

OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ donde \ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

- a) (1'5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
 b) (0'75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.
 c) (0'75 puntos) Calcular $\int f(x) dx$

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2}{2^2 - 4} + \frac{\ln 3}{3} = \frac{2}{0} + \frac{\ln 3}{3} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{-2}{0} + \frac{\ln(-1)}{-1} \Rightarrow \text{Sin solución} \end{array} \right. \Rightarrow \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{array} \right.$$

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x > -1 - \{2\}$$

$$\text{Asíntota vertical} \Rightarrow x = 2$$

Asíntota horizontal

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 4} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} + \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\infty} \Rightarrow \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Existe asíntota horizontal, $y = 0$ cuando $x \rightarrow \infty$

Asíntota oblicua

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(x^2 - 4)} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 4} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x(x+1)} = \\ &= \frac{1}{\infty} + \frac{\infty}{\infty} = 0 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x(x+1)} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(2x+1)(x+1)} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \infty$

b)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4 - 2x \cdot x}{(x^2 - 4)^2} + \frac{1}{x+1} \cdot (x+1) - \ln(x+1) = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} + \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = \frac{0}{0^2 - 4} + \frac{\ln(0+1)}{0+1} = \frac{0}{-4} + \frac{\ln 1}{1} = 0 + \frac{0}{1} = 0 \\ f'(0) = \frac{-0^2 - 4}{(0^2 - 4)^2} + \frac{1 - \ln(0+1)}{(0+1)^2} = \frac{-4}{16} + \frac{1 - \ln 1}{1^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1-0}{1} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow y - 0 = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow 4y = 3x \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$3x - 4y = 0$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción A

c)

$$\int \left[\frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] dx = \int \frac{x}{x^2-4} dx + \int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} + \int u du = \frac{1}{2} \cdot \ln t + \frac{1}{2} \cdot u^2$$

$$x^2 - 4 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2} \quad \ln(x+1) = u \Rightarrow \frac{dx}{x+1} = du$$

$$\int \left[\frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] dx = \frac{1}{2} \cdot [\ln(x^2-4) + \ln^2(x+1)] + K$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.a) (2 puntos) Discutir, según los valores de m , el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 4x + 3y + (m-1)z = 0 \\ x - 2y + mz = 1 \\ 5x + my + z = 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & m-1 \\ 1 & -2 & m \\ 5 & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 11 & m-1-4m \\ 1 & -2 & m \\ 0 & m+10 & 1-5m \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 11 & -1-3m \\ m+10 & 1-5m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3m+1 \\ m+10 & 5m-1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 55m - 11 - (3m+1)(m+10) = 55m - 11 - (3m^2 + 30m + m + 10) = -3m^2 + 24m - 21 = (-3) \cdot (m^2 - 8m + 7)$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow (-3) \cdot (m^2 - 8m + 7) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 36 \geq 0 \Rightarrow m = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = \frac{8-6}{2} = 1 \\ m = \frac{8+6}{2} = 7 \end{cases} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R} - \{1, 7\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

*Sistema Compatible Determinado*Si $m = 7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 11 & -22 & -4 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 17 & -34 & -4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 187 & -374 & -68 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 187 & -374 & -44 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 187 & -374 & -68 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array} \right) \Rightarrow$$

 $\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A) = 3 \Rightarrow$ *Sistema Incompatible*Si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A

b)

Si $m = 1 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x + 3y = 0 \Rightarrow 4x = -3y \Rightarrow x = \frac{-3}{4}y \Rightarrow \frac{-3}{4}y + 2y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - \frac{5}{4}y$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{-3}{4}\lambda, \lambda, 1 - \frac{5}{4}\lambda \right) \equiv (-3\lambda, 4\lambda, 1 - 5\lambda)$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, 5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo **P** generado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tenga volumen **6**.

b) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $\mathbf{z} = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

a) El modulo del producto mixto de los tres vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} es el volumen del paralelepípedo cuyo valor son **6 u³**

$$\left| \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w} \right) \right| = 6 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = -10 + 3 - 4\lambda - 4 + 2\lambda + 15 \Rightarrow |-2\lambda + 4| = 6 \Rightarrow -2\lambda + 4 = 6 \Rightarrow -2\lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1$$

b) El vector director de la recta **r** es perpendicular al vector \vec{u} y al vector director del plano dado, por lo tanto es el vector resultante de los dos vectores citados

$$\begin{cases} \vec{u} = (2, -1, 4) \\ \vec{v}_\pi = (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_\pi \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, -2, 0) \equiv (1, 2, 0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π

