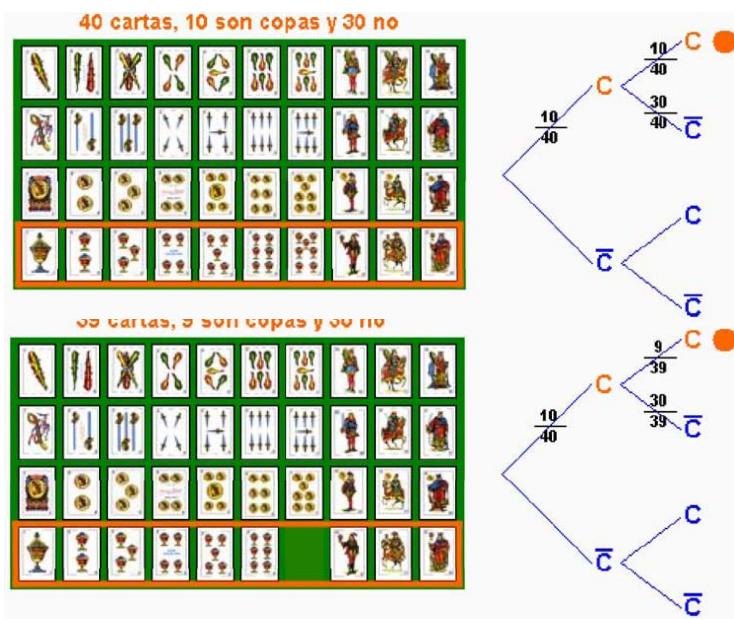
### Regla de la multiplicación

Si te fijas en el ejemplo anterior, al indicar la probabilidad de cada rama del camino, se obtiene la probabilidad de cada suceso compuesto calculando el producto de los respectivos sucesos simples.

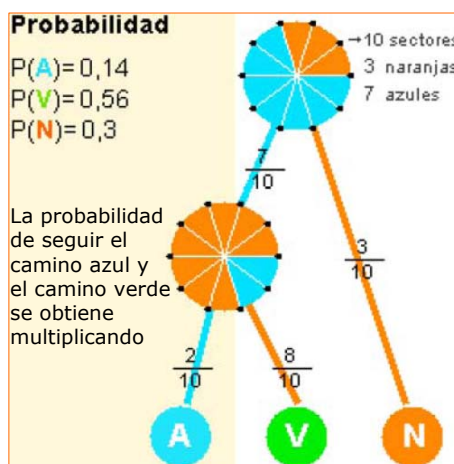
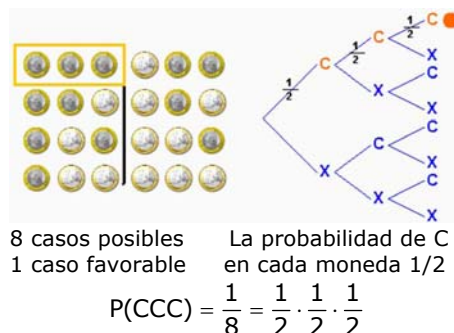
Para calcular la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto se **multiplican las probabilidades** de los sucesos simples que lo forman.

### Extracciones con devolución y sin devolución

Un ejemplo de experimento compuesto lo encontramos en la extracción sucesiva de cartas o de bolas de una urna, ... , en estos casos hay que considerar si se devuelve la carta, bola, etc. antes de sacar la siguiente o no.



Tiramos una moneda tres veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres caras?



Sacamos sucesivamente dos cartas de una baraja de 40, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?

La probabilidad de que la primera carta sea de copas es  $\frac{10}{40}$ .

Para la segunda la probabilidad depende de que devolvamos la primera carta al mazo o no.

### Con devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$

### Sin devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$



## 4. Probabilidad condicionada

### Sucesos dependientes e independientes

Cuando se realizan observaciones de varios sucesos puede que uno dependa del otro.

La probabilidad de que ocurra un suceso B cuando está ocurriendo otro, A, se llama **condicionada**, y se expresa  $p(B/A)$ .

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dados dos sucesos, se dice que son **independientes** si la presencia del uno no influye en la probabilidad del otro, es decir, **si**  $P(B/A)=P(B)$ ; en caso contrario son **dependientes**.

