7. Ampliación: composición de movimientos

Se llama **composición de dos transformaciones**, $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, a una nueva transformación, que se designa $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$, que transforma cada punto del siguiente modo:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mathcal{T}_1"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1"'] & P' \arrow[r, "\mathcal{T}_2"] & P'' \end{tikzcd}$$

$$(\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1)(P) = \mathcal{T}_2(P') = P''$$

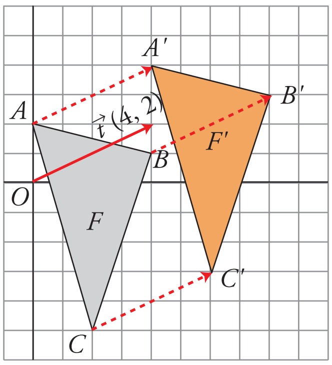
Es decir, para transformar un punto P o una figura F mediante $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$, lo transformamos mediante $\mathcal{T}_1$, y el resultado, mediante $\mathcal{T}_2$.

Para componer $\mathcal{T}_1$ con $\mathcal{T}_2$ ponemos $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$. Es decir, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ se lee de derecha a izquierda.

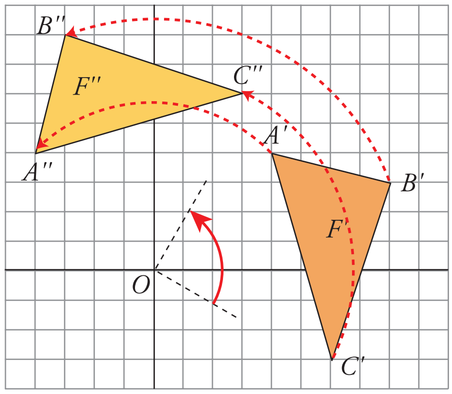
Veamos sobre un ejemplo cómo se componen movimientos.

Definimos un giro **G** de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$ y una traslación **T** de vector $\vec{t}(4, 2)$. Veamos qué resulta al transformar un triángulo F de vértices $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ y $C(2, -5)$ mediante la transformación **G**∘**T**.

Primeramente se aplica **T** y, sobre la figura obtenida, se aplica **G.**

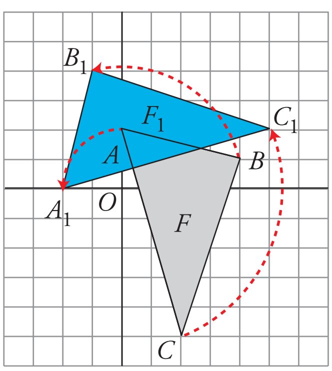


$\mathbf{T}(F) = F'$

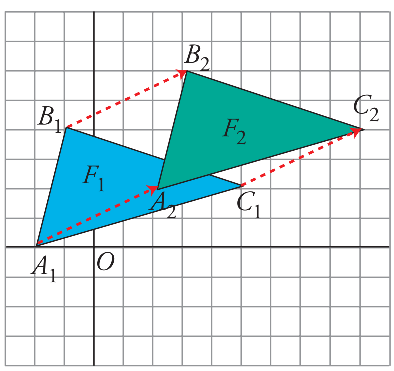


$\mathbf{G} \circ \mathbf{T}(F) = \mathbf{G}(F') = F''$

Veamos ahora qué resulta al transformar la misma figura F mediante **T**∘**G**. Primeramente se aplica **G** y, sobre la figura obtenida, se aplica **T**.



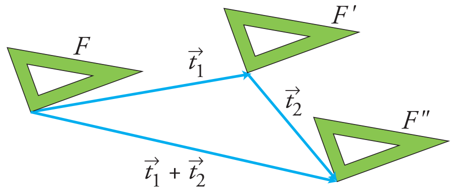
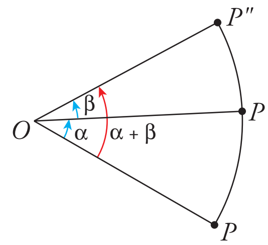
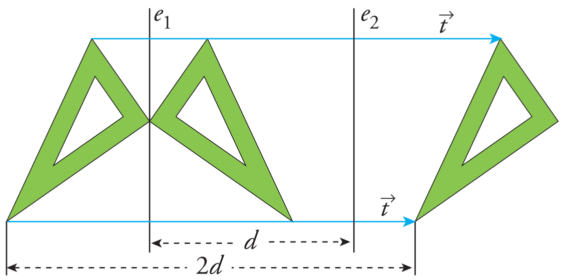
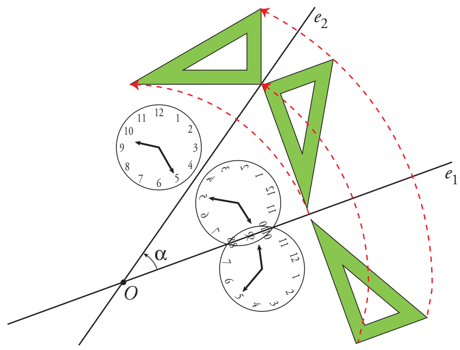
$\mathbf{G}(F) = F_1$



$\mathbf{T} \circ \mathbf{G}(F) = \mathbf{T}(F_1) = F_2$

Se puede observar que en ambos procesos el triángulo F se transforma en otro triángulo con la misma forma. Sin embargo, los triángulos F'' y F_2 están situados en lugares distintos, es decir, no es lo mismo **G**∘**T** que **T**∘**G**.

