

**TEMA 2 – MATRICES**

**OPERACIONES CON MATRICES**

**EJERCICIO 1 :** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ , comprueba que  $A^2 = 2A - I$ , siendo  $I$  la matriz identidad. Usando la fórmula anterior, calcula  $A^4$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: Comprobamos que  $A^2 = 2A - I$ :

$$2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Son iguales.

Utilizando que  $A^2 = 2A - I$ , calculamos  $A^4$ :

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4AI + I^2 = 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I$$

$$\text{Por tanto: } A^4 = 4A - 3I = 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 2 :** Si la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  Satisface la igualdad  $A^2 + xA + yI = 0$ , halla los valores numéricos de  $x$  e  $y$  ( $I$  representa la matriz identidad de orden 2).

Solución:

$$\text{Calculamos } A^2: A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así: } A^2 + xA + yI = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + x + y & 10 + 2x \\ -15 - 3x & 10 + 4x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, ha de ser: } \begin{cases} -5 + x + y = 0 & \rightarrow y = 5 - x = 5 - (-5) = 10 \\ 10 + 2x = 0 & \rightarrow x = -5 \\ -15 - 3x = 0 & \rightarrow x = -5 \\ 10 + 4x + y = 0 & \rightarrow y = -10 - 4x = -10 + 20 = 10 \end{cases}$$

Por tanto:  $x = -5$ ;  $y = 10$

**EJERCICIO 3 :** Si  $I$  es la matriz identidad de orden 2 y  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , halla el valor que deben tener “ $x$ ” e “ $y$ ” para que  $A^2 - xA - yI = 0$

Solución:

Calculamos  $A^2 - xA - yI$  e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2x - y & 9 - 3x \\ -6 + 2x & -5 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así, tenemos que ha de ser: } \left. \begin{array}{l} -2-2x-y=0 \\ 9-3x=0 \\ -6+2x=0 \\ -5-x-y=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = -2-2x = -2-6 = -8 \\ \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow y = -5-x = -5-3 = -8 \end{array} \quad \text{Por tanto: } x = 3, y = -8$$

**EJERCICIO 4** : Dada la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula  $A^t A$  y  $AA^t$ , donde  $A^t$  denota la matriz traspuesta de  $A$ .

b) Encuentra las matrices de la forma  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , tales que:  $AA^t X = X$

c) Encuentra todas las matrices de la forma  $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , tales que:  $A^t A Y = Y$

Solución:

a) La matriz traspuesta de  $A$  es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto:}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Imponemos la condición dada:

$$AA^t X = X \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = x \\ 2y = y \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Por tanto:  $X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ , donde  $x \in \mathbf{R}$ .

$$c) A^t A Y = Y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+c = a \rightarrow c = 0 \\ b = b \\ a+c = c \rightarrow a = 0 \end{cases} \quad \text{Por tanto: } Y = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } b \in \mathbf{R}.$$

**PROBLEMAS CON MATRICES**

**EJERCICIO 5** : Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz  $A$ . La evolución de los precios de los años 1997 a 2000 viene reflejada en la matriz  $B$ .

a) Hallar, si es posible,  $A \cdot B$  y  $B \cdot A$  e indicar que información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento  $c_{34}$  de la matriz producto?

	PAN	AGUA	LECHE		1997	1998	1999	2000	
$F_1$	450	800	650	$A =$	PAN	85	90	90	95
$F_2$	500	810	620		AGUA	28	30	30	35
$F_3$	200	500	600		LECHE	70	72	75	80

Solución:

a) La matriz  $A$  es  $3 \times 3$  y la  $B$  es  $3 \times 4$ . Para poder efectuar el producto de dos matrices, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda. Por tanto, el producto  $B \cdot A$  no se puede hacer, pero el  $A \cdot B$  sí.

$$A \cdot B = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{matrix} \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 106150 & 111300 & 113250 & 122750 \\ 108580 & 113140 & 115800 & 125450 \\ 73000 & 76200 & 78000 & 84500 \end{pmatrix}$$

La matriz  $A \cdot B$  nos da el gasto anual de cada familia en el total de los tres productos durante los años 1997 a 2000.

b) El elemento  $c_{34} = 84\,500$ , corresponde a la familia tercera en el año 2000; es decir, nos indica el gasto total de esta familia en los tres productos durante ese año.

**EJERCICIO 6 :** En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:

PRODUCTO \ MATERIAL	A	B	C
CHATARRA	8	6	6
CARBÓN	6	6	4
ALEACIONES	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de  $A$ , 4 de  $B$  y 3 de  $C$ .

