

# 11 Cuerpos geométricos

## INTRODUCCIÓN

Los poliedros, sus elementos y tipos ya son conocidos por los alumnos del curso anterior. Descubrimos y reconocemos de nuevo los prismas, las pirámides y los cuerpos de revolución, y calculamos las superficies de los principales poliedros, sin profundizar en algoritmos más difíciles (proyecciones, problemas complejos, simetrías en el espacio, etc.).

A partir del desarrollo de las figuras se intenta realizar el cálculo de las distintas áreas. No pretendemos conseguir el aprendizaje memorístico de fórmulas, sino que mediante el dibujo del poliedro «extendido» hallamos el área del rectángulo o triángulo que se forma y las superficies de las bases del poliedro, ya sean polígonos regulares o circunferencias.

Tampoco se exige a los alumnos el dibujo perfecto de las figuras; simplemente se pide, en algunas actividades, la colocación de las caras en un orden correcto desde el punto de vista gráfico.

Como complemento a la unidad se recomienda el uso de diversos materiales de Geometría, como el montaje y construcción de poliedros mediante varillas y figuras planas de unión por caras y aristas.

## RESUMEN DE LA UNIDAD

- Los *poliedros* son cuerpos geométricos limitados por caras poligonales. Las caras, aristas y vértices son los principales elementos de los poliedros.
- *Poliedros regulares* son aquellos cuyas caras están formadas por polígonos regulares.
- El tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro son los principales poliedros regulares. En ellos se cumple que la suma de caras y vértices es igual al número de aristas aumentado en 2 unidades.
- Los *prismas* son poliedros formados por dos bases iguales y paralelas, y sus caras laterales son paralelogramos. Según sea el polígono de las bases, los prismas serán triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc.
- Las *pirámides* son poliedros cuya base es un polígono regular y sus caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común. En función de la base, las pirámides serán triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.
- El *cilindro*, el *cono* y la *esfera* son cuerpos de revolución cuyas superficies laterales son curvas.

| OBJETIVOS  | CONTENIDOS  | PROCEDIMIENTOS  |
|--|---|---|
| 1. Conocer y diferenciar los poliedros regulares.                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Poliedros. Definición y elementos.</li> <li>• Poliedros regulares y características. Clasificación.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificación de los principales elementos de los poliedros.</li> <li>• Reconocimiento de los poliedros regulares por sus elementos y desarrollo.</li> </ul>  |
| 2. Reconocer los principales prismas y pirámides. Calcular sus áreas.  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Prismas y pirámides: elementos característicos, tipos y desarrollo.</li> <li>• Área de los principales prismas y pirámides.</li> </ul>                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconocimiento de prismas y pirámides por sus elementos y desarrollo.</li> <li>• Cálculo del área total de prismas y pirámides.</li> </ul>   |
| 3. Reconocer los cuerpos de revolución. Calcular el área del cilindro. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cilindro y cono: elementos característicos y desarrollo.</li> <li>• Área del cilindro.</li> <li>• La esfera terrestre: características principales.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Desarrollo del cilindro y el cono.</li> <li>• Identificación de figuras con forma de cuerpos redondos.</li> <li>• Cálculo del área de un cilindro.</li> <li>• Distinción de algunos elementos de la esfera.</li> </ul> |

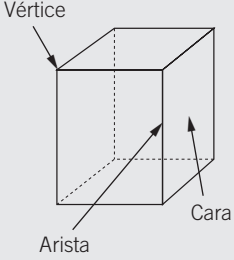
## 11

## OBJETIVO 1

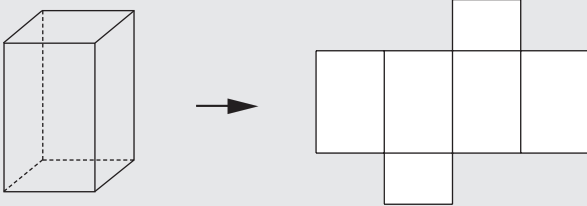
## CONOCER Y DIFERENCIAR LOS POLIEDROS REGULARES

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CURSO: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

**CONCEPTO DE POLIEDRO**

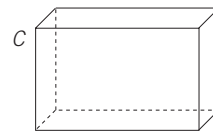
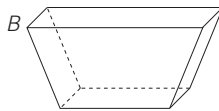
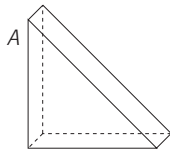


- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos.
- Los elementos del poliedro son:
  - Caras:** polígonos que limitan al poliedro (6 en la figura adjunta).
  - Aristas:** lados comunes a dos caras (12 en la figura adjunta).
  - Vértices:** puntos donde se unen más de dos caras (8 en la figura adjunta).
- La superficie del poliedro se puede extender sobre un plano, y se denomina **desarrollo** plano del poliedro.