- ✓ A y B independientes:  $P(B/A)=P(B)$  y al tener en cuenta la formula anterior para  $p(B/A)$ ,  
A y B independientes:  $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$

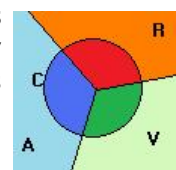
### Probabilidad total

Como has podido ver, en los experimentos compuestos se puede hacer un diagrama en árbol, y cada resultado viene dado por un camino en dicho árbol. Para calcular una probabilidad solo hay que dibujar el camino correspondiente, y el producto de las probabilidades de todas la ramas que lo forman será el valor que buscamos.

Así si ocurre A y luego B:  $P(A \text{ y } B)=P(A) \cdot P(B/A)$

- ✓ La suma de las probabilidades de todos los caminos es igual a **1**

Consideremos los sucesos representados por la imagen; R="Rojo", V="Verde" y A="Azul" son tres sucesos incompatibles y tales que la unión forma todo el espacio muestral. Sea C="círculo" un suceso cualquiera. Entonces:



$$P(C) = P(R) \cdot P(C/R) + P(V) \cdot P(C/V) + P(A) \cdot P(C/A)$$

Este resultado es lo que se conoce como **probabilidad total**.

### Probabilidad "a posteriori"

En ocasiones interesa conocer la  $P(A/S)$ , es decir cuando ya sabemos que ha ocurrido S en la segunda experiencia, nos preguntamos la probabilidad de que se haya llegado a través de A.

Se trata de una probabilidad condicionada:

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{p(S)}$$

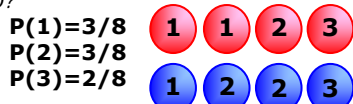
Expresión conocida como **Fórmula de Bayes**.

$$P(B/A) = \frac{\text{Casos favorables de B ocurriendo A}}{\text{Casos posibles ocurriendo A}} = \frac{\text{Casos favorables de A y B}}{\text{Casos favorables de A}}$$

$$= \frac{\frac{\text{Casos favorables de A y B}}{\text{Casos favorables en total}}}{\frac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos favorables en total}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

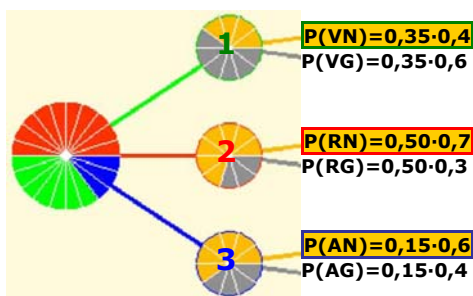
Los sucesos "el día está gris" y "llevar paraguas" influyen entre sí. Los sucesos "estudiar" y "aprobar", son sucesos que se favorecen; cuando se estudia, aumenta la probabilidad de aprobar.

En una urna tenemos bolas rojas y azules numeradas como en la figura. ¿Cuál es la probabilidad de sacar cada número?



Si sabemos que la bola es roja

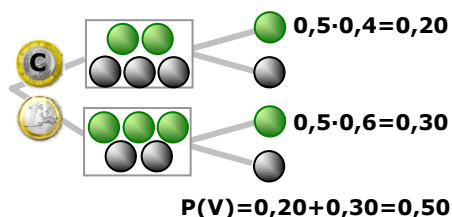
$P(1/R)=2/4$  (de 4 rojas hay 2 con 1)  
 $P(1) < P(1/R)$  se favorecen  
 $P(2/R)=1/4$  (de 4 rojas hay 1 con 2)  
 $P(2) > P(2/R)$  se desfavorecen  
 $P(3/R)=1/4$  (de 4 rojas hay 1 con 3)  
 $P(3)=P(3/R)$  son independientes.