*Solución:*

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{matrix} \text{CHATARRA} \\ \text{CARBÓN} \\ \text{ALEACIONES} \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{CHATARRA} \\ \text{CARBÓN} \\ \text{ALEACIONES} \end{matrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 72 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Es decir, necesitaremos 90 unidades de chatarra, 72 de carbón mineral y 25 de aleaciones.

**EJERCICIO 7 :** En una compañía se utilizan tres tipos de materiales (madera, plástico y aluminio) para fabricar tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás, según la tabla:

	SILLA	MECEDORA	SOFÁ
MADERA	1 unidad	1 unidad	1 unidad
PLÁSTICO	1 unidad	1 unidad	2 unidades
ALUMINIO	2 unidades	3 unidades	5 unidades

Obtén, matricialmente, las unidades de madera, de plástico y de aluminio que se han utilizado para fabricar 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.

*Solución:*

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{matrix} \text{MADERA} \\ \text{PLÁSTICO} \\ \text{ALUMINIO} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \text{SILLAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SOFÁS} \end{matrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{MADERA} \\ \text{PLÁSTICO} \\ \text{ALUMINIO} \end{matrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 1\,500 \end{pmatrix}$$

Es decir se han utilizado 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1 500 de aluminio.

**EJERCICIO 8 :** Un fabricante produce tres tipos de clavos: de aluminio ( $A$ ), de cobre ( $Q$ ) y de acero ( $H$ ). Todos ellos se fabrican en longitudes de 1; 1,5 y 2 cm con los precios respectivos siguientes:

Clavos $A$ :	0,20	0,30	0,40	céntimos de euro
Clavos $Q$ :	0,30	0,45	0,60	céntimos de euro
Clavos $H$ :	0,40	0,60	0,80	céntimos de euro

Sabiendo que en un minuto se producen:

De 1 cm de longitud:	100A	50Q	700H
De 1,5 cm de longitud:	200A	20Q	600H
De 2 cm de longitud:	500A	30Q	400H

Se pide:

- a) Resume la información anterior en dos matrices:  $M$  y  $N$ .  $M$  que recoja la producción por minuto, y  $N$  que recoja los precios.  
 b) Calcula el elemento  $a_{11}$  de la matriz  $M \cdot N$  y da su significado.  
 c) Calcula el elemento  $a_{11}$  de la matriz  $N \cdot M$  y da su significado.

Solución:

$$\begin{array}{c} \text{a) Unidades producidas por minuto:} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{Q} \\ \text{H} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 2 \\ 100 & 200 & 500 \\ 20 & 20 & 30 \\ 700 & 600 & 400 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Precios (en céntimos de euro):} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{Q} \\ \text{H} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 2 \\ 0,20 & 0,30 & 0,40 \\ 0,30 & 0,45 & 0,60 \\ 0,40 & 0,60 & 0,80 \end{pmatrix} = N \end{array}$$

b)  $a_{11} = 100 \cdot 0,20 + 200 \cdot 0,30 + 500 \cdot 0,40 = 280$  céntimos.

Producen 280 céntimos de euro de clavos de aluminio por minuto.

c)  $a_{11} = 0,20 \cdot 100 + 0,30 \cdot 50 + 0,40 \cdot 700 = 315$  céntimos.

Producen 315 céntimos de euro de clavos de 1cm por minuto.

### CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ Buscar alguna sin inversa

**EJERCICIO 9 :** Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

• La inversa de A:  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$   
 $\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a + 3 \cdot 3^a \\ 2 \cdot 2^a - 5 \cdot 3^a \\ 3^a \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & -10 & 0 & -9 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$   
 $\xrightarrow{\begin{array}{l} 10 \cdot 1^a + 3 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 13 & -9 & 15 \\ 0 & -10 & 0 & -9 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{10} \cdot 1^a \\ -\frac{1}{10} \cdot 2^a \\ -\frac{1}{2} \cdot 3^a \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{15}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{5}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$

Por tanto,  $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 13 & -9 & 15 \\ 9 & -7 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ .

• La inversa de B:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) F_2 = F_2 - 2F_1 \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) F_3 = F_3 + F_2 \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

No tiene inversa porque la tercera fila es nula.

• La inversa de C:  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 2 \cdot 3^a - 2^a \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \rightarrow \begin{matrix} 4 \cdot 1^a + 3 \cdot 2^a \\ 2^a + 3^a \\ 3^a \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{matrix} 1^a + 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{8} \cdot 1^a \\ \frac{1}{4} \cdot 2^a \\ \frac{1}{2} \cdot 3^a \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \text{ Así, } C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**CALCULAR LA POTENCIA N-ÉSIMA DE UNA MATRIZ**

**EJERCICIO 10 :** Se considera la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , donde  $a, b$  y  $c$  son tres números reales arbitrarios.

