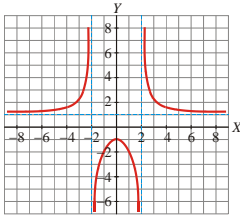


# TEMA 11 – LÍMITES, CONTINUIDAD Y ASÍNTOTAS

## CÁLCULO GRÁFICO DE LÍMITES

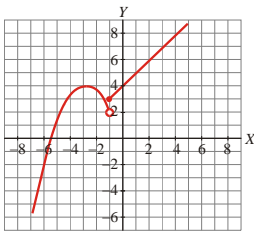
**EJERCICIO 1 :** Sobre la gráfica de  $f(x)$ , halla :



- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Solución: a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$    b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$    c)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$    d)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$    e)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

**EJERCICIO 2 :** A partir de la gráfica de  $f(x)$ , calcula:

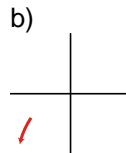
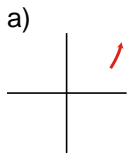


- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- c)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
- d)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
- e)  $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$

Solución: a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$    b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$    c)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$    d)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$    e)  $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 0$

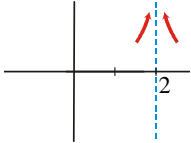
**EJERCICIO 3 :** Representa gráficamente los siguientes resultados: a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$    b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

Solución:



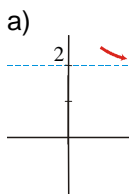
**EJERCICIO 4 :** Representa los siguientes límites:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$     $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

Solución:

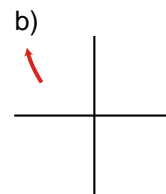
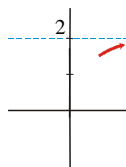


**EJERCICIO 5 :** Representa en cada caso los siguientes resultados: a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$    b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

Solución:



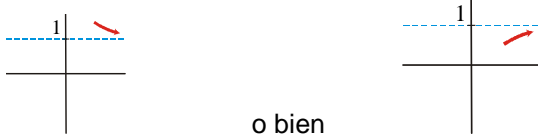
o bien



**EJERCICIO 6 :** Representa gráficamente: a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  b)  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0$

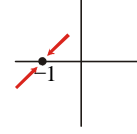
Solución:

a)



o bien

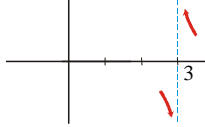
b) Por ejemplo:



**EJERCICIO 7 :** Para la función  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ , sabemos que:  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{x-3} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3} = -\infty$

Representa gráficamente estos dos límites.

Solución:



### CÁLCULO DE LÍMITES INMEDIATOS

**EJERCICIO 8 :** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x^2 + 2x + 3}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 9}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$     d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2 + x + 1}$     e)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{6-3x}$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x^2 + 2x + 3} = \frac{4}{9 + 6 + 3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9 - 9} = \sqrt{0} = 0$     c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2 + x + 1} = \frac{-1}{4 + 2 + 1} = \frac{-1}{7}$     e)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{6-3x} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$

**EJERCICIO 9 :** Calcula el límite de la función  $f(x) = -\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2}$  en  $x=1$  y en  $x=3$ .

Solución:

$\lim_{x \rightarrow 1} \left( -\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} \right) = \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$      $\lim_{x \rightarrow 3} \left( -\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} \right) = -27 + \frac{3}{2} = -\frac{51}{2}$

**EJERCICIO 10 :** Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

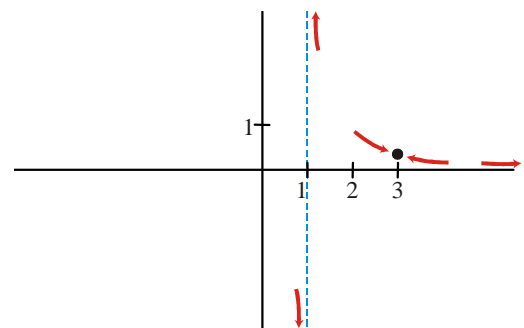
a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x}$     b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x}$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x} = 0$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x(x-1)}$

Hallemos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x(x-1)} = -\infty$ ;     $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x(x-1)} = +\infty$



**EJERCICIO 11 : Resuelve los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18}$       c)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18}$

Solución:

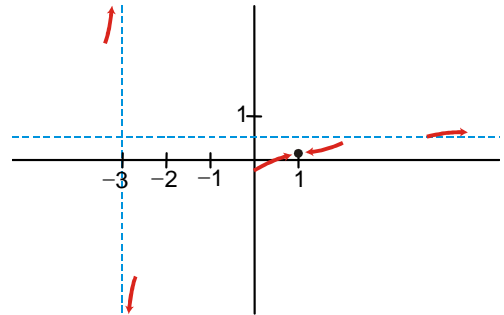
a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18} = \frac{1}{2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)}{2(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{2(x+3)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x}{2(x+3)} = +\infty$ ;       $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{2(x+3)} = -\infty$



