

1 Números enteros

INTRODUCCIÓN

Los conceptos que se estudian en esta unidad ya han sido tratados en cursos anteriores. A pesar de ello, es importante volverlos a repasar, pues los alumnos suelen cometer errores al operar con este tipo de números.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Los *números enteros* son los números naturales precedidos de los signos + y -. El mayor de dos números naturales se sitúa siempre más a la derecha en la recta numérica.
- Podemos realizar *operaciones* aritméticas con los números enteros: sumar, restar, multiplicar y dividir.
- Los *múltiplos de un número* contienen al número una cantidad exacta de veces. Los *divisores de un número* son aquellos que caben exactamente en él una serie de veces.
- Un *número primo* solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad. Los números que tienen más de dos divisores se llaman *compuestos*.
- *Descomponer* un número en *factores primos* es expresar dicho número como producto de distintos números primos elevados a exponentes.
- El *máximo común divisor* (m.c.d.) de dos números es el mayor de los divisores comunes de ambos.
- El *mínimo común múltiplo* de dos números es el menor de los múltiplos comunes de ambos.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer el valor de cada una de las cifras de un número.	<ul style="list-style-type: none"> • Valor de cada cifra en función de la posición que ocupa. • Expresión polinómica de un número. 	<ul style="list-style-type: none"> • Identificación de la posición que ocupa cada cifra en un número y su valor. • Desarrollo de un número en forma polinómica.
2. Representar y operar con números enteros.	<ul style="list-style-type: none"> • Representación de los números enteros. • Valor absoluto de un número entero. • Operaciones con números enteros. 	<ul style="list-style-type: none"> • Localización de números enteros sobre las divisiones de una recta. • Obtención del valor absoluto de números enteros. • Operaciones con números enteros.
3. Hallar el máximo común divisor (m.c.d.) de dos números.	<ul style="list-style-type: none"> • Máximo común divisor (m.c.d.) de dos números. 	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención de los divisores de dos números y selección del mayor divisor común.
4. Hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números.	<ul style="list-style-type: none"> • Mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números. 	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención de los primeros múltiplos de dos números y selección del menor múltiplo común.
5. Resolver problemas de m.c.m. y m.c.d.	<ul style="list-style-type: none"> • Problemas reales resolubles mediante el m.c.m. y el m.c.d. 	<ul style="list-style-type: none"> • Resolución de problemas reales calculando el m.c.m. o el m.c.d. de varios números.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

1 OBJETIVO 1

RECONOCER EL VALOR DE CADA UNA DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

En un número, el **valor** de cada cifra depende de la **posición** que ocupe.
Una cifra escrita a la izquierda de otra cifra representa unidades de un orden inmediato superior.

EJEMPLO

En el número 3.125.479,275:

3 representa las unidades de millón.

1 representa las centenas de millar.

2 representa las decenas de millar.

5 representa las unidades de millar.

4 representa las centenas.

7 representa las decenas.

9 representa las unidades.

2 representa las décimas.

7 representa las centésimas.

5 representa las milésimas.

EXPRESIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO

Un número es el resultado de sumar los valores de posición de cada una de sus cifras.

EJEMPLO

$$3.025.079 = 3 \cdot 10^6 + \dots + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + \dots + 7 \cdot 10 + 9$$

$$35,012 = 3 \cdot 10 + 5 + \dots + 1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$$

La cifra 0 no aporta valor al número, independientemente de la posición que ocupe.

1 Identifica las cifras y escribe en forma polinómica los siguientes números.

a) 83 8 \longrightarrow decenas 3 \longrightarrow unidades

$$83 = 8 \cdot 10 + 3$$

b) 511,3 5 \longrightarrow centenas 1 \longrightarrow decenas
1 \longrightarrow _____ 3 \longrightarrow décimas

$$511,3 = 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 1 + 3 \cdot 10^{-1}$$

c) 2.305,74

2 \longrightarrow unidades de millar 3 \longrightarrow centenas 0 \longrightarrow _____
5 \longrightarrow _____ 7 \longrightarrow _____ 4 \longrightarrow centésimas

$$2.305,74 = 2 \cdot 10^3 + \text{_____} + \text{_____} + 7 \cdot \text{_____} + 4 \cdot 10^{-2}$$

d) 3.003.303,303

3 \longrightarrow unidades de millón 3 \longrightarrow unidades de millar 3 \longrightarrow centenas
3 \longrightarrow unidades 3 \longrightarrow décimas 3 \longrightarrow milésimas