Hallaremos una recta r que contenga el centro C de la esfera y cuyo vector director sea el del plano dado, calculando los puntos P y Q de intersección de esta con la esfera, que son puntos de los planos pedidos y paralelos al dado

$$\text{Siendo } \begin{cases} C(1, 1, 2) \\ r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ r = -3 \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, -2, 2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

$$(1 + \lambda - 1)^2 + (1 - 2\lambda - 1)^2 + (2 + 2\lambda - 2)^2 = 9 \Rightarrow \lambda^2 + (-2\lambda)^2 + (2\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow 9\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow 9\lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \Rightarrow P \begin{cases} x = 1 + 1 \\ y = 1 - 2 \cdot 1 \\ z = 2 + 2 \cdot 1 \end{cases} \\ \lambda = -1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + (-1) \\ y = 1 - 2 \cdot (-1) \\ z = 2 + 2 \cdot (-1) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

Los planos paralelos son de la forma $x - 2y + 2z + D = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} P(2, -1, 4) \Rightarrow 2 - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + D = 0 \Rightarrow 12 + D = 0 \Rightarrow D = -12 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - 2y + 2z - 12 = 0 \\ Q(0, 3, 0) \Rightarrow 0 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow -6 + D = 0 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow \pi_2 \equiv x - 2y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen de coordenadas O , y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$

se pide:

- a) (1 punto) Determinar un punto Q de la recta r , de modo que su proyección Q' sobre \overline{OP} sea el punto medio de este segmento.
 b) (1 punto) Determinar la distancia de P a r .
 c) (1 punto) ¿Existe algún punto R de la recta r , de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

a) El vector formado por el punto genérico R de la recta r y el punto S medio entre O y P y el vector OP son perpendiculares y su producto escalar es nulo.

$$S \begin{cases} x_s = \frac{0+(-4)}{2} = -2 \\ y_s = \frac{0+6}{2} = 3 \\ z_s = \frac{0+6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OP} = (-4, 6, 6) - (0, 0, 0) = (-4, 6, 6) \equiv (-2, 3, 3) \\ \overrightarrow{SR} = (-4+4\lambda, 8+3\lambda, -2\lambda) - (-2, 3, 3) = (-2+4\lambda, 5+3\lambda, -3-2\lambda) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{SR} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{SR} = 0 \Rightarrow (-2, 3, 3) \cdot (-2+4\lambda, 5+3\lambda, -3-2\lambda) = 0 \Rightarrow 4-8\lambda+15+9\lambda-9-6\lambda=0 \Rightarrow$$

$$10-5\lambda=0 \Rightarrow 5\lambda=10 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow Q \begin{cases} x = -4+4 \cdot 2 \\ y = 8+3 \cdot 2 \\ z = -2 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow Q(4, 14, -4)$$

b) Hallaremos un plano π que conteniendo a P sea perpendicular a la recta r , siendo el vector director del plano el de la recta que es perpendicular al vector PG , es G el punto genérico del plano, y el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación del plano buscado.

Se hallará, a continuación, el punto S de intersección de la recta r y el plano π , siendo el módulo del vector PS la distancia pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (4, 3, -2) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (-4, 6, 6) = (x+4, y-6, z-6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(4, 3, -2) \cdot (x+4, y-6, z-6) = 0 \Rightarrow 4x+16+3y-18-2z+12=0 \Rightarrow \pi \equiv 4x+3y-2z+10=0$$

$$\text{Intersección} \Rightarrow 4 \cdot (-4+4 \cdot \lambda) + 3 \cdot (8+3 \cdot \lambda) - 2 \cdot (-2\lambda) + 10 = 0 \Rightarrow -16+16\lambda+24+9\lambda+4\lambda+10=0 \Rightarrow$$

$$18+29\lambda=0 \Rightarrow 29\lambda=18 \Rightarrow \lambda = \frac{18}{29} \Rightarrow S \begin{cases} x = -4+4 \cdot \frac{18}{29} \\ y = 8+3 \cdot \frac{18}{29} \\ z = -2 \cdot \frac{18}{29} \end{cases} \Rightarrow Q(4, 14, -4)$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción B

c) Los vectores **OP** y **OR**, siendo **R** el punto genérico de la recta, son proporcionales o iguales