Suma = 1

$$P(N) = P(V) \cdot P(N/V) + P(R) \cdot P(N/R) + P(A) \cdot P(N/A) = 0,35 \cdot 0,4 + 0,50 \cdot 0,7 + 0,15 \cdot 0,6 = 0,58$$

Se tira una moneda, según salga cara o cruz se saca una bola de la urna indicada. Si la bola salió verde, ¿cuál es la probabilidad de que saliese cara?



$$P(C/V) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,6} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

## EJERCICIOS resueltos

10. Lanzamos un dado de 4 caras  $\{1,2,3,4\}$  y otro de 10  $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4\}$ . Cuál es la probabilidad de obtener dos tres. ¿Y dos cuatros?

$$P(3 \text{ y } 3) = 1/4 \cdot 3/10 = 3/40 = 0.075$$

$$P(4 \text{ y } 4) = 1/4 \cdot 4/10 = 4/40 = 0.1$$

11. En una bolsa tenemos 5 bolas numeradas del 1 al 5. Extraemos dos bolas, a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 y un 3 si no devolvemos las bolas sacadas? b) ¿y cuál si las devolvemos?

Sin devolución  $P = 1/5 \cdot 1/4 = 0.05$   
 Con devolución  $P = 1/5 \cdot 1/5 = 1/25 = 0.04$

12. Al tirar dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 10 puntos?.

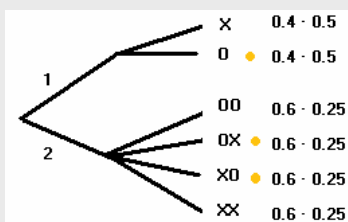
Se obtienen 10 o más puntos en 46 64 55 56 65 y 66.  
 Son 6 casos, cada uno de ellos con probabilidad  $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$ .  
 $P(\text{al menos 10 puntos}) = 6 \cdot 1/36 = 1/6$   
 O bien, hay seis casos favorables de entre los 36 posibles,  $P = 6/36 = 1/6$

13. Tiramos una moneda trucada en la que  $P(C)=0,6$  y  $P(X)=0,4$ . Si sale cara tiramos un dado  $\{1,2,3,4\}$  de 4 caras y si sale cruz uno  $\{1,2,3,4,5,6\}$  de seis. ¿Tenemos la misma probabilidad de que salga 1 después de que salga cara o cruz?. ¿Cuánto vale en cada caso?. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 1?

No,  $P(C1)=0,6 \cdot 1/4 = 3/20$        $P(X1) = 0,4 \cdot 1/6 = 2/30$   
 $P(1) = P(C1) + P(X1) = 3/20 + 2/30 = 13/60$

14. Tenemos un dado  $\{1,1,1,1,2,2,2,2,2,2\}$  de 10 caras. Si sacamos un 1 tiramos una moneda, y dos si sacamos un 2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara?

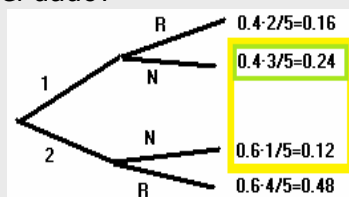
Los casos 10, 20X y 2X0 tienen una cara.  
 La suma de las probabilidades es la solución:  
 $P = 0.2 + 0.15 + 0.15 = 0.5$



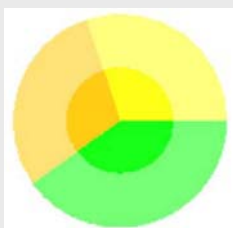
15. Tenemos un dado  $\{1,1,1,1,2,2,2,2,2,2\}$  de 10 caras. Tiramos el dado, si sale 1 sacamos una bola de  $\{RRNNN\}$  y si sacamos un 2 sacamos una de  $\{RRRRN\}$ . Salió N, ¿Cuál es la probabilidad de que fuera con un 1 del dado?

Observa la figura, la probabilidad de que haya salido 1N entre lo que puede ser que haya salido 1N ó 2N es:

$$P(1/N) = \frac{0.24}{0.24 + 0.12} = \frac{0.24}{0.36} = 0.666$$



16. La probabilidad de acertar en amarillo en la diana de la figura es 0,3, en verde 0,4 y en naranja 0,3. Además si se acierta en amarillo la probabilidad de que sea en brillo es 0,7; la probabilidad de brillo en verde es 0,6 y en naranja 0,3.