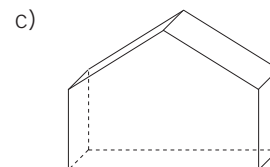
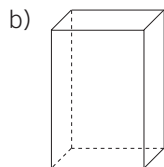
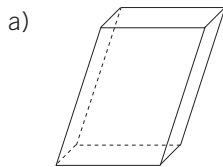


1 Indica en los siguientes poliedros el número de caras, aristas y vértices.

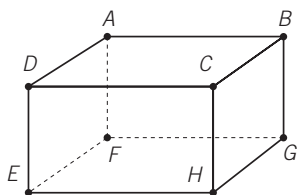
| POLIEDRO | NÚMERO DE CARAS | NÚMERO DE ARISTAS | NÚMERO DE VÉRTICES | TIPOS DE POLÍGONOS DE LAS CARAS |
|----------|-----------------|-------------------|--------------------|---------------------------------|
| A        |                 |                   |                    |                                 |
| B        |                 |                   |                    |                                 |
| C        |                 |                   |                    |                                 |



2 En estos poliedros marca con un punto rojo los vértices y nómbralos con letras mayúsculas.



3 Fíjate en el poliedro y completa.

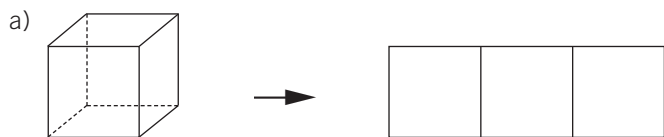


Los vértices son: A, B, .....

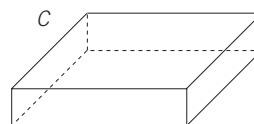
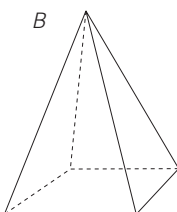
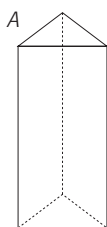
Las aristas son: AB, BC, .....

Las caras son: ABCD, .....

4 Completa el desarrollo plano de los siguientes poliedros.







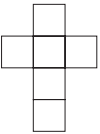
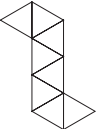
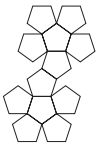
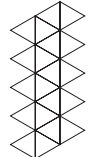


5 Dibuja el desarrollo plano de estas figuras geométricas.



### POLIEDROS REGULARES

- Son aquellos poliedros cuyas caras son polígonos regulares (caras y ángulos iguales). En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.
- Existen 5 poliedros regulares, que son:

| TETRAEDRO   | HEXAEDRO O CUBO   | OCTAEDRO  | DODECAEDRO  | ICOSAEDRO   |
|---|---|---|---|---|
| 4 caras.<br>Triángulos<br>equiláteros   | 6 caras.<br>Cuadrados   | 8 caras.<br>Triángulos<br>equiláteros   | 12 caras.<br>Pentágonos<br>regulares  | 20 caras.<br>Triángulos<br>equiláteros  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

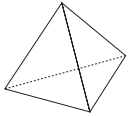
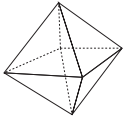
## 11

6 Completa la siguiente tabla.

| POLIEDRO      | CARAS | VÉRTICES | ARISTAS | CARAS + VÉRTICES | ARISTAS + 2 |
|---------------|-------|----------|---------|------------------|-------------|
| Tetraedro     | 4     | 4        | 6       | $4 + 4 = 8$      | $6 + 2 = 8$ |
| Hexaedro-cubo |       |          |         |                  |             |
| Octaedro      |       |          |         |                  |             |
| Dodecaedro    |       |          |         |                  |             |
| Icosaedro     |       |          |         |                  |             |

Observa que la suma de *Caras* + *Vértices* es igual que *Aristas* + 2.