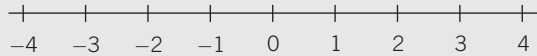
$$3.003.303,303 = 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot \text{_____} + 3 \cdot \text{_____} + 3 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot \text{_____}$$

OBJETIVO 2

REPRESENTAR Y OPERAR CON NÚMEROS ENTEROS**1**

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Representamos los números enteros positivos y negativos sobre una recta dividida en intervalos de la misma longitud.

**EJEMPLO**

Representa y ordena, de menor a mayor, los siguientes números enteros: 7, -1, -3, 5, 0, 1, -7 y 2.

Los representamos sobre la recta:



Su ordenación es inmediata: $-7 < -3 < -1 < 0 < 1 < 2 < 5 < 7$

1 Representa y ordena estos números enteros: -4, -5, 4, 5, -2, 2, -7 y 7.

2 Indica el signo < (menor que) o > (mayor que), según corresponda en cada caso.

a) $-5 > -7$

c) $5 \square 7$

e) $-3 \square 0$

b) $0 \square 9$

d) $-5 \square -1$

f) $4 \square 1$

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

- El valor absoluto de un entero positivo es él mismo: $|3| = 3$, $|7| = 7$
- El valor absoluto de un entero negativo es su opuesto: $|-3| = 3$, $|-15| = 15$

3 Opera y halla el valor absoluto de los números enteros.

a) $|3 - 5| = |-2| = 2$

b) $|3 - 7 + 2 - 5| = |\square| = \square$

c) $|(-1) \cdot (4 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$

d) $|(2 - 3) \cdot (7 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$

e) $|(-4) : (7 - 8)| = |(-4) : (\square)| = |\square| = \square$

4 Efectúa las siguientes operaciones con números enteros.

a) $[(-2)^2 + 2^3] : (-2) = [\square + \square] : (-2) = \square : (-2) = -6$

b) $3 \cdot [1 - 4 + 2] - (-3) \cdot [5 - (7 - 3)] = 3 \cdot (\square) - (-3) \cdot [5 - \square] = \square + \square = \square$

c) $[(-2)^2 \cdot 6^2] : 3^2 = [4 \cdot 36] : 9 = \square : 9 = 16$

d) $|(-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-3 + 5)| = |(-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2| = |-\square - \square| = |\square| = 7$

e) $|[(-5 + 3) \cdot 5] : (2 - 7)| = |[(-2) \cdot 5] : (-5)| = |(\square) : (-5)| = 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

1

5 Completa con el número que falta.

a) $21 + \square = -33$ b) $65 - \square = -9$ c) $\square - 53 = 6$ d) $-\square - (-3) = 11$

6 Completa con números que hagan cierta la igualdad.

a) $-(\square + 2) = 12$ c) $-3 - (-\square + 1) = 9$
 b) $3 - (5 - \square) = 7$ d) $-(-\square - 4) = 13$

7 La suma de dos números enteros es -2 y uno de ellos es 4 , ¿cuál es el otro?

8 Si la diferencia de dos números enteros es -3 y el minuendo es 5 , ¿cuál es el sustraendo?

9 Si el producto de dos números enteros es -16 y uno es 8 , ¿cuál es el otro?

10 El producto de dos números enteros es -24 . ¿Qué números enteros pueden ser sus factores?

11 Expresa los siguientes números enteros como producto de otros números enteros.

a) -9 c) -35 e) 55
 b) 8 d) -72 f) -24

12 Busca los números que hacen ciertas estas igualdades.

a) $4 \cdot \square = (-2) \cdot 8$ c) $5 \cdot \square \cdot 2 = -100$
 b) $-3 \cdot \square = 9 \cdot (-4)$ d) $(-4) \cdot (-8) \cdot \square = -128$