**EJERCICIO 12 : Halla los límites siguientes y representa gráficamente la información que obtengas:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4}$       c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4}$

Solución:

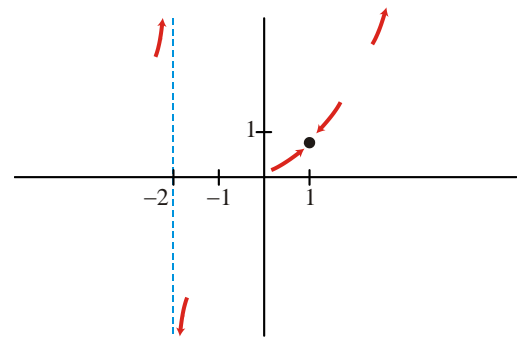
a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4} = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3}{x+2}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^3}{x+2} = +\infty$ ;       $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^3}{x+2} = -\infty$



**EJERCICIO 13 : Halla los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$       c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$

Solución:

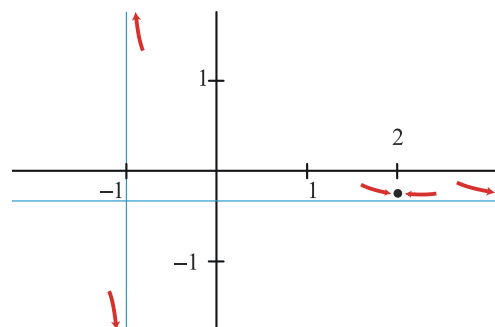
a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3} = \frac{-6}{27} = \frac{-2}{9}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3} = -\frac{1}{3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x(x+1)}{3(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x}{3(x+1)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{3(x+1)} = -\infty$ ;       $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x}{3(x+1)} = +\infty$



**EJERCICIO 14 : Calcula los límites siguientes y representa gráficamente los resultados que obtengas:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

Solución:

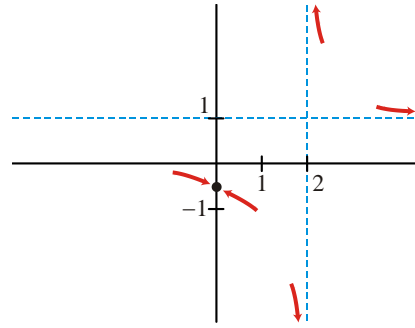
a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)$

Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$



**CÁLCULO DE LÍMITES**

**EJERCICIO 15 :** Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{3} - 2x \right)$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1}$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{1+x^2}$

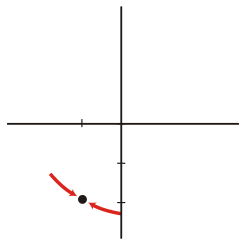
i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{1+x^2}$

j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)^3$

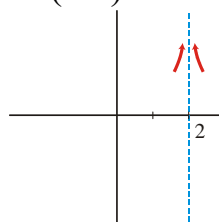
k)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x+1}$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3) = 1 - 3 = -2$

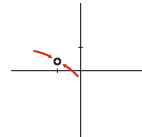


b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$



c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} =$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

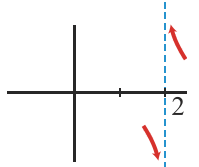


d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2}$

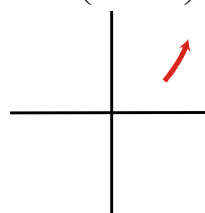
Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-2} = -\infty$

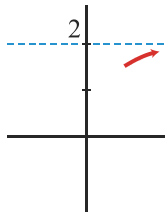
$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$



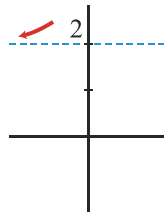
e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{3} - 2x \right) = +\infty$



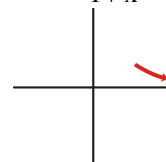
f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1} = 2$



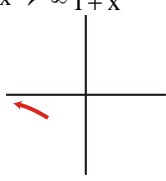
g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1} = 2$



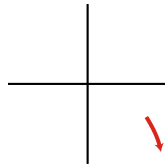
h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{1+x^2} = 0$



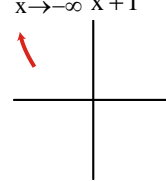
i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{1+x^2} = 0$



j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)^3 = -\infty$



k)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x+1} = +\infty$



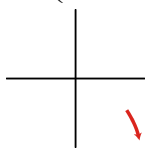
**EJERCICIO 16:** Halla el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  de las siguientes funciones y representa gráficamente

la información que obtengas: a)  $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} + 1$

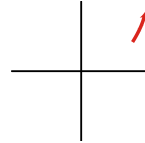
b)  $f(x) = \frac{-3x^2 + 2x^3}{5}$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} + 1 \right) = -\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 2x^3}{5} = +\infty$