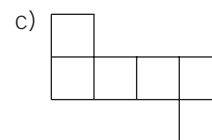
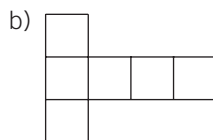
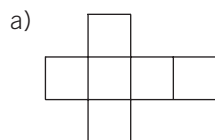
7 Fíjate en estos poliedros. Señala y nombra sus vértices con mayúsculas y completa.

| POLIEDRO  | NÚMERO DE CARAS | NÚMERO DE VÉRTICES | NÚMERO DE CARAS EN CADA VÉRTICE |
|---|-----------------|--------------------|---------------------------------|
|   |                 |                    |                                 |
|  |                 |                    |                                 |

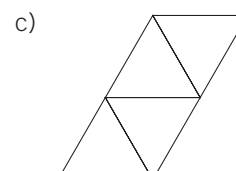
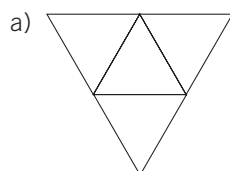
8 Indica si son verdaderas o falsas (V o F) las siguientes afirmaciones.

- La suma de las caras y los vértices del cubo es 12.
- El menor número de caras de un poliedro es 4.
- El dodecaedro tiene 12 caras, que son triángulos equiláteros.
- En un poliedro regular, todas las caras son iguales.
- El número de aristas del cubo y del octaedro es el mismo.

9 Indica con qué desarrollo plano se podría construir un .....



10 Indica con qué desarrollo plano se podría construir un .....



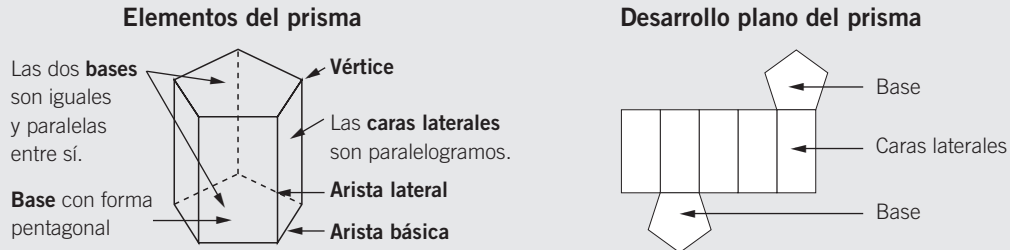
## OBJETIVO 2

**RECONOCER LOS PRINCIPALES PRISMAS Y PIRÁMIDES. CALCULAR SUS ÁREAS 11**

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CURSO: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

**CONCEPTO DE PRISMA**

Un prisma es un poliedro formado por dos bases iguales y paralelas, y cuyas caras laterales son paralelogramos.

**TIPOS DE PRISMAS**

Los prismas se nombran según el número de lados de sus bases.

Prisma triangular



Prisma cuadrangular



Prisma pentagonal



Prisma hexagonal

**1 Nombra, en estos prismas, sus elementos: bases, vértices, caras y aristas.**

a) Prisma triangular

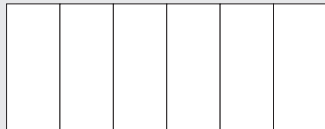
b) Prisma hexagonal

**ÁREA DE UN PRISMA RECTO**

A partir del desarrollo del prisma recto podemos calcular su área. Distinguimos dos partes:

**Área lateral**

- Es la suma de las áreas de sus caras.
- Su desarrollo es siempre un rectángulo. Uno de los lados del rectángulo coincide con el perímetro de la base, y el otro, con la altura del prisma.



