6 Semejanza

INTRODUCCIÓN

El primer objetivo de esta unidad es repasar el teorema de Tales y usarlo para dividir un segmento en partes iguales.

Como aplicación de dicho teorema, tratamos los criterios de semejanza de los triángulos en general, y de los triángulos rectángulos en particular, aplicándolos en la resolución de casos prácticos.

En la segunda parte estudiamos las semejanzas y, sobre todo, los criterios de semejanza de polígonos, así como la relación que existe entre las áreas de figuras semejantes.

Como último objetivo de esta unidad, trabajamos con escalas numéricas y gráficas, su utilización en planos y mapas, aplicándolas al caso del plano de una vivienda.

RESUMEN DE LA UNIDAD

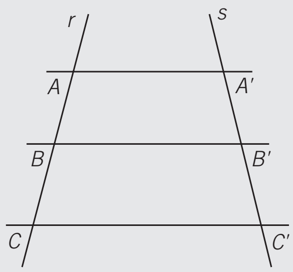
- *Teorema de Tales*: si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes r y s, los segmentos que se forman sobre r son proporcionales a los segmentos formados sobre s.
- *Criterios de semejanza de triángulos*: dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales; si tienen dos ángulos iguales, o si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.
- *Criterios de semejanza de triángulos rectángulos*: dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen dos pares de lados proporcionales, o si tienen un ángulo agudo igual.
- Dos *polígonos son semejantes* si sus ángulos homólogos son iguales, o si sus lados homólogos son proporcionales.
- El cociente entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.
- La *escala* es la razón de semejanza entre el objeto original y su representación en un plano, mapa, maqueta, etc.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer y aplicar el teorema de Tales.	• Teorema de Tales.	• Cálculo de un segmento, conocidos los otros tres segmentos en los que dos rectas paralelas cortan a dos rectas cualesquiera. • División de un segmento en un número de partes iguales.
2. Semejanza de triángulos.	• Criterios de semejanza de triángulos. • Criterios de semejanza de triángulos rectángulos.	• Aplicación de los criterios de semejanza para calcular los elementos de un triángulo. • Aplicación de los criterios de semejanza para calcular los elementos de un triángulo rectángulo.
3. Semejanzas.	• Criterios de semejanza de polígonos.	• Aplicación de los criterios de semejanza para calcular los elementos de un polígono.
4. Relación entre áreas de figuras semejantes.	• Cociente entre las superficies de dos figuras semejantes.	• Obtención de las medidas de los lados de un rectángulo, conocidos su área, y el área y los lados de un rectángulo semejante.
5. Escalas.	• Escalas numérica y gráfica.	• Cálculo de distancias o dimensiones sobre un plano, representado a escala.

1 OBJETIVO 1
CONOCER Y APLICAR EL TEOREMA DE TALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TEOREMA DE TALES



Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes r y s, los segmentos que se forman sobre la recta r son proporcionales a los segmentos formados sobre s.

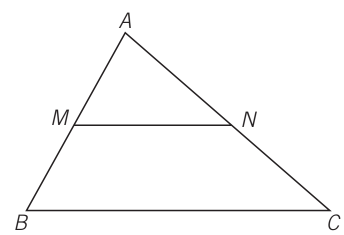
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

EJEMPLO

Aplicando el teorema de Tales al triángulo de la figura, en el que se ha trazado una recta paralela al lado BC, que corta a los otros lados en los puntos M y N, resulta:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

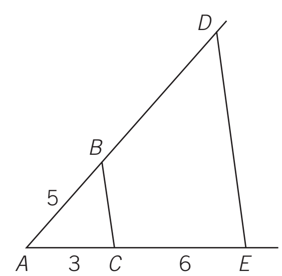
Los triángulos $\widehat{AMN}$ y $\widehat{ABC}$ están en posición de Tales.