$$\begin{cases} \overline{OP} = (-4, 6, 6) - (0, 0, 0) = (-4, 6, 6) \equiv (-2, 3, 3) \\ \overline{OR} = (-4 + 4\lambda, 8 + 3\lambda, -2\lambda) - (0, 0, 0) = (-4 + 4\lambda, 8 + 3\lambda, -2\lambda) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{-4 + 4\lambda} = \frac{3}{8 + 3\lambda} = \frac{3}{-2\lambda}$$

$$\begin{cases} \frac{-2}{-4 + 4\lambda} = \frac{3}{-2\lambda} \Rightarrow 4\lambda = -12 + 12\lambda \Rightarrow -12 + 8\lambda = 0 \Rightarrow 8\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ \frac{3}{8 + 3\lambda} = \frac{3}{-2\lambda} \Rightarrow -6\lambda = 24 + 9\lambda \Rightarrow 24 + 15\lambda = 0 \Rightarrow 15\lambda = -24 \Rightarrow \lambda = -\frac{24}{15} = -\frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} \neq -\frac{8}{5} \Rightarrow \text{No existen}$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{si } x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f.
b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^3 f(x) dx$

a)

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\text{sen } 0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{1}} = \cos 0 = 1 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x + 1 = 0 \cdot e^0 + 1 = 0 \cdot 1 + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 0$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \cos x - \text{sen } x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot \cos x - \text{sen } x}{x^2} = \frac{0 \cdot \cos 0 - \text{sen } 0}{0^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - x \cdot \text{sen } x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \cdot \text{sen } x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\text{sen } x}{2} = -\frac{\text{sen } 0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x(x+1) = e^0(0+1) = 1 \cdot (0+1) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1 \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 0 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \cos x - \text{sen } x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción B

c)

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (xe^x + 1) dx = \int_1^3 xe^x dx + \int_1^3 dx = [xe^x]_1^3 - \int_1^3 e^x dx + [x]_1^3 = (3e^3 - 1 \cdot e^1) - [e^x]_1^3 + (3-1)$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$\int_1^3 f(x) dx = 3e^3 - e - (e^3 - e^1) + 2 = 2e^3 + 2 = 2(e^3 + 1)$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto) Calcular A^{15} y A^{20} .b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = I_3 \cdot A = A \Rightarrow A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_3 \cdot I_3 = I_3$$

$$A^5 = A \Rightarrow A^6 = I_3 \dots \dots \dots A^{15} = A \dots \dots \dots A^{15} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$6X + 3AX = B \Rightarrow X(6I_3 + 3A) = B \Rightarrow X(6I_3 + 3A)(6I_3 + 3A)^{-1} = B(6I_3 + 3A)^{-1} \Rightarrow XI_3 = B(6I_3 + 3A)^{-1} \Rightarrow X = B(6I_3 + 3A)^{-1}$$

$$6I_3 + 3A = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|6I_3 + 3A| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 324 - 81 = 243 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (6I_3 + 3A)^{-1} \Rightarrow (6I_3 + 3A)^{-1} = \frac{1}{|6I_3 + 3A|} \text{adj}[(6I_3 + 3A)^t]$$

$$[(6I_3 + 3A)^t] = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}[(6I_3 + 3A)^t] = \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix} \Rightarrow (6I_3 + 3A)^{-1} = \frac{1}{243} \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix}$$

Continuación del Ejercicio 3 de la Opción Bb) *Continuación*

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{243} \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix} = \frac{1}{243} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix} = \frac{1}{81} \cdot I_3 \cdot \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{81} \cdot \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

- a) (1'25 puntos) Hallar el rango de **A** en función de **t**.
 b) (0'75 puntos) Calcular **t** para que $\det(\mathbf{A} - t\mathbf{I}) = 0$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & -7 & t-9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} t & 2 \\ -7 & t-9 \end{vmatrix} = t \cdot (t-9) + 14 = t^2 - 9t + 14 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow t^2 - 9t + 14 = 0$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 81 - 56 = 25 \geq 0 \Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{9-5}{2} = 2 \\ t = \frac{9+5}{2} = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{2, 7\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Si $t = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Si $t = 7$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Continuación del Ejercicio 4 de la Opción B

b)

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - tI| = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-t+6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A - tI| = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 7-t & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (7-t) \Rightarrow \text{Como } |A - tI| = 0 \Rightarrow 2 \cdot (7-t) = 0 \Rightarrow 7-t = 0 \Rightarrow t = 7$$