- a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar en la zona brillante?

$$P(\text{Brillo}) = P(A) \cdot P(\text{Brillo}/A) + P(V) \cdot (P(\text{Brillo}/V) + P(N) \cdot P(\text{Brillo}/N))$$

$$P(\text{Brillo}) = 0,3 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,21 + 0,24 + 0,15 = 0,60$$

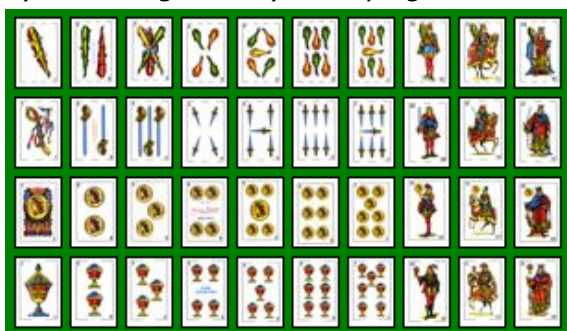
- b) Si se acertó en la zona brillante, ¿cuál es la probabilidad de que fuese en amarillo.

$$P(A/\text{Brillo}) = P(A \text{ y Brillo}) / P(\text{Brillo}) = 0,3 \cdot 0,7 / 0,60 = 0,21 / 0,60 = 0,35$$



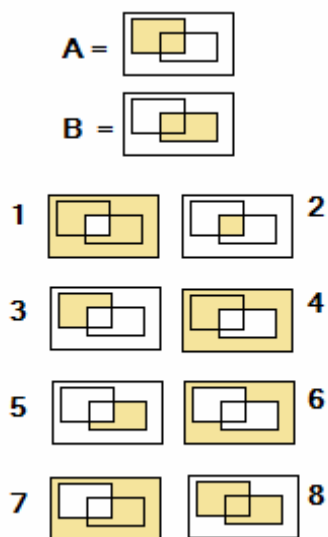
## Para practicar

- Existen en el mercado varios tipos de dados, aunque el más normal sea el cúbico de seis caras. Los hay de 4, 6, 10, 12, y 20 caras. En general, van numerados del 1 al  $n^{\circ}$  de caras que tienen. Escribe el suceso "Par" para cada uno de ellos.
- Tenemos un dado de 4 caras numeradas del 1 al 4. Lo tiramos una vez. Escribe el suceso seguro, el imposible, y todos los posibles clasificados por su tamaño.
- Tenemos un dado de 6 caras blanco, en el que se han escrito en sus caras los siguientes números  $\{1,1,1,2,2,3\}$ . Escribe todos los sucesos posibles.
- En la escuela municipal de un pueblo hay clases para deportes de equipo de baloncesto, fútbol y voleibol. Hay 100 inscritos en deportes de equipo, 70 van a clases de fútbol, 60 de baloncesto y 40 a fútbol y baloncesto. ¿Cuántos van sólo a voleibol?
- Determina el número de cartas, en una baraja española de 40, que:
  - Con numeración menor que 4.
  - De bastos y mayores que 4.
  - Figuras de oros o bastos.
- En una baraja española, cuenta las cartas de los sucesos :
  - Oros y sietes
  - Oros o sietes
  - Siete de oros
  - Figuras
  - Oros o figuras
  - Oros y figuras
- Para un dado de seis caras  $\{1,2,3,4,5,6\}$ , escribe los sucesos:
  - Par
  - No par
  - Par y mayor que 3
  - Par o mayor que 3
  - Par menos mayor que 3
  - El contrario de (par y mayor que 3)
- Tenemos un dado con los números  $\{1,1,1,2\}$ . Si lo lanzamos 100 veces, alrededor de que cantidad de veces saldrá cada uno de los posibles resultados.
- Tenemos un dado de diez caras numeradas como  $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4\}$ . ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales?.
- Tenemos una ruleta de 10 posiciones, 3 rojas, 4 verdes, 2 negras y una azul. ¿Cuál es la probabilidad de que al girarla se obtenga cada uno de los colores?
- Si lanzamos dos monedas podremos obtener uno de estos 4 resultados  $\{OO, XO, OX, XX\}$ . Puedes escribir de esta forma los posibles para tres monedas. Y para 4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras en cada uno de los experimentos?