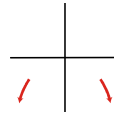
**EJERCICIO 17 :** Calcula el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de la siguiente función

y representa la información que obtengas:  $f(x) = \frac{1-2x^2+4x}{3}$

Solución:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x^2+4x}{3} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x^2+4x}{3} = -\infty$



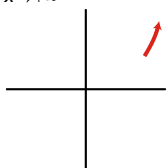
**EJERCICIO 18 :** Halla los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4-x)^2$

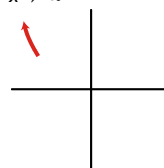
b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4-x)^2$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4-x)^2 = +\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4-x)^2 = +\infty$



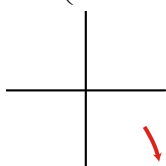
**EJERCICIO 19 :** Calcula los siguientes límites y representa el resultado que obtengas:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + x \right)$

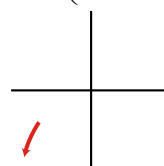
b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{3} - \frac{x^4}{4} + x \right)$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + x \right) = -\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{3} - \frac{x^4}{4} + x \right) = -\infty$



**CÁLCULO DE LÍMITES**

**EJERCICIO 20 : Calcula:**

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - x^2 + 1]$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{\log x^2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3x^2 - \sqrt{x^9 + 1}]$       d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{\log x}$       f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2^x}$       g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2^x - x^2]$       h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$   
 i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - \log x]$       j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{x^2 + 1}$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - x^2 + 1] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{\log x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x}{\log x^2} = +\infty$

Porque una potencia es un infinito de orden superior a un logaritmo.

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3x^2 - \sqrt{x^9 + 1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -x^{\frac{9}{2}} \right] = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{-x+1} = \frac{0}{-\infty} = 0$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{\log x} = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{2^{-x}} = -\infty$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2^x - x^2] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{-x} = 0$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - \log x] = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{-x}}{x^2 + 1} = \frac{0}{+\infty} = 0$

**EJERCICIO 21 : Halla los límites:**

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{5x^2 - 2x - 3x}]$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^6 - 2x}}$       c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{2x^4 + 1}}$       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right]$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{5x^2 - 3x + 1}}$       f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 3x + 2x}]$       g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{3x^2 - 1} - 2x]$       h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^5 - 1}}{\sqrt{x^4 + 2}}$   
 i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right]$       j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

Solución:

a) 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{5x^2 - 2x - 3x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{5x^2 - 2x - 3x})(\sqrt{5x^2 - 2x + 3x})}{\sqrt{5x^2 - 2x + 3x}} =$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x - 9x^2}{\sqrt{5x^2 - 2x + 3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 - 2x}{\sqrt{5x^2 - 2x + 3x}} = -\infty$$

b) 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^6 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 1}{\sqrt{x^6 + 2x}} = 0$$

c) 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{2x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{2x^4 + 1}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

d) 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1) - x^3(x + 2)}{(x + 2)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 1 - x^4 - 2x^3}{x^3 + x + 2x^2 + 2} =$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = -2$$

e) 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{5x^2 - 3x + 1}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

f) 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2 - 3x + 2x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 3x - 2x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x - 2x})(\sqrt{x^2 + 3x + 2x})}{\sqrt{x^2 + 3x + 2x}} =$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 4x^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 + 3x + 2x}} = -\infty$$

g) 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{3x^2 - 1 - 2x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 - 1 - 2x})(\sqrt{3x^2 - 1 - 2x})}{\sqrt{3x^2 - 1 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{3x^2 - 1 + 2x}} =$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 1}{\sqrt{3x^2 - 1 + 2x}} = -\infty$$

h) 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^5 - 1}}{\sqrt{x^4 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{-2x^5 - 1}}{\sqrt{x^4 + 2}} = 0$$

i) 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x^2}{x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3(x + 1)}{(x + 1)(x^2 + 1)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 3x^2 - x^4 - x^3}{x^3 + x + x^2 + 1} =$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2}{x^3 + x^2 + x + 1} = +\infty$$

j) 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

**EJERCICIO 22 : Calcula:**

a) 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 8x^2 + 7x - 2}}$$

b) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 4} - 2}{\sqrt{x + 1} - 1}$$

c) 
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

d) 
$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{2x}{x^2 - 9} - \frac{x + 1}{x - 3} \right]$$

e) 
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

Solución:

a) 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 8x^2 + 7x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{(2x + 1)(x - 1)^2}{(3x - 2)(x - 1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{2x + 1}{3x - 2}} = \sqrt[3]{3}$$

b) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 4} - 2}{\sqrt{x + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x + 4} - 2)(\sqrt{2x + 4} + 2)(\sqrt{x + 1} + 1)}{(\sqrt{x + 1} - 1)(\sqrt{x + 1} + 1)(\sqrt{2x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + 4 - 4)(\sqrt{x + 1} + 1)}{(x + 1 - 1)(\sqrt{2x + 4} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{2x+4}+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-5}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = +\infty \Rightarrow$  No existe