1 **Calcula la longitud de *BD* en la figura.**

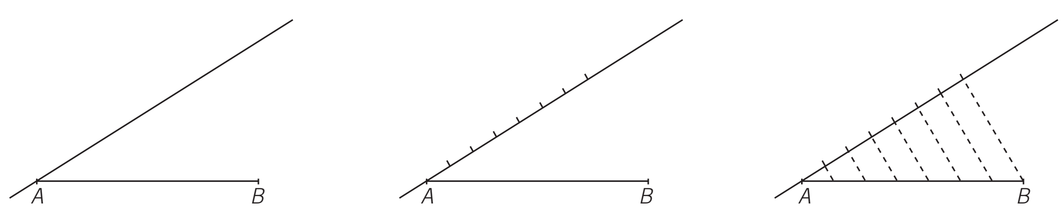
Aplicando el teorema de Tales, tenemos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{AD}{9} \rightarrow AD = \_\_\_\_\_$$



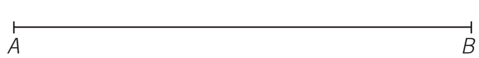
EJEMPLO

Dividimos el segmento AB en 7 partes iguales: sobre una recta auxiliar que pase por A, marcamos con una regla 7 unidades iguales, de 1 cm. Unimos la séptima marca con el extremo B del segmento, y trazamos rectas paralelas a esa línea discontinua desde las demás marcas.



El segmento AB ha quedado dividido en siete partes iguales.

2 **Divide en 5 partes iguales el segmento *AB* de la figura.**

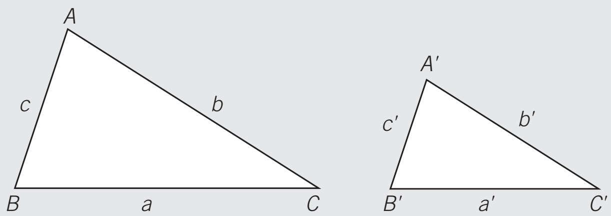


OBJETIVO 2

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dos triángulos son **semejantes** si tienen sus ángulos iguales y sus lados son proporcionales.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A}'\\ \hat{B} = \hat{B}'\\ \hat{C} = \hat{C}'\end{array}\right\} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Los vértices homólogos son A y A', B y B' o C y C'.
Los lados homólogos son a y a', b y b' o c y c'.

Razón de semejanza: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

CRITERIOS DE SEMEJANZA

Dos triángulos son semejantes si cumplen alguno de estos criterios.

- Tienen sus tres lados proporcionales.
- Presentan dos ángulos iguales.
- Poseen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

EJEMPLO

¿Son semejantes el triángulo de lados $a = 18$ cm, $b = 12$ cm y $c = 10$ cm, y el triángulo de lados $a' = 45$ cm, $b' = 30$ cm y $c' = 25$ cm?

Veamos si los lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{18}{45} = \frac{12}{30} = \frac{10}{25} \rightarrow \frac{2 \cdot 3^2}{3^2 \cdot 5} = \frac{2^2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 5}{5^2} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Se cumple el primer criterio de semejanza; por tanto, los dos triángulos son semejantes.

1 **Comprueba si son semejantes las parejas de triángulos.**

a) $\hat{A} = 43°$, $\hat{C} = 81°$
$\hat{A}' = 43°$, $\hat{B}' = 56°$

c) $\hat{A} = 30°$, $b = 3$, $c = 5$
$\hat{A}' = 30°$, $b' = 6$, $c' = 10$

b) $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$
$a' = 20$, $b' = 30$, $c' = 50$

d) $\hat{A} = 45°$, $b = 2$, $c = 7$
$\hat{A}' = 45°$, $b' = 4$, $c' = 5$

2 **Los lados de un triángulo miden 9 cm, 3 cm y 6 cm. Halla los lados de un triángulo semejante, sabiendo que la razón de semejanza vale 3.**

$$\frac{9}{a'} = \frac{3}{b'} = \frac{6}{c'} = 3 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{a'} = 3 \rightarrow a' = \_\_\_\_\_\_ \\ \dfrac{3}{b'} = 3 \rightarrow b' = \_\_\_\_\_\_ \\ \dfrac{6}{c'} = 3 \rightarrow c' = \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

3 **Los lados de un triángulo miden 3 cm, 1 cm y 2 cm. El perímetro de un triángulo semejante a él mide 30 cm. Halla la razón de semejanza y los lados del nuevo triángulo.**