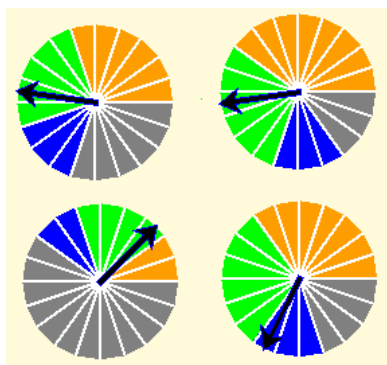


# Probabilidad

12. Sabiendo que  $P(A)=0.5$ ,  $p(B)=0.7$  y  $P(A \cap B)=0.3$ , calcula  $P(1)$ ,  $P(3)$ ,  $P(4)$ ,  $P(5)$ ,  $P(6)$ ,  $P(7)$  y  $P(8)$ ,



13. ¿Cuál es la probabilidad de obtener naranja, verde, azul o gris en cada una de las siguientes ruletas?



14. Tenemos un dado de 10 caras de esta forma  $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$ . Y dos urnas, una  $A=\{R, R, R, V, V\}$  y  $B=\{R, V, V, V, V\}$ . Lanzamos el dado, si sale 1 extraemos una bola de A, y si sale 2 de B. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una roja de A? ¿Y una roja de B? ¿Y una verde de A?

15. En una bolsa hay las siguientes bolas  $\{1,2,2,3,3\}$ . Extraemos primero una bola y la devolvemos para extraer otra. Calcula la probabilidades siguientes:  $P(1,1)$ ,  $P(1,2)$ ,  $P(1,3)$ .

16. Si para la segunda extracción del ejercicio anterior no devolvemos la 1ª bola, ¿Cuál es el valor de las probabilidades ahora?

17. Calcula las probabilidades de obtener 2oros al extraer dos cartas de una baraja española en los casos de devolver y de no devolver la 1ª carta a la baraja antes de extraer la 2ª.

18. Tenemos un dado de 10 caras de la forma  $\{1,1,1,1,2,2,2,2,2,2\}$ , y dos urnas, una  $A=\{R,R,R,V,V\}$  y otra  $B=\{R,V,V,V,V\}$ . Lanzamos el dado, si sale 1 extraemos una bola de A, y si sale 2 de B. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una R? ¿Y una V?

19. Tenemos una urna con bolas numeradas como se indica  $\{1,1,2,2,2\}$  y dos urnas  $I=\{R,V\}$  y  $II=\{N,N,R,V\}$ . Extraemos una bola para decidir de que urna escogemos otra. ¿Cuál es la probabilidad de obtener R ó N?

20. Realizado el experimento del ejercicio anterior, resultó ser V. ¿Cuál es la probabilidad de que fuera extraída de la urna A? ¿Y de la B?

21. Se lanza dos monedas. Si salen dos caras se tira el dado  $\{1,1,1,2,2,2\}$  y si y si no el dado  $\{1,1,2,2,3,3\}$ . ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1? ¿Cuándo sale uno con que probabilidad salió también dos caras?

22. Diez amigos organizan un viaje y elige el destino uno de ellos por sorteo. Seis quieren ir a la costa y cuatro al interior. De los primeros, dos quieren ir al norte y cuatro al sur. De los de interior, la mitad prefieren el norte y la otra mitad el sur.

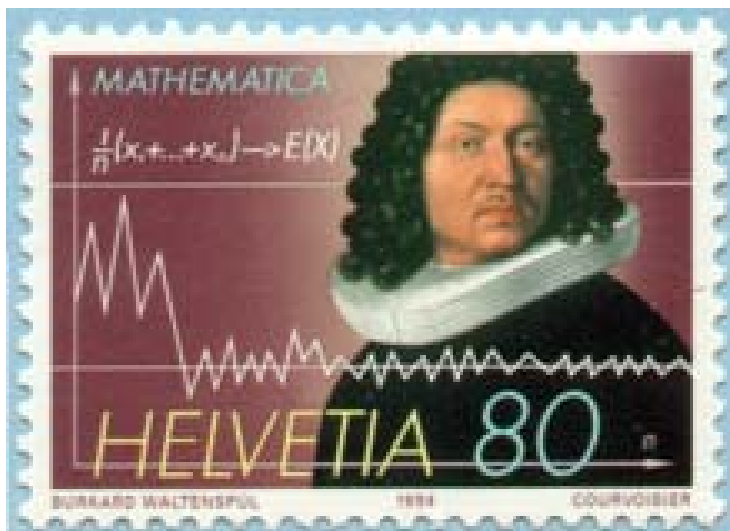
- Halla la probabilidad de ir a la costa del norte.
- ¿Cuál es la probabilidad de ir al norte?
- Si van al norte, ¿cuál es la probabilidad de que sea en la costa?