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{2x}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - (x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - (x^2+4x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = \frac{-18}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = -\infty \Rightarrow$  No existe

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^3 - 3x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+5)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = \frac{9}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = +\infty \Rightarrow$  No existe

**EJERCICIO 23 : Calcula los límites:**

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+4}{x^2-x+6} \right)^{\frac{3x}{x-1}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x-2}{x^2-2x+4} \right)^{\frac{x}{x-2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^2-x+1}{4x+4} \right)^{\frac{2x}{x-3}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2-3x+1}{5x+1} \right)^{\frac{3}{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2-2x+3}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+4}{x^2-x+6} \right)^{\frac{3x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+4}{x^2-x+6} - 1 \right) \cdot \frac{3x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x+4-x^2+x-6}{x^2-x+6} \right) \cdot \frac{3x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x^2+3x-2)(3x)}{(x^2-x+6)(x-1)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x(x-2)(x-1)}{(x^2-x+6)(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x(x-2)}{x^2-x+6}} = e^{\frac{3}{6}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x-2}{x^2-2x+4} \right)^{\frac{x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x-2}{x^2-2x+4} - 1 \right) \cdot \frac{x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x-2-x^2+2x-4}{x^2-2x+4} \right) \cdot \frac{x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-x^2+5x-6)x}{(x^2-2x+4)(x-2)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x(x-3)(x-2)}{(x^2-2x+4)(x-2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x(x-3)}{x^2-2x+4}} = e^{\frac{2}{4}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^2-x+1}{4x+4} \right)^{\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^2-x+1}{4x+4} - 1 \right) \cdot \frac{2x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^2-x+1-4x-4}{4x+4} \right) \cdot \frac{2x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-5x-3}{4x+4} \cdot \frac{2x}{x-3}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+1)(x-3)(2x)}{(4x+4)(x-3)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+1)(2x)}{4x+4}} = e^{\frac{42}{16}} = e^{\frac{21}{8}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2-3x+1}{5x+1} \right)^{\frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2-3x+1}{5x+1} - 1 \right) \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2-3x+1-5x-1}{5x+1} \right) \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-8x}{5x+1} \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(x-8)}{x(5x+1)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(x-8)}{5x+1}} = e^{-24}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2-2x+3}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2-2x+3}{x+1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2-2x+3-x-1}{x+1} \right) \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1}} = e^{\frac{-1}{2}}$$



**EJERCICIO 24 : Calcula estos límites:**

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2-3x}{-2x+1} \right)^{\frac{-x}{2}}$     b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+2x}{2x+5} \right)^{2x^2-1}$     c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x-2}{4+5x} \right)^{\frac{2x}{3}}$     d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x-2}{3x+5} \right)^{x^2-1}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{1}{x} \right)^{2x-3}$     f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{2+3x^2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$     g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{2x}$     h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x^2-7}{3x^2+9x} \right)^x$   
 i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-1}{3x+2} \right)^{x^2}$     j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-2}{3+2x} \right)^{x+1}$

Solución:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2-3x}{-2x+1} \right)^{\frac{-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2+3x}{2x+1} \right)^{\frac{x}{2}} = \left( \frac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+2x}{2x+5} \right)^{2x^2-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+2x}{2x+5} - 1 \right) \cdot (2x^2-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+2x-2x-5}{2x+5} \right) \cdot (2x^2-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^2+4}{2x+5}} = e^{-\infty} = 0$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x-2}{4+5x} \right)^{\frac{2x}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x-2}{4+5x} - 1 \right) \cdot \frac{2x}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x-2-4-5x}{4+5x} \right) \cdot \frac{2x}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x}{12+15x}} = e^{\frac{-12}{15}} = e^{-\frac{4}{5}}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x-2}{3x+5} \right)^{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-4x-2}{-3x+5} \right)^{x^2-1} = \left( \frac{4}{3} \right)^{+\infty} = +\infty$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{1}{x} \right)^{2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{1}{x} \right)^{-2x-3} = 2^{-\infty} = 0$   
 f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{2+3x^2} \right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{2+3x^2} - 1 \right) \cdot \left( \frac{x+1}{2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2-2-3x^2}{2+3x^2} \right) \cdot \left( \frac{x+1}{2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-2}{4+6x^2}} = e^0 = 1$   
 g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{2x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} - 1 \right) \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2} \right) \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2-2}} = e^0 = 1$   
 h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x^2-7}{3x^2+9x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x^2-7}{3x^2-9x} \right)^{-x} = \left( \frac{4}{3} \right)^{-\infty} = \left( \frac{3}{4} \right)^{+\infty} = 0$   
 i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-1}{3x+2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-2x-1}{-3x+2} \right)^{x^2} = \left( \frac{2}{3} \right)^{+\infty} = 0$   
 j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-2}{3+2x} \right)^{x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-2}{3+2x} - 1 \right) \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-2-3-2x}{3+2x} \right) \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x-5}{3+2x}} = e^{-\frac{5}{2}}$