$$A_L = P_B \cdot h$$

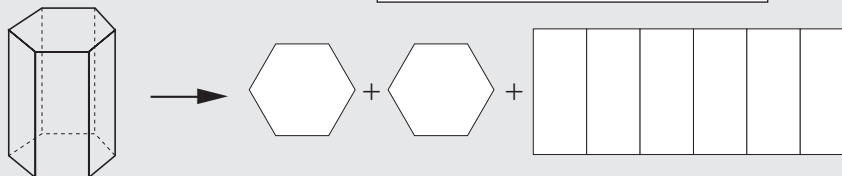
**Área de las bases**

- Las bases del prisma son polígonos regulares.
- El prisma tiene 2 bases iguales.
- El área de un polígono es:

$$\text{Área polígono} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

**Área total del prisma**

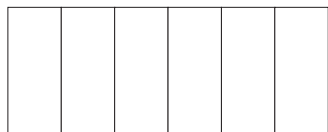
$$A_T = A_L + A_B + A_B = A_L + 2 \cdot A_B$$



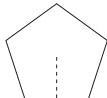
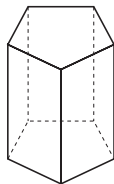
## 11

**EJEMPLO**

Calcula el área total de un prisma de base pentagonal, sabiendo que su altura es 7 dm, el lado de la base mide 3 dm y la apotema del polígono de las bases mide 2 dm.



$$A_{\text{Lateral}} = P_B \cdot h = (3 \cdot 5) \cdot 7 = 15 \cdot 7 = 105 \text{ dm}^2$$



$$A_{\text{Base}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{(3 \cdot 5) \cdot 2}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ dm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 105 \text{ dm}^2 + 2 \cdot 15 \text{ dm}^2 = 135 \text{ dm}^2$$

**2** Halla el área total de un prisma hexagonal, sabiendo que:

- Su altura es 10 dm.
- El lado de la base hexagonal mide 4 dm.
- La apotema del polígono de la base mide 3,5 dm.

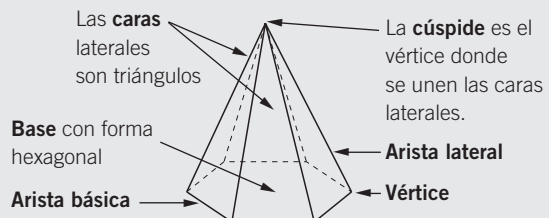
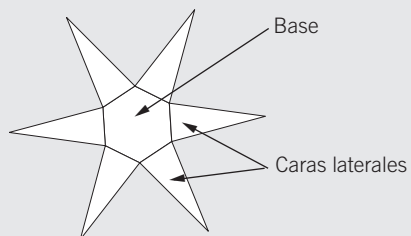
Realiza a escala el dibujo del prisma y su desarrollo.

**3** Obtén el área total de un prisma cuadrangular cuya altura es de 8 dm y el lado del cuadrado de la base mide 4 dm. Realiza a escala el dibujo del prisma y su desarrollo.

**4** Calcula el área de un cubo que tiene 7 cm de lado.

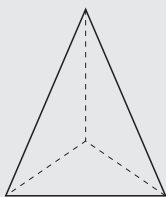
**CONCEPTO DE PIRÁMIDE**

Una pirámide es un poliedro cuya base es un polígono y sus caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común, llamado vértice de la pirámide.

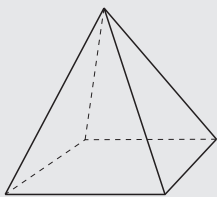
**Elementos de la pirámide****Desarrollo plano de la pirámide****TIPOS DE PIRÁMIDES**

Las pirámides se nombran según el número de lados de su base.

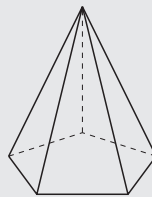
Pirámide triangular



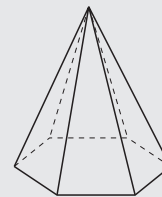
Pirámide cuadrangular



Pirámide pentagonal

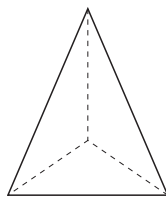


Pirámide hexagonal

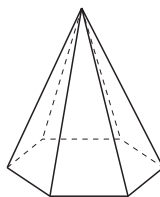


**5** Señala y nombra, en las siguientes pirámides, sus elementos: bases, vértices, caras y aristas.

a) Pirámide triangular

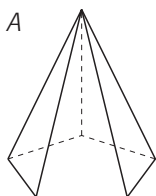


b) Pirámide hexagonal

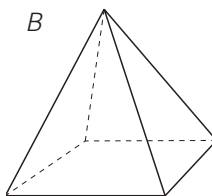


**6** Dibuja el desarrollo de las siguientes pirámides y completa la tabla.

A



B



|   | NOMBRE DE LA PIRÁMIDE | POLÍGONOS DE LA BASE | NÚMERO DE CARAS | NÚMERO DE VÉRTICES | NÚMERO DE ARISTAS |
|---|-----------------------|----------------------|-----------------|--------------------|-------------------|
| A |                       |                      |                 |                    |                   |
| B |                       |                      |                 |                    |                   |