### Un poco de historia

La probabilidad nació en torno a los juegos de azar. En las civilizaciones antiguas (Egipto, Grecia, Roma) se usaba un hueso a modo de dado para diversos juegos donde intervenía el azar (de ahí proviene un juego tradicional: las *tabas*). Pero incluso restos arqueológicos de hace más de 40.000 años se han interpretado como elementos de juegos de azar.

En Grecia y Roma se practicaban con verdadero celo y pasión. Homero (900 a. C.) cuenta que cuando Patroclo era pequeño, se enfadó tanto con un oponente jugando con el astrágalo que casi le mató.



Fue Girolamo Cardano (1501-1576) quien escribió la primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar. Fue en 1565 y se llamaba *Libro de los juegos de azar*. Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), el reverendo Thomas Bayes (1702-1761) y Joseph Lagrange (1736-1813) desarrollaron fórmulas y técnicas para el cálculo de la probabilidad. En el siglo XIX, Pierre Simon, marqués de Laplace (1749--1827), unificó todas estas primeras ideas y compiló la primera teoría general de la probabilidad.

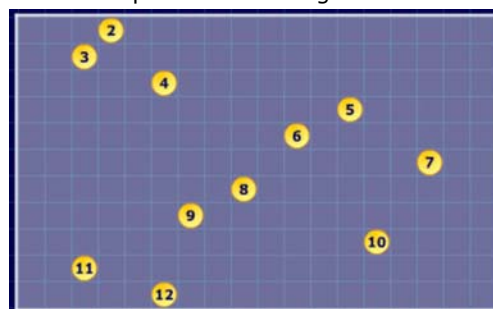
La probabilidad ha seguido evolucionando con matemáticos como Poisson (1781-1840), P.Chebyshev(1821-1894), Émile Borel (1871-1956), A. Markov (1856-1922), y creando escuela para superar estancamientos; Andrei N. Kolmogorov de la escuela rusa, (1903-1987), Norbert Wiener (1894-1964) de la americana. En la actualidad estadística y la probabilidad se unen y se desarrollan juntas.



- P(2)=1/36
- P(3)=2/36
- P(4)=3/36
- P(5)=4/36
- P(6)=5/36
- P(7)=6/36**
- P(8)=5/36
- P(9)=4/36
- P(10)=3/36
- P(11)=2/36
- P(12)=1/36

### Carrera con dados

Comprueba que la ficha con más probabilidad de ganar es la nº 7





# Probabilidad



## Recuerda lo más importante

### Experimentos aleatorios

No puede predecirse el resultado por mucho que lo hayamos experimentado.



Por ejemplo, lanzar un dado.

- Espacio **muestral**  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Sucesos elementales:  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$  y  $\{6\}$
- Otros **sucesos**:  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ ,  $C = \{1, 3, 5\}$
- Suceso **seguro**:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Suceso **imposible**:  $\emptyset = \{ \}$
- Suceso **contrario** de A:  $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$

Sucesos **compatibles**: Son los que pueden ocurrir a la vez, como A y B ó A y C.

Sucesos **incompatibles**: Si no pueden ocurrir a la vez, como par e impar, B y C.

### Probabilidad de sucesos

$$P(\text{S. seguro}) = P(E) = 1$$

$$P(\text{S. imposible}) = P(\emptyset) = 0$$

$$0 \leq P(\text{suceso}) \leq 1$$

Probabilidad de la Unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ si } A \text{ y } B \text{ son incompatibles}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ A y B compatibles.}$$

### Experimentos compuestos

Están formados por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva. Para calcular la probabilidad de multiplican las de los sucesos simples que lo forman.

### Probabilidad condicionada

En sucesos consecutivos pueden producirse dos situaciones:

1) **Independientes**, no influyen en el otro.