**EJERCICIO 25 : Halla los límites:**

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2-3x} - \sqrt{x^2-1} \right]$     b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x}{x^2-2x+1}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-2}{4+3x} \right)^{x+1}$     e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^3+3x}}{\sqrt{x^2+2}}$     f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x}{x^2-4} - \frac{x+1}{x-2} \right)$   
 g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$     h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2+x+x} \right]$     i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{x+1} - \frac{3x^3}{x^2-1} \right)$     j)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+3}{2x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 1} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x - 1}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x + x} = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)^2 (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{1}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x - 3)(x + 1)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x - 3)(x + 1)} = +\infty \Rightarrow \text{Como son distintos} \Rightarrow \text{No existe el límite}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x + 1)}{x - 1} = \frac{2}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x + 1)}{x - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x + 1)}{x - 1} = +\infty \Rightarrow \text{Como son distintos} \Rightarrow \text{No existe el límite}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x - 2}{4 + 3x} \right)^{x+1} = \left( +\infty \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x - 2}{4 + 3x} - 1 \right) \cdot (x + 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2 - 4 - 3x}{4 + 3x} \cdot (x + 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x - 6}{3x + 4}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^3 + 3x}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{-x^3 - 3x}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^{3/5}}{x} = 0$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x}{x^2 - 4} - \frac{x + 1}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - (x + 1)(x + 2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - 2}{x^2 - 4} = \frac{-6}{(0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 - 2}{x^2 - 4} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 - 2}{x^2 - 4} = -\infty \Rightarrow \text{No existe el límite}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{5}{3}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2 + x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 - x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} =$$

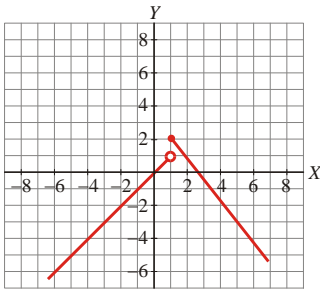
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{x + 1} - \frac{3x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2(x - 1) - 3x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 3x^2 - 3x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{x^2 - 1} = -3$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x + 3}{2x + 2} \right)^{x-1} = \left( \infty \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x + 3}{2x + 2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x - 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3 - 2x - 2}{2x + 2} \cdot \frac{1}{x - 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + 1}{(2x + 2)(x - 1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x + 2}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

**CONTINUIDAD**

**EJERCICIO 26 :** La siguiente gráfica corresponde a la función  $f(x)$ :



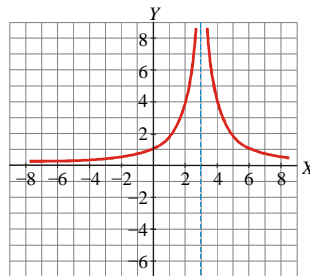
Di si es continua o no en  $x = 1$  y en  $x = 2$ . Si en alguno de los puntos no es continua, indica cuál es la causa de la discontinuidad.

Solución:

En  $x = 1$  no es continua porque presenta un salto en ese punto. Observamos que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

En  $x = 2$  sí es continua.

**EJERCICIO 27 :** A partir de la gráfica de  $f(x)$  señala si es continua o no en  $x = 0$  y en  $x = 3$ . En el caso de no ser continua, indica la causa de la discontinuidad.

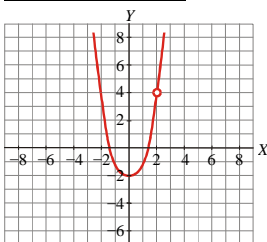


Solución:

En  $x = 0$ , sí es continua.

En  $x = 3$  es discontinua porque no está definida, ni tiene límite finito. Tiene una rama infinita en ese punto (una asíntota vertical).

**EJERCICIO 28 :** Dada la gráfica de  $f(x)$ :



a) ¿Es continua en  $x = 1$ ?

b) ¿Y en  $x = 2$ ?

Si no es continua en alguno de los puntos, indica cuál es la razón de la discontinuidad.

Solución:

a) Sí es continua en  $x = -1$ .

b) No, en  $x = 2$  es discontinua porque no está definida en ese punto. Como sí tiene límite en ese punto, es una discontinuidad evitable.