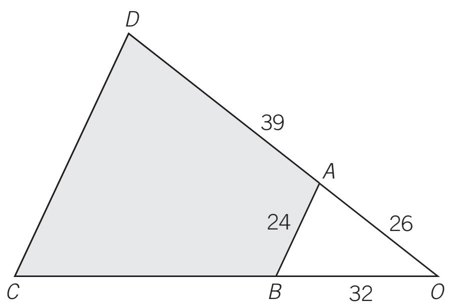
Ten en cuenta que si dos triángulos son semejantes, sus perímetros también guardan la relación de semejanza.

$$\frac{3+1+2}{30} = r \rightarrow r = \frac{6}{30} = \_\_\_\_\_\_$$

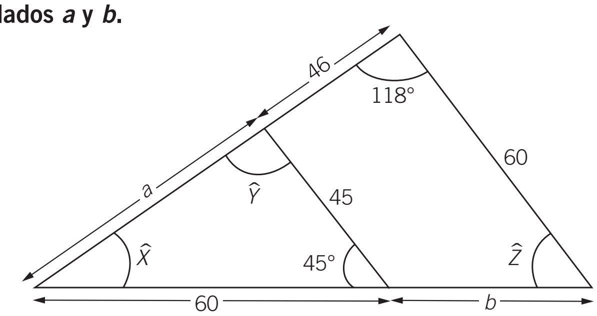
Y despejando, tenemos que:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a'} = \dfrac{1}{5} \rightarrow a' = \_\_\_\_\_\_ \\ \dfrac{1}{b'} = \dfrac{1}{5} \rightarrow b' = \_\_\_\_\_\_ \\ \dfrac{2}{c'} = \dfrac{1}{5} \rightarrow c' = \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

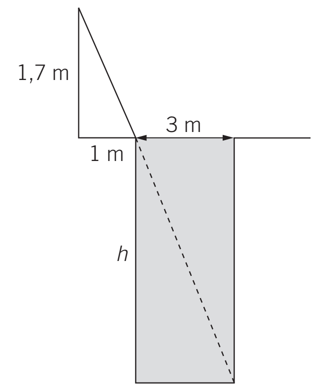
4 **El jardín de la figura tiene la forma del cuadrilátero *ABCD*, con sus lados *AB* y *CD* paralelos. Calcula lo que miden los lados *BC* y *CD*.**



5 **Halla los valores de los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ y de los lados *a* y *b*.**



6 **Determina la profundidad de una piscina que mide 3 m de ancho, sabiendo que una persona que mide 1,7 m de altura, y que está situada a 1 m del borde, visualiza la esquina inferior de la piscina.**



CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En el caso de triángulos rectángulos, los criterios de semejanza anteriores se simplifican.
Así, dos triángulos rectángulos son semejantes cuando cumplen uno de estos criterios.

- Si tienen dos pares de lados proporcionales.
- Si tienen un ángulo agudo igual.

EJEMPLO

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ABM}$ son semejantes, ya que tienen un ángulo agudo igual, $\widehat{B}$.

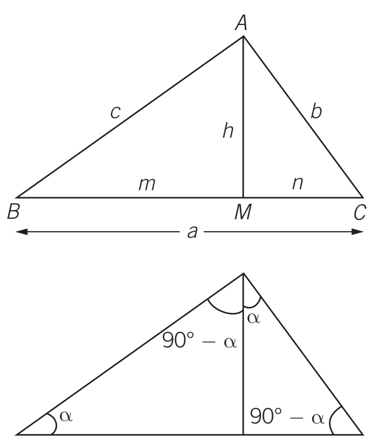
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$$

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AMC}$ son semejantes, porque tienen un ángulo agudo igual, $\widehat{C}$.

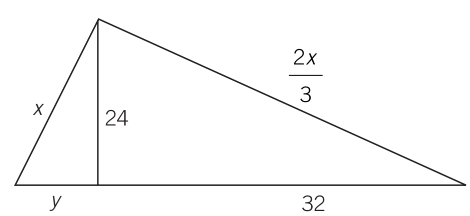
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$

Los triángulos $\widehat{AMB}$ y $\widehat{AMC}$ son semejantes, pues tienen sus tres ángulos iguales.