- a) Encuentra  $A^n$  para todo natural  $n$ .      b) Calcula  $(A^{35} - A)^2$ .

Solución:

a)  $A^1 = A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como  $A^3 = 0$ , tenemos que  $A^n = 0$  para  $n \geq 3$ .

b) Teniendo en cuenta lo obtenido en a):  $(A^{35} - A)^2 = (0 - A)^2 = (-A)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES**

**EJERCICIO 11 :** Dadas las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Comprueba que  $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$       b) Halla una matriz,  $X$ , tal que  $AX = B$ .

Solución:

a) Se trata de probar que  $AA^{-1} = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 3. Efectuamos el producto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ como queríamos demostrar.}$$

b) Despejamos  $X$  en la igualdad  $AX = B$ , multiplicando por la izquierda por  $A^{-1}$ :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Por el apartado a), conocemos  $A^{-1}$ ; luego:  $X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \\ -9/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

**EJERCICIO 12 :** Halla la matriz  $X$  que verifica  $BX = A$ , siendo  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

*Solución:* Despejamos  $X$  multiplicando por la izquierda por  $B^{-1}$ :  $B^{-1}BX = B^{-1}A \rightarrow X = B^{-1}A$

$$\begin{aligned} \text{Hallamos } B^{-1}: & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2^a} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{3 \cdot 3^a - 1^a} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{5 \cdot 1^a - 3^a} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{15} & \frac{-3}{15} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{5} \cdot 3^a} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{15} & \frac{-3}{15} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{array} \right) \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Como } B^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}, X = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Así: } X = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 12 \\ 60 \\ -21 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 4 \\ 7/5 \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 13 :** Resuelve la ecuación matricial  $XA = B$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

*Solución:* Despejamos  $X$  multiplicando por  $A^{-1}$  por la derecha:  $XAA^{-1} = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$

$$\text{Hallamos } A^{-1}: \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así: } X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 14 :** Halla la matriz  $X$  que verifica  $AX + B = 0$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $0$  la matriz nula.

*Solución:* Despejamos  $X$ :  $AX = -B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \rightarrow IX = -A^{-1}B \rightarrow X = -A^{-1}B$

$$\text{Calculamos la inversa de } A: \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2^a - 2 \cdot 1^a} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{3^a - 3 \cdot 1^a}$$

$$\text{Intercambiamos las filas } 2^a \text{ y } 3^a: \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a - 2 \cdot 2^a}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a + 3^a} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ Por tanto, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = - \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 26 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 35 \\ -26 \\ 12 \end{pmatrix}$$

**RESOLVER SISTEMAS MATRICIALES**

**EJERCICIO 15 :** Resuelve el siguiente sistema matricial:  $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ ;  $2X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$  Así, el sistema queda:  $\left. \begin{matrix} 3X - 2X = A \\ 2X + X = B \end{matrix} \right\} X = B - 2X$

$3X - 2(B - 2X) = A \rightarrow 3X - 2B + 4X = A \rightarrow 7X = A + 2B \rightarrow X = \frac{1}{7}(A + 2B)$

$Y = B - 2X = B - \frac{2}{7}(A + 2B) = B - \frac{2}{7}A - \frac{4}{7}B = \frac{3}{7}B - \frac{2}{7}A = \frac{1}{7}(3B - 2A)$

Por tanto:

$X = \frac{1}{7}(A + 2B) = \frac{1}{7} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$Y = \frac{1}{7}(3B - 2A) = \frac{1}{7} \left[ 3 \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 21 & -7 & 14 \\ -28 & 0 & 21 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

**EJERCICIO 16 :** Halla la matriz  $X^2 + Y^2$ , donde  $X$  e  $Y$  son dos matrices cuadradas de orden dos,

verificando:  $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$   $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ . Tenemos que resolver el sistema:

$\left. \begin{matrix} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (-3) \cdot 1^a \rightarrow -15X - 9Y = -3A \\ 5 \cdot 2^a \rightarrow 15X + 10Y = 5B \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \cdot 1^a \rightarrow 10X + 6Y = 2A \\ -3 \cdot 2^a \rightarrow -9X - 6Y = -3B \end{matrix}$

Sumando  $Y = 5B - 3A$  Sumando  $X = 2A - 3B$

Por tanto:

$X = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$Y = 5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos  $X^2$  e  $Y^2$ :

$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $Y^2 = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$

Luego:  $X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$

**HALLAR LAS MATRICES QUE COMUTAN CON UNA DADA**

**EJERCICIO 17 :**

a) Dada  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , hallar las matrices que conmutan con A.

b) Escribe una matriz que conmute con A.