**EJERCICIO 29 :** Averigua si la siguiente función es continua en  $x = 2$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4 \\ f(2) = 4 \end{array} \right\} \text{ Es continua en } x = 2 \text{ porque } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

**EJERCICIO 30 :** Comprueba si la siguiente función es continua en  $x = 0$ .  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-2}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x-2}{2} \right) = -1 \\ f(0) = -1 \end{array} \right\} \text{Es continua en } x = 0 \text{ porque } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

**EJERCICIO 31 :** Halla el valor de  $k$  para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$ :  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:

$$\text{En } x = 1: \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = k \end{cases} \\ f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{array} \right\} k = 3$$

Solución:  $f$  continua en  $x = 1$  si  $k = 3$

**EJERCICIO 32 :** Estudia la continuidad de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a)  $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

d)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

e)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

g)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{3x-1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

h)  $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

i)  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

j)  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Solución:

a) Continuidad:

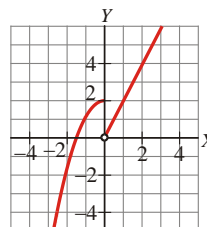
➤  $f$  continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$

➤ En  $x = 0$ :  $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 - x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0 \end{cases} \\ f(0) = 2 - 0^2 = 2 \end{array} \right\} f \text{ discontinua inevitable de salto finito(2) en } x=0$

Representación:  $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Si  $x \leq 0$ , es un trozo de parábola. ( $V_x = 0$ )
- Si  $x > 0$ , es un trozo de recta.

X	$-\infty$	-2	-1	0	$0^+$	1	$+\infty$
Y	$-\infty$	-2	1	2	0	2	$+\infty$



b) Continuidad

➤ f continua en  $\mathbb{R} - \{1\}$

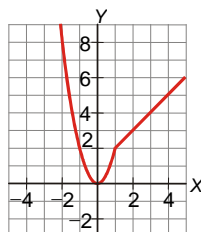
$$\text{➤ En } x = 1: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \end{cases} \\ f(1) = 2 \cdot 1^2 = 2 \end{array} \right\} \text{ f continua en } x = 1$$

➤ Solución: f continua en todo  $\mathbb{R}$ .

Representación

- Si  $x \leq 1$ , es un trozo de parábola. ( $V_x = 0$ )
- Si  $x > 1$ , es un trozo de recta.

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	1 <sup>+</sup>	2	$+\infty$
Y	$+\infty$	8	2	0	2	2	3	$+\infty$



c) Continuidad

➤ f continua en  $\mathbb{R} - \{-1\}$

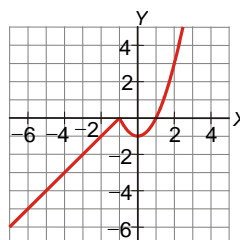
$$\text{➤ En } x = -1: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{cases} \\ f(-1) = -1 + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ f continua en } x = -1$$

➤ Solución: f continua en todo  $\mathbb{R}$ .

Representación:

- Si  $x \leq -1$ , es un trozo de recta.
- Si  $x > -1$ , es un trozo de parábola. ( $V_x = 0$ )

X	$-\infty$	-2	-1	-1 <sup>+</sup>	0	1	2	$+\infty$
Y	$-\infty$	-1	0	0	-1	0	3	$+\infty$



d) Continuidad

➤ f continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$

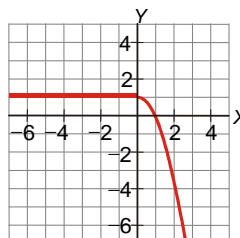
$$\text{➤ En } x = 0: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2) = 1 \end{cases} \\ f(0) = 1 = 1 \end{array} \right\} \text{ f continua en } x = 0$$

➤ Solución: f continua en todo  $\mathbb{R}$

Representación:

- Si  $x \leq 0$ , es un trozo de recta horizontal.
- Si  $x > 0$ , es un trozo de parábola. ( $V_x = 0$ )

X	$-\infty$	-1	0	0	1 <sup>+</sup>	2	$+\infty$
Y	1	1	1	1	0	-3	$-\infty$



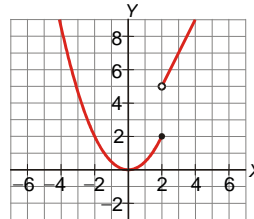
e) Continuidad:

➤ f continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$

$$\text{➤ En } x=2: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{x^2}{2} \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+1) = 5 \end{cases} \\ f(2) = \frac{2^2}{2} = 2 \end{array} \right\} \text{ f discontinua inevitable de salto finito(3) en } x=2$$

Representación:

- Si  $x \leq 2$ , es un trozo de parábola. ( $V_x = 0$ )
- Si  $x > 2$ , es un trozo de recta.



f) Continuidad:

➤ f continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$

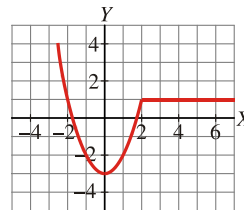
$$\text{➤ En } x=2: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1) = 1 \end{cases} \\ f(2) = 2^2 - 3 = 1 \end{array} \right\} \text{ f continua en } x = 2$$

➤ Solución: f continua en todo  $\mathbb{R}$ .

Representación:

- Si  $x \leq 2$ , es un trozo de parábola. ( $V_x = 0$ )
- Si  $x > 2$ , es un trozo de recta horizontal.

