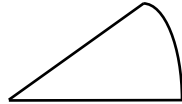


FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMETRÍAS

UNIDAD PARA MEDIR ÁNGULOS: EL RADIAN

DEFINICIÓN DE RADIAN

Se llama **radian** a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.



$$\text{Ángulo completo} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Nota: Si una circunferencia fuera el doble de grande, el radio también sería el doble, por lo que el ángulo correspondiente a un arco que mida como el radio sería el mismo.

RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES DE MEDIDA DE ÁNGULOS

$$360^\circ \longleftrightarrow 2\pi \text{ rad} \quad \text{ó} \quad 180^\circ \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

UTILIDAD DE LOS RADIANES

Para los problemas de trigonometría, astronomía, navegación y resolución de triángulos en general, se usan las medidas de los ángulos en grados. Pero para representar y estudiar funciones trigonométricas se utilizan los radianes.

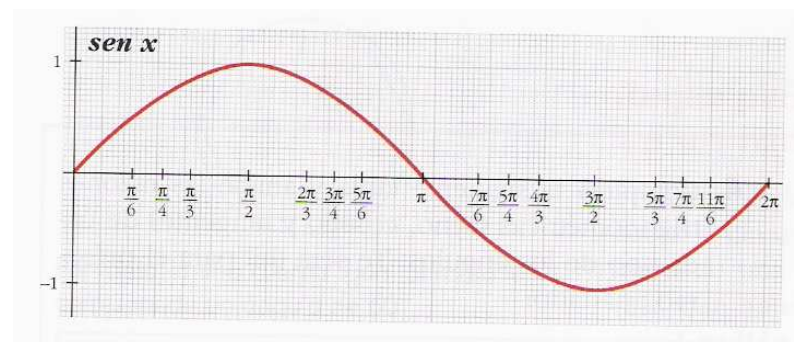
CALCULADORA

Para hallar las razones trigonométricas de un ángulo dado en radianes, hay que empezar poniendo la calculadora en modo correspondiente (MODE RAD). El resto es igual que en grados.

FUNCIONES CIRCULARES

FUNCIÓN SENO

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
seno	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1/2	0

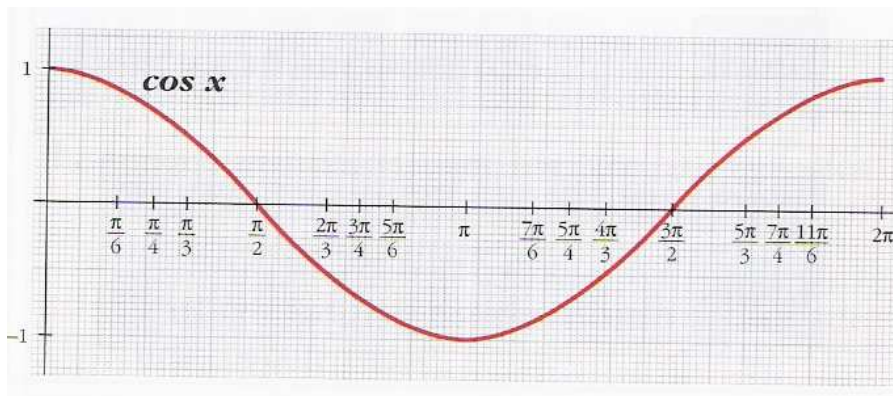


CARACTERÍSTICAS

- Dominio : \mathbb{R}
- Recorrido : $[-1,1]$
- Periodicidad : 2π
- Continua
- Creciente $(0^\circ+360^\circ k, 90^\circ+360^\circ k) \cup (270^\circ+360^\circ k, 360^\circ+360^\circ k)$
- Decreciente $(90^\circ+360^\circ k, 270^\circ+360^\circ k)$
- Máximo $x = 90^\circ+360^\circ k \quad y = 1$
- Mínimo $x = 270^\circ+360^\circ k \quad y = -1$
- Concava: $(0^\circ+360^\circ k, 180^\circ+360^\circ k)$
- Convexa: $(180^\circ+360^\circ k, 360^\circ+360^\circ k)$
- Puntos de inflexión $x = 0^\circ+180^\circ k \quad y = 0$

FUNCIÓN COSENO

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
cos	1	$3/2$	$2/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-2/2$	$-3/2$	-1	$-3/2$	$-2/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	$-2/2$	$-3/2$	1

