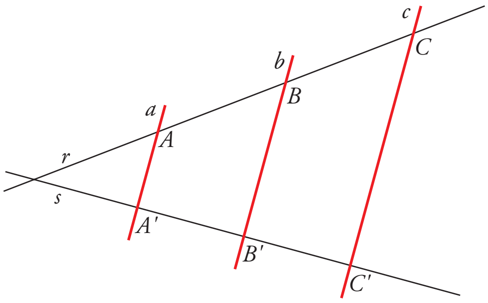
5. Ampliación teórica: teorema de Tales

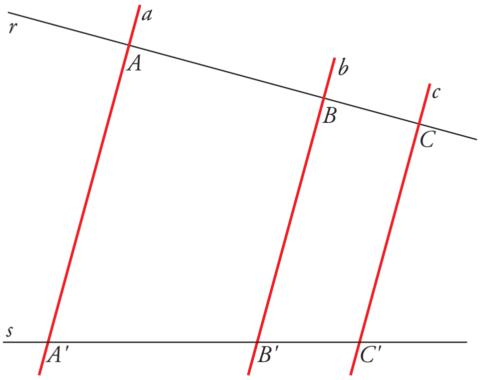
Rectas paralelas que cortan a otras dos



Las rectas a, b y c son paralelas y cortan a las rectas r y s.

Si los segmentos AB y BC son iguales, entonces los segmentos $A'B'$ y $B'C'$ son iguales.

$$\overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{B'C'}$$



También aquí las rectas a, b y c son paralelas y cortan a las rectas r y s. El segmento AB es doble que el BC. Por tanto, $A'B'$ es doble que $B'C'$.

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{A'B'} = 2 \cdot \overline{B'C'}$$

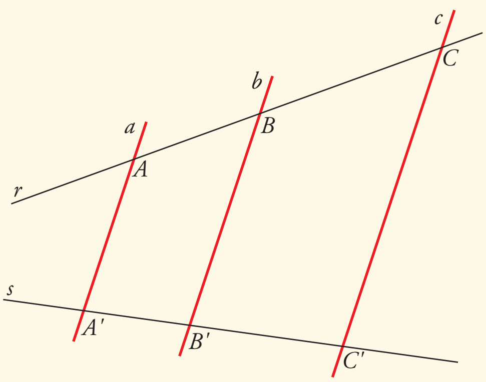
El siguiente teorema generaliza estos resultados:

Teorema de Tales

Si las rectas a, b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas, r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

También ocurre lo recíproco: si los segmentos AB y BC son proporcionales a $A'B'$ y $B'C'$, y las rectas a y b son paralelas, entonces la recta c es paralela a ellas.



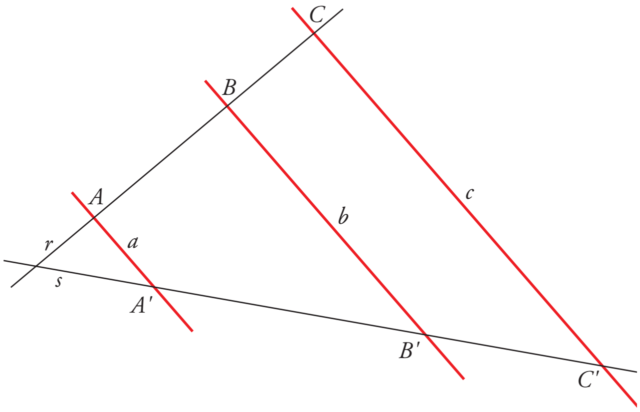
Aplicaciones de este teorema

1. Tomando medidas sobre este dibujo, vemos que:

$\overline{AB}$ = 2,3 cm

$\overline{BC}$ = 1,5 cm

$\overline{B'C'}$ = 2,4 cm



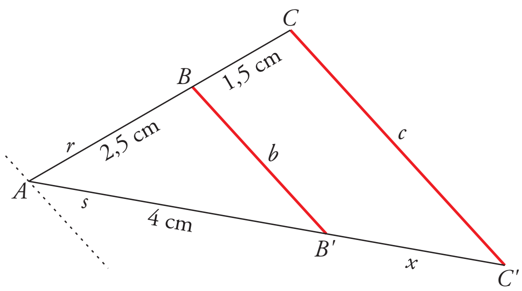
Sin tomar medidas, podemos averiguar la longitud de $A'B'$.

Puesto que las rectas a, b y c son paralelas, los segmentos que determinan en r y s son proporcionales. Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{2{,}3}{1{,}5} = \frac{\overline{A'B'}}{2{,}4} \rightarrow \overline{A'B'} = \frac{2{,}3 \cdot 2{,}4}{1{,}5} = 3{,}68 \text{ cm}$$

El segmento $A'B'$ mide 3,68 cm.

2. Para calcular $\overline{B'C'} = x$ en esta figura, se puede aplicar el teorema de Tales.



Para aplicar el teorema de Tales necesitamos, al menos, tres rectas paralelas. Las rectas b y c lo son. La tercera es la que corta a las dos rectas r y s en el mismo punto A.

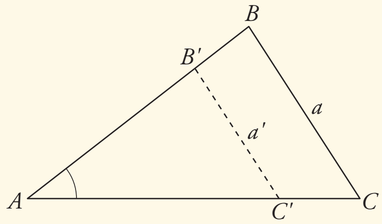
Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{2{,}5}{1{,}5} = \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 1{,}5}{2{,}5} = 2{,}4 \text{ cm}$$

5. Ampliación teórica: teorema de Tales

Propiedad

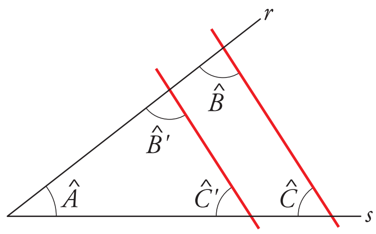
Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.



Demostración

Para demostrar que esta propiedad es cierta, se ha de probar que si dos triángulos están en posición de Tales, entonces sus ángulos son respectivamente iguales y sus lados proporcionales.

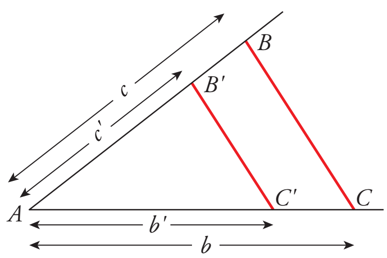
- Sus ángulos son iguales:

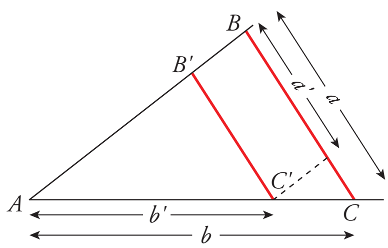


El ángulo $\hat{A}$ es común a los dos triángulos.

$\hat{B}' = \hat{B}$ y $\hat{C}' = \hat{C}$ por ser ángulos *correspondientes* entre paralelas.

- Sus lados son proporcionales:





Aplicando el teorema de Tales: $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'}$

Trazando por C' una paralela a AB y aplicando nuevamente el teorema de Tales, se obtiene $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$.

Por lo tanto, se llega a demostrar lo que se quería, $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.