Como en las extracciones con devolución

2) **Dependientes**, cada suceso está condicionado por el anterior

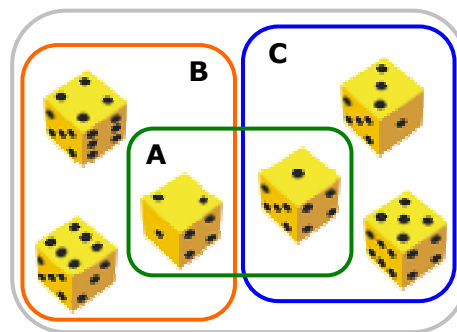
Como en las extracciones sin devolución.

### Probabilidad total

$$P(A) + P(V) + P(R) = 1$$

$$P(C) = P(R) \cdot P(C/R) + P(A) \cdot P(C/A) + P(V) \cdot P(C/V)$$

$$P(R/C) = \frac{P(R) \cdot P(C/R)}{P(R) \cdot P(C/R) + P(A) \cdot P(C/A) + P(V) \cdot P(C/V)}$$



### Operaciones con sucesos

**Unión:**  $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$

**Intersección:**  $A \cap B = \{2\}$

**Diferencia:**  $A - B = \{1\}$

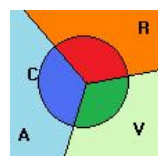
### Regla de Laplace:

Cuando los sucesos elementales son equiprobables:

$$p = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$



Para calcular la probabilidad de un suceso anterior, sabiendo lo que ha ocurrido después, emplearemos la **fórmula de Bayes**.

## Autoevaluación



1. Tiramos un dado de 10 caras.  $P(\text{obtener} < 7) =$
2. En una bolsa tenemos 6 bolas rojas 9 bolas azules y 5 bolas verdes. Extraemos una bola. ¿cuál es la probabilidad de obtener una bola roja?
3. Disponemos de una baraja de 100 cartas, de cuatro colores y numeradas del 1 al 25. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 23?
4. Sucesos elementales  $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots, 20\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4, \dots, 14, 15\}$ . ¿Cuál es la probabilidad de AUC?
5. Lanzamos dos dados normales. ¿Qué probabilidad hay de obtener menos de 8?
6. ¿Qué probabilidad hay de no sacar ni copas ni figuras al extraer una carta de una baraja española?
7. Extraemos una carta de una baraja española. la devolvemos y extraemos otra, ¿Qué probabilidad hay de sacar alguna figura?
8. Tiramos dos monedas. Si salen dos cruces extraemos una bola de una urna con 3 bolas blancas y 7 negras, y en caso contrario de una urna con 4 bolas blancas y 6 negras ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca?
9. Tiramos un dado de 10 caras. Si sale menor que 7 extraemos una carta, y en caso contrario dos devolviendo la 1ª antes de sacar la 2ª. ¿Qué probabilidad hay de obtener algún oro?
10. En un colegio el 60% de los alumnos practican fútbol, el 50 % Baloncesto, y el 90% uno o los dos. ¿Qué probabilidad hay de que un estudiante del colegio practique los dos deportes?

## Soluciones de los ejercicios para practicar

- $D_4 = \{2,4\}$ ,  $D_6 = \{2,4,6\}$ ,  
 $D_{10} = \{2,4,6,8\}$ ,  $D_{12} = \{2,4,6,8,10,12\}$   
y  $D_{20} = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$
- S imposible =  $\{\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$ ,  
 $\{1,2\}$ ,  $\{1,3\}$ ,  $\{1,4\}$ ,  $\{2,3\}$ ,  $\{2,4\}$ ,  
 $\{3,4\}$ ,  $\{1,2,3\}$ ,  $\{1,2,4\}$ ,  $\{1,3,4\}$ ,  
 $\{2,3,4\}$ , S seguro =  $\{1,2,3,4\}$
- $\{\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1,2\}$ ,  $\{1,3\}$ ,  
 $\{2,3\}$ ,  $\{1,2,3\}$
- 10
- a. 12 b. 6 c. 6
- a. 1 carta b. 13 c. 1 d. 12 e. 19 f. 3
- a.  $\{2,4,6\}$  b.  $\{1,3,5\}$  c.  $\{4,6\}$  d.  
 $\{2,4,5,6\}$  e.  $\{2\}$  f.  $\{1,2,3,5\}$
- Alrededor de 75 el 1 y 25 veces el 2
- $P(1)=0,1$ ;  $P(2)=0,2$ ;  $P(3)=0,3$  y  
 $P(4)=0,4$
- $P(\text{rojo})=0,3$ ;  $P(\text{verde})=0,4$ ;  
 $P(\text{negro})=0,2$  y  $P(\text{azul})=0,1$
- En 3,  $P(\text{dos caras})=3/8$   
y en 4,  $P(\text{dos caras})=6/16=3/8$
- $P(1)=0,7$ ;  $P(3)=0,2$ ;  $P(4)=0,3$ ;  
 $P(5)=0,4$ ;  $P(6)=0,1$ ;  $P(7)=0,5$  y  
 $P(8)=0,9$