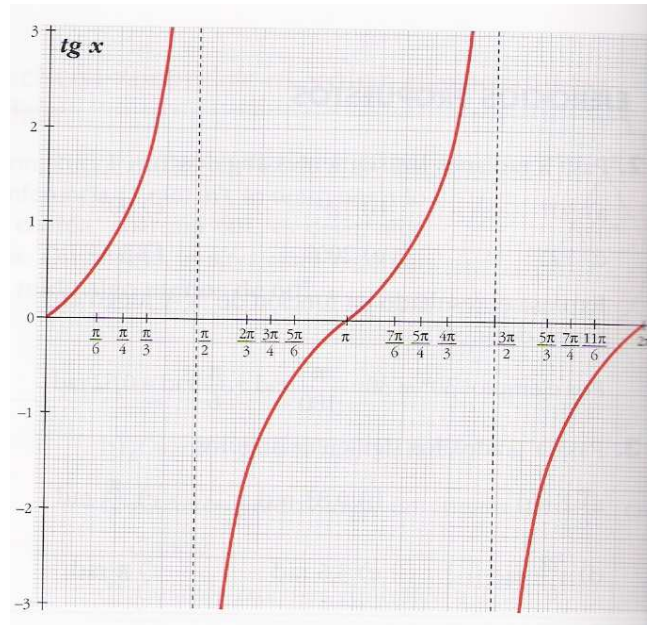


CARACTERÍSTICAS

- Dominio : \mathbb{R}
- Recorrido : $[-1,1]$
- Periodicidad : 2π
- Continua
- Creciente $(180^\circ+360^\circ k, 360^\circ+360^\circ k)$
- Decreciente $(0^\circ+360^\circ k, 180^\circ+360^\circ k)$
- Máximo $x = 0^\circ+360^\circ k \quad y = 1$
- Mínimo $x = 180^\circ+360^\circ k \quad y = -1$
- Concava: $(0^\circ+360^\circ k, 90^\circ+360^\circ k) \cup (270^\circ+360^\circ k, 360^\circ+360^\circ k)$
- Convexa: $(90^\circ+360^\circ k, 270^\circ+360^\circ k)$
- Puntos de inflexión $x = 90^\circ+180^\circ k \quad y = 0$

FUNCIÓN TANGENTE

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
Tag	0	$3/3$	1	3		-3	-1	$-3/3$	0	$3/3$	1	3		-3	-1	$-3/3$	0



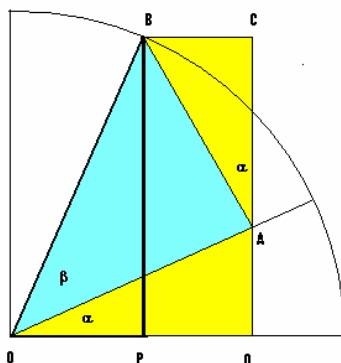
CARACTERÍSTICAS

- Dominio : $\mathbb{R} - \{90^\circ + 180^\circ k\}$
- Recorrido : \mathbb{R}
- Periodicidad : π
- Continua: $\mathbb{R} - \{90^\circ + 180^\circ k\}$
- Creciente $\mathbb{R} - \{90^\circ + 180^\circ k\}$
- Concava: $(0^\circ + 180^\circ k, 90^\circ + 180^\circ k)$
- Convexa: $(90^\circ + 180^\circ k, 180^\circ + 180^\circ k)$
- Puntos de inflexión $x = 90^\circ + 180^\circ k$ $y = 0$

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

Seno de la suma: $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \cdot \text{sen } \beta$



$$\begin{aligned} \text{Sen}(\alpha + \beta) &= BP = CA + AQ \\ CA : \text{cos } \alpha &= CA/BA \Rightarrow CA = BA \cdot \text{cos } \alpha \\ AQ : \text{sen } \alpha &= AQ/OA \Rightarrow AQ = OA \cdot \text{sen } \alpha \\ BA &= \text{sen } B \\ OA &= \text{cos } B \end{aligned}$$

Por tanto: $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha + \text{cos } \beta \cdot \text{sen } \alpha$