13 ¿Cuánto tiene que valer la letra a en cada caso?

a) $14 : (-a) = -2$ d) $-56 : a = -8$
 b) $18 : (-a) = 9$ e) $a : (-2) = 5$
 c) $-25 : (-a) = 5$ f) $a : 7 = -7$

14 Si $a = 7$ y $b = -8$, calcula el valor de:

a) $|a|$ d) $|-b|$
 b) $|b|$ e) $|a + b|$
 c) $|-a|$ f) $|a - b|$

15 Deduce los posibles valores de la letra a .

- a) $|a| = 7$
- b) $|-a| = 2$
- c) $|a + 3| = 4$
- d) $|2 - a| = 5$

16 Continúa las igualdades hasta que tengan cinco términos.

- a) $-4 = -5 + 1 = \dots$
- b) $5 = -9 + 14 = \dots$
- c) $-8 = 4 - 12 = \dots$

17 Encuentra los errores de estas igualdades.

- a) $(-3) + (-5) - (-8) = -3 - 5 - 8 = -8 - 8 = -(8 - 8) = 0$
- b) $-9 - (-8) - (-7 - 2) = -9 + 8 + 7 - 2 = -1 + 7 - 2 = -6 - 2 = -8$
- c) $5 - [-6 + 7 - (-2)] = 5 + 6 - 7 + 2 = 11 - 5 = 6$
- d) $4 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2) = -12 - 10 = -22$
- e) $4 - 5 \cdot (-2) = (-1) \cdot (-2) = 2$
- f) $7 \cdot (-3 - 2) = -21 - 2 = 23$

18 En un centro comercial hemos aparcado el coche en el 2.º sótano. Para ir a la 4.ª planta, ¿cuántos pisos tenemos que subir?

19 Pedro debe 30 € a Juan y 12 € a María. ¿Cuánto dinero debe en total?

20 Una persona que pesa 76 kg está siguiendo una dieta que le permitirá adelgazar 2 kg por semana. Si mantiene el régimen durante tres semanas, ¿cuánto pesará al cabo de ese tiempo?

21 Un equipo de fútbol ha subido tres puestos la última jornada y bajó uno en la anterior. Si antes estaba en la séptima posición de la tabla, ¿en qué puesto está situado ahora?

22 Carlos ha preparado helado de limón. Al terminarlo, este tenía una temperatura de 12 °C, y al congelarlo descendió a 18 °C bajo cero. ¿Cuál ha sido la variación de temperatura?

1 OBJETIVO 3

HALLAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d.) DE DOS NÚMEROS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

El máximo común divisor de dos números es el **mayor** de sus **divisores comunes**.

EJEMPLO

Sean los números 12 y 42. Sus divisores son:

$$\text{Div}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$\text{Div}(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

$$\text{Divisores comunes} = \{1, 2, 3, \mathbf{6}\}$$

Luego el máximo común divisor de 12 y 42 es: $\text{m.c.d.}(12, 42) = 6$

¿Cómo lo vamos a hallar?

Para hallar el máximo común divisor de dos números seguimos estos pasos.

1.º Descomponemos los dos números en sus **factores primos**.

2.º Multiplicamos los factores primos **comunes** de ambos, elevados al **menor exponente**.

EJEMPLO

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{m.c.d.}(12, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

1 Halla el máximo común divisor de estos números, descomponiendo en factores primos.

a) 21 y 105

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$21 = 3 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$105 = 3 \cdot \square \cdot \square$$

$$\text{m.c.d.}(21, 105) = \square \cdot \square = 21$$

c) 60 y 210

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ - & - \\ - & - \\ - & - \end{array}$$

$$60 = 2^2 \cdot \square \cdot \square$$

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ - & - \\ - & - \\ - & - \end{array}$$