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$2^+$	3	$+\infty$
Y	$+\infty$	1	-2	-3	-2	1	1	1	1



g) Continuidad

➤ f continua en  $\mathbb{R} - \{1\}$

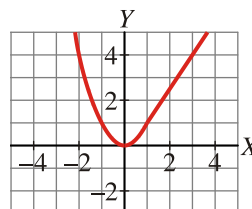
$$\text{➤ En } x=1: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{3x-1}{2} \right) = 1 \end{cases} \\ f(1) = 1^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ f continua en } x = 1$$

➤ Solución: f continua en todo  $\mathbb{R}$ .

Representación:

- Si  $x \leq 1$ , es un trozo de parábola. ( $V_x = 0$ )
- Si  $x > 1$ , es un trozo de recta.

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	$1^+$	2	$+\infty$
Y	$+\infty$	4	1	0	1	1	5/2	$+\infty$



h) Continuidad

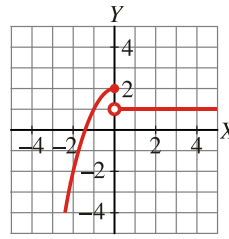
➤ f continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\text{➤ En } x=0: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 - x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1 \end{cases} \\ f(0) = 2 - 0 = 2 \end{array} \right\} \text{ f discontinua inevitable de salto finito(1) en } x=0$$

Representación:

- Si  $x \leq 0$ , es un trozo de parábola. ( $V_x = 0$ )
- Si  $x > 0$ , es un trozo de recta horizontal.

X	$-\infty$	-2	-1	0	$2^+$	3	$+\infty$
Y	$-\infty$	-2	1	2	1	1	1



i) Continuidad

➤ f continua en  $\mathbb{R} - \{-2\}$

➤ En  $x = -2$ :

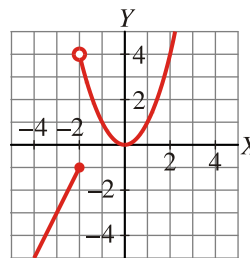
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x+3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2) = 4 \end{cases} \cdot f \text{ discontinua inevitable de salto finito(5) en } x = -2$$

$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$

Representación

- Si  $x \leq -2$  es un trozo de recta.
- Si  $x > -2$  es un trozo de parábola. ( $V_x = 0$ )

X	$-\infty$	-3	-2	$-2^+$	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	$-\infty$	-3	-1	4	1	0	1	4	$+\infty$



j) Continuidad

➤ f continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$

➤ En  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \end{cases} \cdot f \text{ continua en } x = 0$$

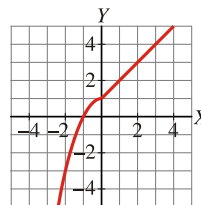
$f(0) = 1 - 0^2 = 1$

➤ Solución: f continua en todo  $\mathbb{R}$

Representación:

- Si  $x \leq 0$ , es un trozo de parábola. ( $V_x = 0$ )
- Si  $x > 0$ , es un trozo de recta.

X	$-\infty$	-2	-1	0	$2^+$	3	$+\infty$
Y	$-\infty$	-3	0	1	3	4	$+\infty$



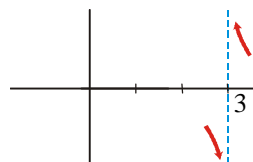
## ASÍNTOTAS

**EJERCICIO 33** : Calcula el límite de la siguiente función en el punto  $x = 3$  y estudia su comportamiento por la izquierda y por la derecha:  $f(x) = \frac{1}{x-3}$

Solución:  $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

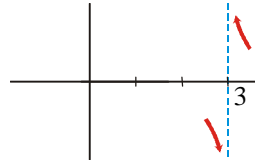


**EJERCICIO 34 :** Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de  $x = 3$ :  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9}$

Solución:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)(x+3)}$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 9} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 9} = +\infty$$

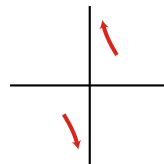


**EJERCICIO 35 :** Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de  $x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x^2 + 2x}$

Solución:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x(x + 2)}$

Calculamos los límites laterales:

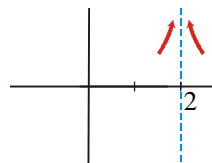
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + 1}{x^2 + 2x} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{x^2 + 2x} = +\infty$$



**EJERCICIO 36 :** Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de  $x = 2$ :  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{(x - 2)^2}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 1}{(x - 2)^2} = +\infty$$

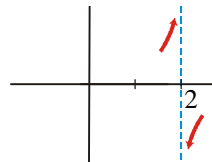


**EJERCICIO 37 :** Dada la función  $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6}$ , calcula el límite de  $f(x)$  en  $x = 2$ . Representa la información que obtengas.