# 11

## ÁREA DE UNA PIRÁMIDE REGULAR

A partir del desarrollo de la pirámide recta podemos calcular su área. Distinguimos dos partes:

### Área lateral

- Es la suma de las áreas de las caras.
- Sus caras son triángulos isósceles iguales, por lo que el área lateral es la suma de las áreas de los triángulos.

$$\text{Área triángulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_L = n \cdot A_{\text{Triángulo}}$$

Siendo  $n$  el número de triángulos de la pirámide.

### Área de la base

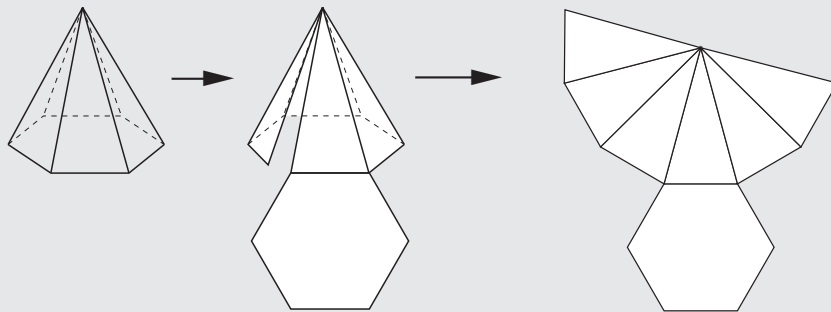
- Es el área de un polígono regular.
- El área de un polígono es:

$$\text{Área polígono} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

### Área total de la pirámide:

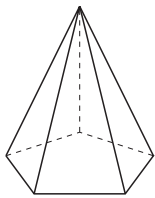
$$A_T = A_L + A_B$$



## EJEMPLO

Calcula el área total de una pirámide de base pentagonal, si la apotema de la base mide 4,13 cm, el lado de la base es 6 cm y la altura de cada uno de los triángulos de las caras es 9 cm.

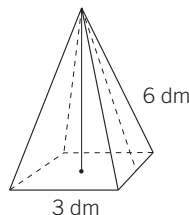
$$A_{\text{Lateral}} = 5 \cdot \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = 5 \cdot \frac{6 \cdot 9}{2} = 5 \cdot \frac{54}{2} = 135 \text{ cm}^2$$



$$\text{Área}_{\text{Polígono}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{(5 \cdot 6) \cdot 4,13}{2} = \frac{123,9}{2} = 61,95 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 135 \text{ cm}^2 + 75 \text{ cm}^2 = 210 \text{ cm}^2$$

- 7 Halla el área total de una pirámide de base cuadrangular, si el lado de la base mide 3 dm y la apotema de la pirámide (altura del triángulo) mide 6 dm.





- 8 Obtén el área total de una pirámide de base hexagonal, si la apotema de la base mide 5,2 dm, el lado de la base es 6 dm y la altura de cada uno de los triángulos de las caras es 10 dm. Realiza a escala el dibujo de la pirámide y su desarrollo.
- 9 Halla el área total de una pirámide de base pentagonal cuya apotema de la base mide 4 dm, la altura de cada triángulo mide 9 dm y el área de cada uno de los triángulos es  $26,1 \text{ dm}^2$ . Realiza a escala el dibujo de la pirámide y su desarrollo.
- 10 La base de una pirámide es un cuadrado de 6 cm de lado. Si la altura de cada triángulo mide 1 dm, calcula el área total de la pirámide. Realiza a escala el dibujo de la pirámide y su desarrollo.