Resultados interesantes al componer movimientos

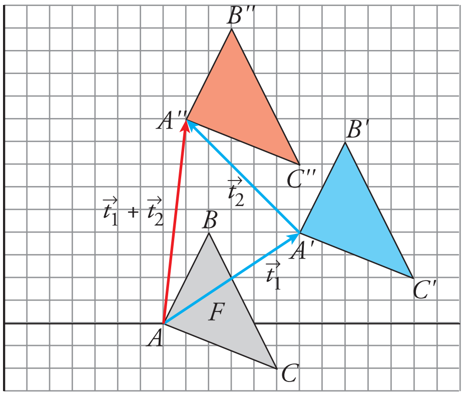
COMPOSICIÓN DE TRASLACIONES	Al componer dos traslaciones de vectores $\vec{t}_1$ y $\vec{t}_2$, el resultado es otra traslación cuyo vector es la suma $\vec{t}_1 + \vec{t}_2$.	
COMPOSICIÓN DE GIROS DEL MISMO CENTRO	El resultado de componer dos giros con el mismo centro, O, y ángulos α y β, es un nuevo giro de centro O y ángulo $\alpha + \beta$. Si α y β son de sentidos opuestos, la amplitud de $\alpha + \beta$ es la diferencia de sus amplitudes.	
COMPOSICIÓN DE SIMETRÍAS AXIALES CON EJES PARALELOS	El resultado de componer dos simetrías, $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$, de ejes e_1 y e_2 paralelos, es una traslación $\mathbf{T}$, cuyo vector $\vec{t}$ es perpendicular a los ejes y cuya longitud es el doble de la distancia que los separa, $2d$. (El sentido de $\vec{t}$ es el que va de e_1 a e_2.)	
COMPOSICIÓN DE SIMETRÍAS AXIALES CON EJES QUE SE CORTAN	El resultado de componer dos simetrías, $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$, de ejes e_1 y e_2 que se cortan bajo un ángulo α, es un giro de ángulo 2α y centro el punto de corte de los dos ejes. El ángulo α que forman los ejes es un ángulo orientado. ($\alpha = \widehat{e_1 e_2}$ es el menor de los ángulos que forman los ejes al cortarse y tiene el sentido de e_1 a e_2.)	

En general, el resultado de componer dos movimientos es otro movimiento:

- Si ambos son deslizamientos, el resultado es un deslizamiento.
- Si ambos son movimientos inversos, el resultado es un deslizamiento.
- Si uno es directo y el otro inverso, el resultado es un movimiento inverso.

Veamos dos ejemplos de composición de movimientos.

Ejemplo 1



$\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son traslaciones de vectores respectivos $\vec{t}_1(6, 4)$ y $\vec{t}_2(-5, 5)$.

F es un triángulo de vértices $A(7, 0)$, $B(9, 4)$ y $C(12, -2)$.

Hemos pasado del triángulo ABC al $A'B'C'$ por la traslación $\mathbf{T}_1$. Y del $A'B'C'$ al $A''B''C''$ mediante la traslación $\mathbf{T}_2$.

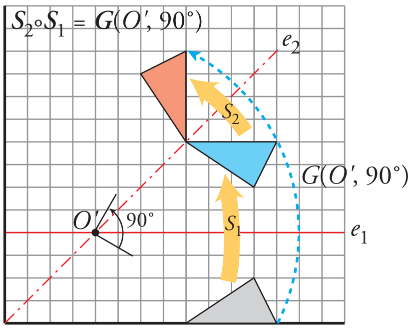
Pero podríamos haber pasado directamente de ABC a $A''B''C''$ mediante la traslación $\mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1$, cuyo vector es $\vec{t}_1 + \vec{t}_2\ (1, 9)$.

Ejemplo 2

Se consideran las simetrías $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ cuyos ejes e_1 y e_2 son las rectas $e_1: y = 4$ y $e_2: y = x$.

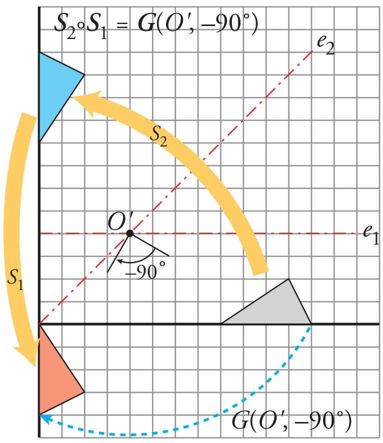
F es un triángulo de vértices $A(8, 0)$, $B(12, 0)$ y $C(11, 2)$.

En la siguiente gráfica se puede observar cómo se transforma F mediante $\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1$.



El resultado final (paso del triángulo negro al rojo) es un giro de centro $O'(4, 4)$ y ángulo 90° (positivo, pues es contrario al sentido de las agujas del reloj).

Y en esta otra cómo se transforma F mediante $\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2$.



El resultado final, en este otro caso, es un giro de centro O' y ángulo –90°.