Solución:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 \\ 2c+d & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a = 2a + b \\ 2b = 0 \\ a = 2c + d \\ b = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = 0 \\ a = 2c + d \end{array} \quad \text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 2c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad c, d \in \mathbf{R}$$

$$b) \text{ Por ejemplo, si } c=1 \text{ y } d=1: X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### COMBINACIÓN LINEAL. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

**EJERCICIO 18 :** Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores:

$$\vec{u}_1 = (1, 1, -1, 1), \vec{u}_2 = (2, 3, -2, 1), \vec{u}_3 = (1, 3, -1, -1)$$

*Solución:*

Estudiemos el rango de la matriz cuyas filas son los tres vectores dados. El rango coincide con el número de vectores linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz es 2. Luego, hay dos vectores linealmente independientes; el tercero se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.

Los tres vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  son linealmente dependientes.

### RANGO DE UNA MATRIZ

**EJERCICIO 19 :** Halla el rango de las siguientes matrices:

$$a) M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

*Solución:*

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & 18 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 3 \cdot 2^a \\ 3 \cdot 4^a + 4 \cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -30 \end{pmatrix} \quad \text{Por tanto, } \text{ran}(M) = 3.$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \\ 0 & -20 & 20 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow$$



$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \\ 4^a - 4 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A)=2.$$

$$c) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a + 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A)=3.$$

$$d) \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A)=2.$$

$$e) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 4 \cdot 1^a \\ 4^a + 7 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \\ 4^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(M)=2.$$

**EJERCICIO 20 : Halla el rango de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\bullet A \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 3 \cdot 2^a \\ 3 \cdot 4^a + 4 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ran}(A) = 3.$$

$$\bullet B \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Por tanto,  $\text{ran}(B) = 2$ .

$$\bullet C \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ran}(C) = 3.$$

$$\bullet D \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $\text{ran}(D) = 2$ .

$$\bullet E \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 4 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $\text{ran}(E) = 2$ .

**EJERCICIO 21 :**

a) Halla el rango de la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:

$\vec{u}_1 = (2, -1, 3, 4)$ ;  $\vec{u}_2 = (0, 1, 1, 2)$  y  $\vec{u}_3 = (-1, 3, 4, 1)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 3 \cdot 1^a \\ 4^a + 4 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 13 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \\ 4^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 3 \cdot 4^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 3. \end{aligned}$$

b) Observamos que las columnas de la matriz A coinciden con los vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ .

El número de vectores linealmente independientes es el rango de A. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

**EJERCICIO 22 : Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores**

$\{\vec{u}_1 = (2, -1, 0, 1); \vec{u}_2 = (-1, 0, 2, 1); \vec{u}_3 = (5, -4, 6, 7)\}$  y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ .

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz cuyas filas son  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 5 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 16 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 4 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. &\text{ Por tanto, el rango de la matriz es 2.} \end{aligned}$$

Esto significa que los vectores son linealmente dependientes. Hay dos vectores linealmente independientes y el tercero depende de ellos.

**EJERCICIO 23 : Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente**

**independientes:**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2^a \\ 1^a \\ 3^a}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 2.$$

Esto significa que hay dos columnas linealmente independientes en  $A$ ; las otras dos dependen linealmente de ellas.

**EJERCICIO 24 : Estudiar el rango de las siguientes matrices, en función de los valores de los parámetros:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ a & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & a+1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

• A: Aplicamos el método de Gauss:  $\begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ a & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^a - a \cdot 1^a} \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 0 & 4-a^2 & -a^2+a+2 \end{pmatrix}$

Hacemos  $4 - a^2 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$

- Si  $a = 2$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } A = 1$
- Si  $a = -2$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } A = 2$
- Si  $a \neq \pm 2$ ,  $\text{ran } C = 2$ .

• B: Aplicamos el método de Gauss:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 2 & -a+9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ a \cdot 3^a - 2 \cdot 2^a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 0 & -a^2 + 9a - 14 \end{pmatrix}$

Hacemos  $-a^2 + 9a - 14 = 0 \begin{cases} a = 7 \\ a = 2 \end{cases}$

- Si  $a \neq 7$  y  $a \neq 2$ ,  $\text{ran } B = 3$
- Si  $a = 7$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } B = 2$       Si  $a = 2$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } B = 2$

• C: Aplicamos el método de Gauss:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -3a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a + (a-1)2^a}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -3a \\ 0 & 0 & -3a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix}$

Hacemos  $-3a^2 + 2a + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1/3 \end{cases}$

- Si  $a = 1$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } C = 2$       Si  $a = -\frac{1}{3}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } C = 2$
- Si  $a \neq 1$  y  $a \neq -\frac{1}{3}$ ,  $\text{ran } C = 3$ .