## 11

## OBJETIVO 3

## RECONOCER LOS CUERPOS DE REVOLUCIÓN. CALCULAR EL ÁREA DEL CILINDRO

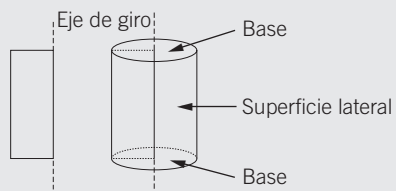
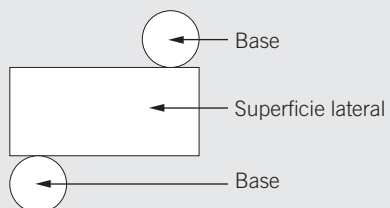
NOMBRE: \_\_\_\_\_ CURSO: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

**CUERPOS DE REVOLUCIÓN**

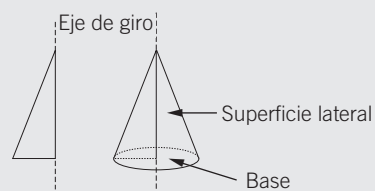
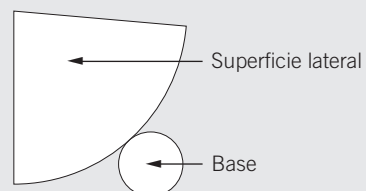
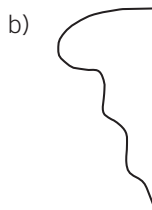
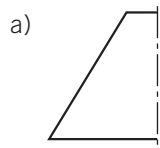
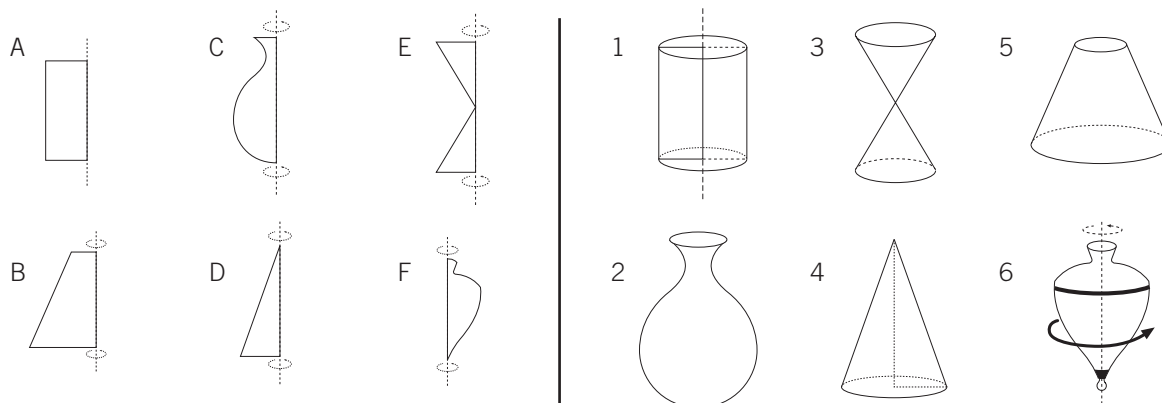
Los cuerpos de revolución son aquellos cuyas superficies laterales son curvas.

**Cilindro**

- Tiene 2 bases iguales que son círculos.
- Tiene 1 superficie lateral curva.
- Se obtiene al girar un rectángulo sobre un eje.

**Desarrollo plano de un cilindro****Cono**

- Tiene 1 base que es un círculo.
- Tiene 1 superficie lateral curva.
- Se obtiene al girar un triángulo sobre un eje.

**Desarrollo plano de un cono****1 Dibuja la figura que se origina al girar sobre el eje.****2 Asocia cada figura de giro con el objeto que se origina.**

**ÁREA DE UN CILINDRO**

A partir del desarrollo del cilindro podemos calcular su área. Distinguimos dos partes:

**Área lateral**

– Es el área de un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia de la base,  $2\pi r$ , y la altura,  $h$ , es la altura del cilindro.

$$\text{Área lateral} = \text{Área rectángulo} = 2\pi r \cdot h$$

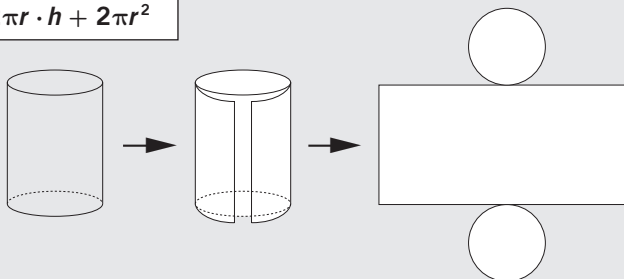
**Área de las bases**

– El cilindro tiene 2 bases iguales.  
– Las bases del cilindro son círculos.