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$



7 **Calcula lo que miden los lados indicados con incógnitas.**



8 **Un padre y su hijo están esperando en la parada del autobús. La sombra del padre mide 1,2 m, y la del hijo mide 1,07 m. Sabiendo que el hijo mide 1,65 m, calcula la estatura del padre.**

6 OBJETIVO 3
SEMEJANZAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

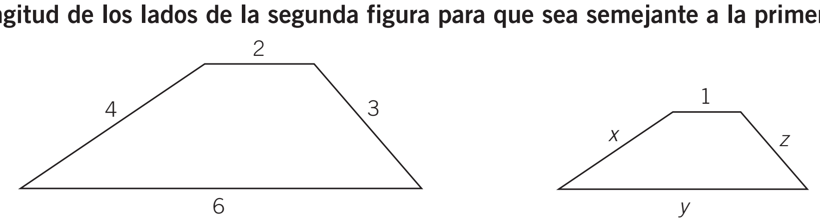
Las **semejanzas** transforman una figura dada en otra figura con la misma forma y distinto tamaño.
Las semejanzas se diferencian de las traslaciones y los giros en que no son movimientos.

Dos **polígonos** son **semejantes** si:

- Sus ángulos homólogos son iguales.
- Los lados homólogos son proporcionales, siendo el cociente entre un lado y su lado homólogo igual a la razón de semejanza.

EJEMPLO

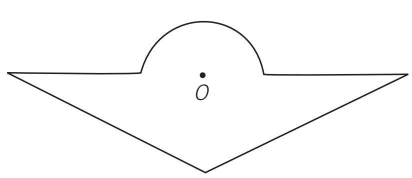
Halla la longitud de los lados de la segunda figura para que sea semejante a la primera.



Como las dos figuras son semejantes, existe una proporcionalidad entre las longitudes de sus lados:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{x} = \frac{6}{y} = \frac{3}{z} \qquad 2 = \frac{4}{x} \rightarrow x = \_\_\_\_ \qquad 2 = \frac{6}{y} \rightarrow y = \_\_\_\_ \qquad 2 = \frac{3}{z} \rightarrow z = \_\_\_\_$$

1 **Construye una figura semejante a la siguiente, de manera que la razón de semejanza entre ambas sea $\frac{1}{2}$, tomando como referencia el punto *O*.**

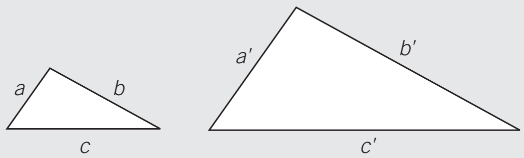


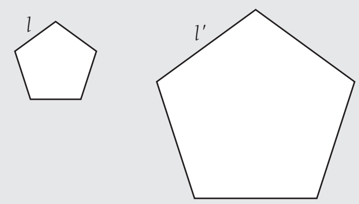
2 **Los lados de un triángulo miden 3, 5 y 7 cm. El perímetro de un triángulo semejante a él mide 45 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza? Calcula los lados del nuevo triángulo.**

RELACIÓN ENTRE ÁREAS DE FIGURAS SEMEJANTES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El cociente entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de **semejanza**.





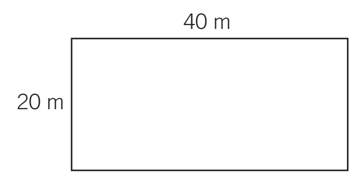
$\dfrac{a}{a'} = r =$ razón de semejanza $\rightarrow \dfrac{S}{S'} = r^2$ $\qquad$ $\dfrac{l}{l'} = r =$ razón de semejanza $\rightarrow \dfrac{S}{S'} = r^2$

EJEMPLO

Un agricultor ha cercado su huerta con una valla de alambre, que tiene la forma y dimensiones de la figura.

a) ¿Cuántos metros de valla necesitaría para cercar una huerta semejante, con la mitad de superficie que la anterior?

b) ¿Y si quisiera vallar una huerta semejante, que fuera tres veces mayor?