• D: Aplicamos el método de Gauss:  $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{a \cdot 2^a - 2 \cdot 1^a} \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a^2 - a - 6 \end{pmatrix}$

Hacemos  $a^2 - a - 6 = 0 \begin{cases} a = 3 \\ a = -2 \end{cases}$

- Si  $a = 3$ ,  $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } D = 1$
- Si  $a \neq 3$  y  $a \neq -2$ ,  $\text{ran } D = 2$ .

Si  $a = -2$ ,  $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } D = 1$

• E: Aplicamos el método de Gauss:  $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & a+1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2 \cdot 2^a - 1^a \\ 3^a}} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & a+2 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$

La tercera fila se anula si  $a = 1$  y la segunda, si  $a = -2$ . Estudiamos estos dos casos:

○ Si  $a = 1$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } E = 2$

○ Si  $a = -2$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran } E = 2$

Por tanto,  $\text{ran } D = 2$  cualquiera que sea el valor de  $a$ .

### SISTEMAS EN FORMA MATRICIAL

**Ejercicio 25 :** Expresa y resuelve los siguientes sistemas de forma matricial:

$$\begin{cases} \mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{1} \\ 2\mathbf{x} + \mathbf{y} = -\mathbf{4} \end{cases} \quad \begin{cases} 3\mathbf{x} + \mathbf{y} - 2\mathbf{z} = \mathbf{10} \\ \mathbf{x} + 2\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{5} \\ -\mathbf{x} + 2\mathbf{z} = -\mathbf{3} \end{cases} \quad \begin{cases} -\mathbf{x} - \mathbf{y} + 2\mathbf{z} = \mathbf{4} \\ 2\mathbf{x} + \mathbf{y} - 2\mathbf{z} = -\mathbf{3} \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{2} \end{cases}$$

Solución:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{I} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$

Calculamos la inversa de A:  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \end{matrix} \xrightarrow{\approx} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} F_3 = F_3 + 5F_2 \end{matrix}$

$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} F_2 = F_2 - F_3 \\ F_1 = F_1 - 2F_3 \end{matrix} \xrightarrow{\approx} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -5 & -10 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} F_1 = F_1 - 2F_2 \\ F_2 = F_2 / (-1) \end{matrix}$

$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos X:  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (x, y, z) = (-2, 0, 1)$

b)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{I} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$

Calculamos la inversa de A:  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} F_2 = 3F_2 - F_1 \\ F_3 = 3F_3 + F_1 \end{matrix} \xrightarrow{\approx} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 17 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \begin{matrix} F_3 = 5F_3 - F_2 \end{matrix}$

$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 17 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & 15 \end{array} \right) \begin{matrix} F_2 = 3F_2 - 17F_3 \\ F_1 = 3F_1 + 2F_3 \end{matrix} \xrightarrow{\approx} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 9 & 3 & 0 & 15 & -6 & 30 \\ 0 & 15 & 0 & -105 & 60 & -255 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & 15 \end{array} \right) \begin{matrix} F_1 = 5F_1 - F_2 \\ F_1 = F_1 / (45) \\ F_2 = F_2 / (15) \\ F_3 = F_3 / (3) \end{matrix}$

$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 9 \\ -7 & 4 & -17 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Calculamos X:  $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 9 \\ -7 & 4 & -17 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y,z) = (3,1,0)$

c)  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Calculamos la inversa de A:  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 = 3F_1 - 2F_3 \\ F_2 = 3F_2 - 2F_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & | & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 = F_1 - F_2 \\ F_2 = F_2 / (-3) \end{matrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & | & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & | & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 = F_1 / (-3) \\ F_2 = F_2 / (-3) \\ F_3 = F_3 / 3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Calculamos X:  $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y,z) = (1,-1,2)$

**Ejercicio 26 : Resuelve matricialmente el siguiente sistema:**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución:

$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Calculamos la inversa de A:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 \leftrightarrow F_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_2 + 2F_3 \\ F_1 = F_1 + F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 = F_1 - F_2 \\ F_3 = F_3 / (-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos X:  $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y,z) = (2,-3,2)$