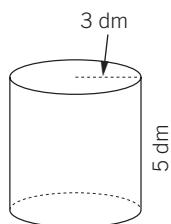
$$\text{Área bases} = 2 \cdot \text{Área círculo} = 2\pi r^2$$

$$\text{Área total} = \text{Área lateral} + \text{Área bases} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

Tomamos como valor del número  $\pi = 3,14$ .



- 3** Calcula el área total del siguiente cilindro.



$$\text{Área lateral} = 2\pi r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 =$$

$$\text{Área bases} = 2\pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 =$$

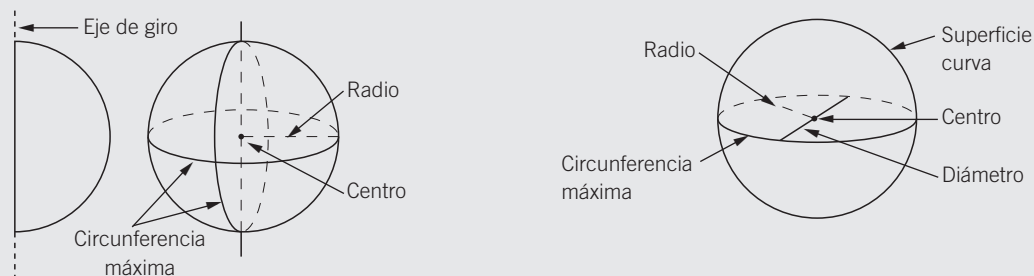
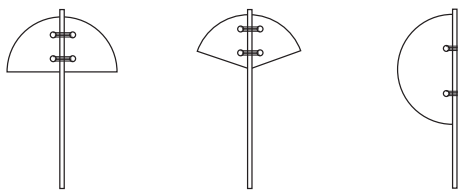
$$\text{Área total} =$$

- 4** Halla el área total de un cilindro que tiene un radio de la base de 4 cm y una altura de 7 cm. Realiza a escala un dibujo del cilindro y su desarrollo.

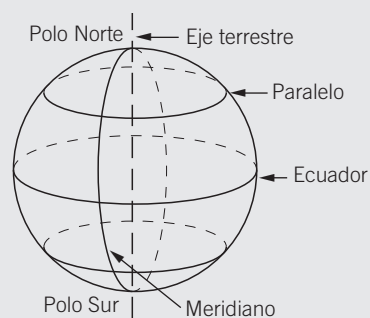
- 5** Una bobina de papel de forma cilíndrica tiene una altura de 1,5 m y un radio en la base circular de 0,4 m. Obtén el área total de la bobina.

**ESFERA**

- La esfera es un cuerpo redondo que no tiene caras, ya que está formado por una única superficie curva. Tampoco tiene desarrollo como el cilindro y el cono.
- Se obtiene al girar un semicírculo sobre un eje que es su diámetro.

**6 ¿Cuál de los siguientes objetos genera una esfera al girar en torno al eje?****LA ESFERA TERRESTRE**

La Tierra tiene forma de esfera, y presenta unos elementos imaginarios que sirven para situar puntos sobre su superficie.

**Elementos de la esfera terrestre**

- **Eje terrestre:** línea imaginaria alrededor de la cual gira la Tierra sobre sí misma.
- **Polos:** puntos extremos del eje terrestre, Norte y Sur.
- **Meridianos:** circunferencias máximas que pasan por los polos. El más importante es el meridiano cero. Pasa por Greenwich (Londres).
- **Ecuador:** circunferencia máxima que se obtiene si cortamos a la Tierra por su punto medio.
- **Paralelos:** circunferencias menores paralelas al ecuador.

**7 Sobre el siguiente dibujo de la esfera terrestre, señala.**

- Los polos.
- El eje terrestre.
- De rojo, el meridiano cero.
- De azul, dos meridianos.
- De verde, el ecuador.
- De amarillo, dos paralelos.