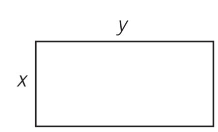


a) La huerta inicial tiene esta superficie: $S = 20 \cdot 40 = 800$ m^2. Como la nueva huerta tiene la mitad de superficie que la anterior, medirá: $\dfrac{800}{2} = 400$ m^2. Aplicando la relación entre ambas superficies obtendremos la razón de semejanza: $\dfrac{800}{400} = r^2 \rightarrow r = \sqrt{2}$

Así, la nueva huerta medirá:

$$\frac{20}{x} = \sqrt{2} \rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\frac{40}{y} = \sqrt{2} \rightarrow y = \frac{40}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \text{ m}$$



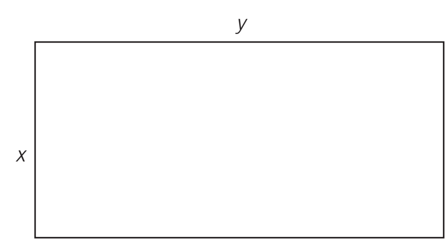
b) Como la nueva huerta tiene una superficie que es tres veces mayor que la primera, tendrá: $3 \cdot 800 = 2.400$ m^2. Aplicando la relación entre ambas superficies obtendremos la razón de semejanza:

$$\frac{800}{2.400} = r^2 \rightarrow \frac{1}{3} = r^2 \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

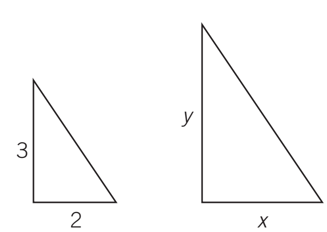
Así, la nueva huerta medirá:

$$\frac{20}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\frac{40}{y} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{40 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3} \text{ m}$$



1 **Sabiendo que la relación de semejanza entre los dos triángulos de la figura es de $\dfrac{1}{4}$, halla el área del segundo triángulo.**



6 OBJETIVO 5
ESCALAS

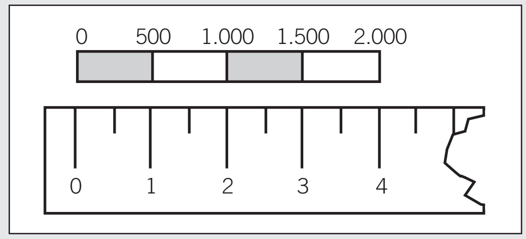
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La **escala** es la razón de semejanza entre el objeto original y su representación, que puede ser un plano, un mapa, una maqueta, etc.

La escala puede venir representada en forma numérica o gráfica.

Escala numérica: 1 : 500

Escala gráfica:



En ambos casos, 1 unidad sobre el plano representa 500 unidades en la realidad.

EJEMPLO

Calcula las dimensiones de las habitaciones del piso al que le corresponde el siguiente plano, representado a escala 1 : 200.

Midiendo con la regla graduada las diferentes habitaciones, obtenemos:

Salón:

2,5 cm · 3 cm → 500 cm · 600 cm = 5 m · 6 m

Cocina:

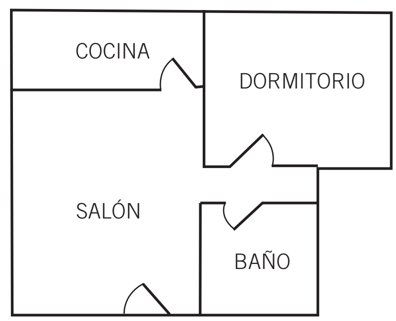
2,5 cm · 1 cm → 500 cm · 200 cm = 5 m · 2 m

Dormitorio:

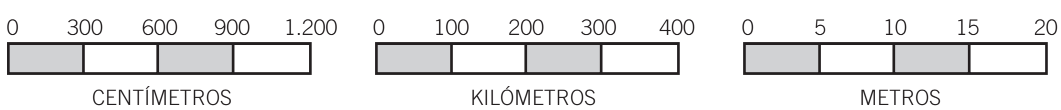
2,5 cm · 2 cm → 500 cm · 400 cm = 5 m · 4 m

Baño:

1,5 cm · 1,5 cm → 300 cm · 300 cm = 3 m · 3 m



1 **Mide con la regla y escribe la escala numérica correspondiente a las escalas gráficas.**



2 **Dibuja las escalas gráficas correspondientes a las siguientes escalas numéricas.**

a) 1 : 500 b) 1 : 6.000 c) 1 : 100.000

3 **En un mapa de carreteras a escala 1 : 5.000.000 medimos la distancia que hay en línea recta entre dos ciudades, siendo de 4,5 cm. ¿Qué distancia en kilómetros habrá en la realidad?**