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\text{m.c.d.}(60, 210) = \square \cdot \square \cdot \square = 30$$

b) 33 y 44

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$33 = 3 \cdot \square$$

$$\begin{array}{r|l} 44 & - \\ - & - \\ 11 & - \\ 1 & \end{array}$$

$$44 = 2^2 \cdot \square$$

$$\text{m.c.d.}(33, 44) = 11$$

d) 45 y 80

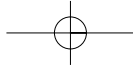
$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & - \\ - & - \\ 1 & \end{array}$$

$$45 = 3^2 \cdot \square$$

$$\begin{array}{r|l} 80 & - \\ - & - \\ - & - \\ - & - \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$80 = 2^4 \cdot \square$$

$$\text{m.c.d.}(45, 80) = 5$$



OBJETIVO 4

HALLAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.) DE DOS NÚMEROS**1**

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

El mínimo común múltiplo de dos números es el **menor** de sus **múltiplos comunes**.**EJEMPLO**Sean los números 12 y 42. Sus múltiplos son: Múltiplos de 12 = {0, 12, 24, 36, 48, 60, **84**, 96, ...}Múltiplos de 42 = {0, 42, **84**, 126, ...}

Luego el mínimo común múltiplo de 12 y 42 es: m.c.m. (12, 42) = 84

¿Cómo lo vamos a hallar?

Para hallar el mínimo común múltiplo de dos números seguimos estos pasos.

1.º Descomponemos los dos números en **factores primos**.2.º Multiplicamos los factores primos **comunes** y **no comunes** a ambos que estén elevados al **mayor exponente**.**EJEMPLO**

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{m.c.m. (12, 42)} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

1 Halla el mínimo común múltiplo de estos números, descomponiendo en factores primos.

a) 21 y 105

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$21 = \square \cdot \square$$

$$105 = \square \cdot \square \cdot \square$$

$$\text{m.c.m. (21, 105)} = \square \cdot \square \cdot \square = 105$$

c) 60 y 210

$$\begin{array}{r|l} 60 & \text{—} \\ 30 & \text{—} \\ 15 & \text{—} \\ 5 & \text{—} \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 210 & \text{—} \\ 105 & \text{—} \\ 35 & \text{—} \\ 7 & \text{—} \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2^2 \cdot \square \cdot \square$$

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\text{m.c.m. (60, 210)} = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = 420$$

b) 33 y 88

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 88 & 2 \\ 44 & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} \\ 11 & \text{—} \\ 1 & \end{array}$$

$$33 = 3 \cdot \square$$

$$88 = 2^3 \cdot \square$$

$$\text{m.c.m. (33, 88)} = \square \cdot \square \cdot \square = 264$$

d) 45 y 80

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} \\ 1 & \end{array}$$

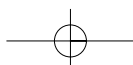
$$\begin{array}{r|l} 80 & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$45 = 3^2 \cdot \square$$

$$80 = 2^4 \cdot \square$$

$$\text{m.c.m. (45, 80)} = \square \cdot \square \cdot \square = 720$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR



1

OBJETIVO 5

RESOLVER PROBLEMAS DE m.c.d. Y m.c.m.

- 1** Alejandro tiene unas 150 fotografías de los jugadores de su equipo de fútbol. Quiere pegarlas en un álbum y puede hacerlo en grupos de 8, 9 y 12 con la misma cantidad de fotografías, y utilizando todas. ¿Cuántas fotografías tiene Alejandro?

- 2** Se quieren distribuir 264 litros de leche entera y 176 litros de leche desnatada en cajas con el mismo contenido de cada una de ellas. Calcula el contenido que debe tener cada una de las cajas, empleando toda la leche, en el mayor número de cajas posible.

- 3** Enfrente de la casa de Antonio pasa un tren con dirección Zaragoza cada 30 minutos y otro con dirección Gijón cada 18 minutos. Si ha visto cruzarse a los dos trenes a las 10:00 de la mañana, di a qué hora volverán a cruzarse.

- 4** Luis viaja a Barcelona cada 15 días y su hermana Marta lo hace cada 20 días. ¿Cuándo coincidirán de nuevo en Barcelona, sabiendo que la última vez que lo hicieron fue el 2 de octubre?

- 5** En una carretera han puesto farolas en ambos lados. En un lado están colocadas cada 12 metros y en el otro cada 18 metros. Sabiendo que las primeras farolas de cada lado están situadas una enfrente de la otra, ¿qué distancia debemos recorrer para encontrar dos farolas una frente a otra?