Coseno de la suma : $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin[90^\circ + (\alpha + \beta)] = \sin[(90^\circ + \alpha) + \beta] = \sin(90^\circ + \alpha) \cdot \cos\beta + \cos(90^\circ + \alpha) \cdot \text{sen}\beta \\ &= \cos\alpha \cdot \cos\beta + (-\text{sen}\alpha) \cdot \text{sen}\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \end{aligned}$$

Tangente de la suma : $\text{tag}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tag}\alpha + \text{tag}\beta}{1 - \text{tag}\alpha \cdot \text{tag}\beta}$

$$\begin{aligned} \text{Tag}(\alpha + \beta) &= \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta} = \frac{\frac{\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \text{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \\ &= \frac{\text{tag}\alpha + \text{tag}\beta}{1 - \text{tag}\alpha \cdot \text{tag}\beta} \end{aligned}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Seno de la resta: $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta$

$$\begin{aligned} \text{Sen}(\alpha - \beta) &= \text{sen}(\alpha + (-\beta)) = \text{sen}\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \text{sen}(-\beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot (-\text{sen}\beta) \\ &= \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta \end{aligned}$$

Coseno de la resta: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot (-\text{sen}\beta) \\ &= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \end{aligned}$$

Tangente de la resta: $\text{tag}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tag}\alpha - \text{tag}\beta}{1 + \text{tag}\alpha \cdot \text{tag}\beta}$

$$\begin{aligned} \text{Tag}(\alpha - \beta) &= \text{tag}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\text{tag}\alpha + \text{tag}(-\beta)}{1 - \text{tag}\alpha \cdot \text{tag}(-\beta)} = \frac{\text{tag}\alpha + (-\text{tag}\beta)}{1 - \text{tag}\alpha \cdot (-\text{tag}\beta)} = \frac{\text{tag}\alpha - \text{tag}\beta}{1 + \text{tag}\alpha \cdot \text{tag}\beta} \end{aligned}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Seno del ángulo doble: $\text{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

$$\text{Sen}(2\alpha) = \text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha = 2 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

Coseno del ángulo doble: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

$$\text{Cos}(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

Tangente del ángulo doble : $\text{tag}(2\alpha) = \frac{2\text{tag}\alpha}{1 - \text{tag}^2\alpha}$

$$\text{Tag}(2\alpha) = \text{tag}(\alpha + \alpha) = \frac{\text{tag}\alpha + \text{tag}\alpha}{1 - \text{tag}\alpha \cdot \text{tag}\alpha} = \frac{2\text{tag}\alpha}{1 - \text{tag}^2\alpha}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

$$\cos \alpha = \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Seno del ángulo mitad : } \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{Coseno del ángulo mitad: } \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - (1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}) \Rightarrow \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{Tangente del ángulo mitad: } \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\text{Dividiendo } \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \text{ entre } \cos \frac{\alpha}{2}$$

Nota: En cada caso, el signo será + ó -, según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo $\frac{\alpha}{2}$

SUMAS Y DIFERENCIAS DE SENOS Y DE COSENOS

$$\operatorname{Sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \quad \operatorname{Sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{Cos} A + \operatorname{cos} B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \quad \operatorname{Cos} A - \operatorname{cos} B = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{Sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{Sen} (\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{Sumando: } \operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \operatorname{sen} (\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\text{Restando: } \operatorname{sen} (\alpha - \beta) - \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{Cos} (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{Cos} (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{Sumando : } \operatorname{cos} (\alpha + \beta) + \operatorname{cos} (\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\text{Restando: } \operatorname{cos} (\alpha - \beta) - \operatorname{cos} (\alpha + \beta) = -2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{Llamando } \alpha + \beta = A$$

$$\alpha - \beta = B$$

Y resolviendo el sistema, se tiene: $\alpha = \frac{A+B}{2}$; $\beta = \frac{A-B}{2}$ y las identidades.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ecuaciones trigonométricas son aquellas en las que aparecen funciones trigonométricas actuando sobre un ángulo incógnita que, como en todas las ecuaciones, hay que despejar:

Salvo que se pida expresamente, el valor de la incógnita puede darse indistintamente en grados o en radianes.

Las soluciones que se obtengan deben ser comprobadas sobre la ecuación inicial si hemos elevado al cuadrado.

Pasos:

- Expresar todo con el mismo ángulo
- Expresar todo con la misma razón trigonométrica.