13. Sol:

| Ruleta | Naranja | Verde | Azul | Gris |
|--------|---------|-------|------|------|
| 1      | 0,3     | 0,25  | 0,15 | 0,3  |
| 2      | 0,4     | 0,3   | 0,15 | 0,15 |
| 3      | 0,1     | 0,2   | 0,1  | 0,6  |
| 4      | 0,35    | 0,3   | 0,15 | 0,2  |

- $P(RA)=0,4 \cdot 0,6 = 0,24$ ,  $P(RB)=0,6 \cdot 0,2 = 0,12$   
 $P(VA)=0,4 \cdot 0,4 = 0,16$
- $P(1,1) = 1/5 \cdot 1/5 = 1/25$ ,  
 $P(1,2) = 1/5 \cdot 2/5 = 2/25$   
 $P(1,3) = 1/5 \cdot 2/5 = 2/25$
- $P(1,1) = 0$ ,  $P(1,2) = 1/5 \cdot 1/2 = 0,1$   
 $P(1,3) = 1/5 \cdot 1/2 = 0,1$
- Con devolución  $P(2 \text{ oros}) = 1/4 \cdot 1/4 = 1/16$ ,  
sin devolución  $P(2 \text{ oros}) = 1/4 \cdot 9/39$
- $P(R) = P(1) \cdot P(R/A) + P(2) \cdot P(R/B) =$   
 $= 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,36$   
 $P(\text{Verde}) = P(1) \cdot P(V/A) + P(2) \cdot P(V/B) =$   
 $= 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,64$
- $P(R \text{ ó } N) = P(R) + P(N) =$   
 $(0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,25) + (0 + 0,6 \cdot 0,5) = 0,65$ .
- $P(A/V) = 0,2/0,35 = 0,57$   
 $P(B/V) = 0,15/0,35 = 0,43$
- $p(1) = 1/4 \cdot 1/2 + 3/4 \cdot 2/6 = 3/8$ ,  
 $P(\text{dos caras}/1) = 1/3$
- a) 0,2 b) 0,4 c) 0,5

### Soluciones AUTOEVALUACIÓN

- $6/10 = 0,6$
- $6/20 = 0,3$
- $4/100 = 0,04$
- $15/20 = 0,75$
- $21/36 = 7/12$
- $21/40$
- $816/1600 = 0,51$
- 0,375
- $17/40$
- 0,2

No olvides enviar las actividades al tutor ►

## ACTIVIDADES DE ESO

|                                |                                  |
|--------------------------------|----------------------------------|
| Nombre y apellidos del alumno: | Curso: <b>4º</b>                 |
| Quincena nº: <b>12</b>         | Asignatura: <b>Matemáticas B</b> |
| Fecha:                         | Profesor de la asignatura:       |

- En una bolsa hay nueve bolas numeradas del 1 al 9. Se extrae una bola al azar y se mira el número.
  - Escribe el espacio muestral.
  - Escribe los sucesos  $A = \{\text{salir mayor que cinco}\}$ ,  $B = \{\text{salir par}\}$ .
  - Escribe los sucesos contrarios a los anteriores.
- De una baraja de 40 cartas se extrae una carta, calcula la probabilidad de que sea.
  - De oros
  - Un rey
  - Rey o de oros
- Se extraen dos cartas de una baraja española de cuarenta, calcula la probabilidad de que sean dos reyes.
  - Con devolución
  - Sin devolución
- Tiramos un dado, si sale múltiplo de 3 sacamos una bola de una bolsa en la que hay 5 bolas rojas y 3 verdes; si no sale múltiplo de tres la sacamos de otra bolsa en la que hay 3 bolas rojas y 3 verdes, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea verde?.