Solución:  $\frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x + 1}{(x - 2)(x - 3)}$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 1}{(x - 2)(x - 3)} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$$



**EJERCICIO 38 :** Halla las asíntotas verticales de las siguientes funciones y sitúa las curvas respecto a ellas:

a)  $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$     b)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$

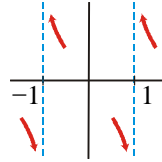
Solución:

a) •  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 1. \Rightarrow$  Las asíntotas verticales son  $x = -1$  y  $x = 1$ .  
Posición de la curva respecto a ellas:



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$

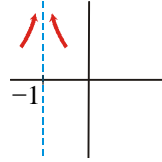


b)  $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$  Solo tiene una asíntota vertical:  $x = -1$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$



**EJERCICIO 39 :** Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos:

a)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$

b)  $f(x) = (3 - x)^3$

c)  $f(x) = \frac{1 - x^4}{x^2}$

d)  $f(x) = \frac{2x^3 + x}{1 - x}$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x)^3 = -\infty$

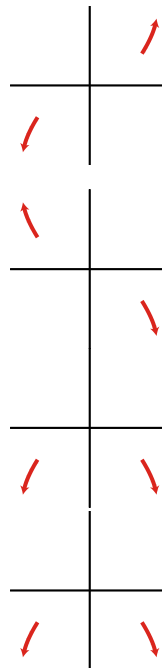
$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x)^3 = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{x^2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^4}{x^2} = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x}{1 - x} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x}{1 - x} = -\infty$

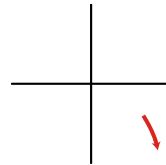
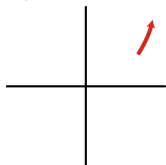


**EJERCICIO 40 :** Halla las ramas infinitas, cuando  $x \rightarrow +\infty$ , de las siguientes funciones y representa la información que obtengas: a)  $f(x) = (x + 2)^4$  b)  $f(x) = x - x^2$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2)^4 = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2) = -\infty$

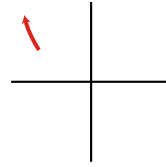
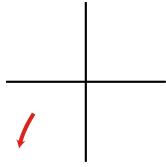


**EJERCICIO 41 :** Halla las ramas infinitas, cuando  $x \rightarrow -\infty$ , de las siguientes funciones y representa los resultados que obtengas: a)  $f(x) = (x - 1)^3$  b)  $f(x) = x^2 - x$

Solución:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)^3 = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) = +\infty$



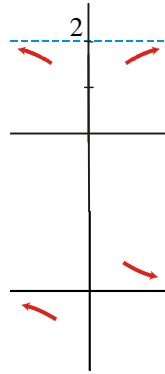
**EJERCICIO 42 :** Calcular las asíntotas horizontales de estas funciones y representa los resultados que obtengas:

a)  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$       b)  $f(x) = \frac{x + 1}{2x^2 + 2}$

Solución:

$$a) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{A.V. } y = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(100) < 2 \\ f(-100) < 2 \end{cases}$$

$$b) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{2x^2 + 2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{2x^2 + 2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{A.V. } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > 0 \\ f(-100) < 0 \end{cases}$$



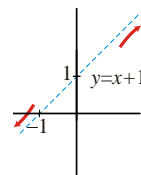
**EJERCICIO 43 :** Las siguientes funciones tienen una asíntota oblicua. Hállala y sitúa las curvas respecto a ellas:

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$       b)  $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$

Solución:  $y = mx + n$

$$a) \left\{ \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 2x}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x} = 1 \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 + 2x}{x + 1} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} y = x + 1 \Rightarrow$$

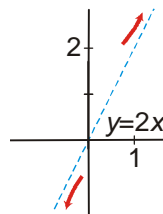
Asíntota oblicua :  $y = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(100) < A \sin t(100) \\ f(-100) > A \sin t(-100) \end{cases}$



$$b) \left\{ \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = 2 \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^3}{x^2 - 1} - 2 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \end{aligned} \right\} y = 2x \Rightarrow$$

Asíntota oblicua:  $y = 2x$

$\begin{cases} f(100) > A \sin t(100) \\ f(-100) < A \sin t(-100) \end{cases}$



**EJERCICIO 44 : Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa las curvas respecto a ellas:**

a)  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$       b)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2}$

Solución:

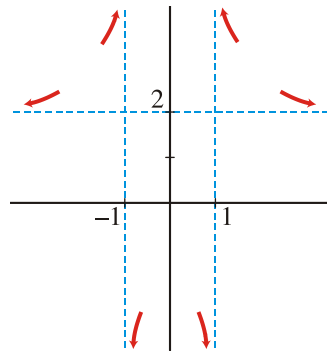
a)

- Asíntotas verticales: Puntos que anulan el denominador:  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$x = -1 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty \end{cases} \quad x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > 2 \\ f(-100) > 2 \end{cases}$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = 2$

- Representación:



b)

- Asíntota vertical: Puntos que anulan el denominador  $\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(100) < 1 \\ f(-100) > 1 \end{cases}$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2} = 1$

- Representación:

