

Opción A

Ejercicio 1.- Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1,25 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible
 b) (0,5 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible
 c) (1,25 puntos) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de la matriz M

Solución

a) El símbolo \exists significa "existe al menos un o una"

$$\exists M^{-1} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + 2m^2 - 2m - m = 2 \cdot (m^2 - m) = 2 \cdot m \cdot (m-1)$$

$$\text{Si } |M| = 0 \Rightarrow 2 \cdot m \cdot (m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall m \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

b)

$$|M^{25}| = |M|^{25} = [2 \cdot m \cdot (m-1)]^{25} = 2^{25} \cdot m^{25} \cdot (m-1)^{25} \Rightarrow$$

$$\text{Si } |M^{25}| = 0 \Rightarrow 2^{25} \cdot m^{25} \cdot (m-1)^{25} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \end{cases}$$

$$\forall m \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow \exists (M^{25})^{-1}$$

c)

$$\text{Cuando } m = -1 \Rightarrow |M| = 2 \cdot (-1) \cdot [(-1) - 1] = 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \text{adj}(M^t) \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(M^t) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1+ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$, se pide:

- a) (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a , b para los cuales la función $f(x)$ es continua en $x = 0$
 b) (1,5 puntos) Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada

Solución

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} = \frac{\ln(1+a \cdot 0) - b \cdot 0}{0^2} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{Aplicando L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+ax} - b}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a-b \cdot (1+ax)}{2x(1+ax)} =$$

$$= \frac{a-b \cdot (1+a \cdot 0)}{2 \cdot 0 \cdot (1+a \cdot 0)} = \frac{a-b}{0} \stackrel{a-b=0}{=} \frac{0}{0} \stackrel{\text{Aplicando L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-b \cdot a}{2 \cdot (1+ax) + 2ax} =$$

$$= -\frac{b \cdot a}{2 \cdot (1+a \cdot 0) + 2a \cdot 0} = -\frac{b \cdot a}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a \cdot b=1 \end{cases} \Rightarrow a=b \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \Rightarrow b=-1 \\ a=1 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{1^2} = \ln(1+x) - x \Rightarrow f(x+h) = \ln(1+x+h) - (x+h) = \ln(1+x+h) - x - h$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+h) - x - h - [\ln(1+x) - x]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+h) - x - h - \ln(1+x) + x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+h) - \ln(1+x) - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x+h}{1+x}\right) - h}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{1+x}\right) - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{1+x}\right)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{1+x}\right) - 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{1+x}\right)^{\frac{1}{h}} - 1 =$$

$$\text{Como } \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{1+x}\right)^{\frac{1}{h}} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{h}}\right] - 1 = \ln e^{\frac{1}{1+x}} - 1 = \left(\frac{1}{1+x}\right) \cdot \ln e - 1 = \frac{1}{1+x} - 1$$

$$f'(x) = \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x} \Rightarrow f'(0) = -\frac{0}{1+0} = 0$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos.

Dada las rectas: $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}$, $s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ determinar los valores de los parámetros **a** y **b** para los cuales las rectas **r**, **s** se cortan perpendicularmente.

Solución

Como se cortan tienen un punto común y al ser perpendiculares el producto escalar de los vectores directores de las rectas es nulo

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=a\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, a) \\ s \equiv \begin{cases} x=3+\mu b \\ y=\mu \\ z=3-\mu \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (b, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (1, 2, a) \cdot (b, 1, -1) = 0 \\ \lambda = 3 + \mu b \\ 2\lambda = \mu \\ a\lambda = 3 - \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+2-a=0 \\ \lambda=3+\mu b \\ \lambda = \frac{\mu}{2} \\ a\lambda=3-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+2-a=0 \\ 3+\mu b = \frac{\mu}{2} \\ a \cdot \frac{\mu}{2} = 3-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+2-a=0 \\ 6+2\mu b = \mu \\ a \cdot \mu + 2\mu = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+2-a=0 \\ \mu(1-2b)=6 \\ (a+2)\mu=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{6}{1-2b} \\ \mu = \frac{6}{a+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a=-2 \\ 1-2b=a+2 \Rightarrow a+2b=-1 \end{cases} \Rightarrow 3b=-3 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow -1-a=-2 \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow a=1$$

Solución (1, -1)

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π

Solución

Calcularemos una recta **r**, que pasando por un punto de él, sea perpendicular. Hallaremos los puntos **A** y **B**, de la recta, que distan tres unidades del que hemos tomado como referencia, después haremos pasar los plano por ellos

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow P(0, -1, -1) \Rightarrow 2 \cdot 0 - (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(0 - 2\lambda)^2 + (-1 + 1 + \lambda)^2 + (-1 + 1 + 2\lambda)^2} = \pm 3 \Rightarrow 4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2 = 9 \Rightarrow 9\lambda^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \begin{cases} x = 2 \cdot 1 = 2 \\ y = -1 - 1 = -2 \\ z = -1 + 2 \cdot 1 = 1 \end{cases} \\ B \begin{cases} x = 2 \cdot (-1) = -2 \\ y = -1 - (-1) = 0 \\ z = -1 + 2 \cdot (-1) = -3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Pasando por A} \Rightarrow 2 \cdot 2 - (-2) + 2 \cdot 1 + C = 0 \Rightarrow 4 + 2 + 2 + C = 0 \Rightarrow C = -8 \Rightarrow \pi_A \equiv 2x - y + 2z - 8 = 0 \\ \text{Pasando por B} \Rightarrow 2 \cdot (-2) - 0 + 2 \cdot (-3) + D = 0 \Rightarrow -4 + 0 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 10 \Rightarrow \pi_B \equiv 2x - y + 2z + 10 = 0 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1.-

a) (1 punto). Dada la función: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) (0'5 puntos). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$

c) (1'5 puntos). Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

Solución

a)

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 1 \Rightarrow 1-x^2 = (1+x^2)^2 \Rightarrow$$

$$1-x^2 = 1+2x^2+x^4 \Rightarrow x^4+3x^2=0 \Rightarrow (x^2+3) \cdot x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-3} \end{cases}$$

$$\text{Cuando } x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{0}{1+0^2} = 0$$

b)

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = \frac{1-0^2}{(1+0^2)^2} = 1 \Rightarrow y-0 = 1 \cdot (x-0) \Rightarrow y = x \Rightarrow x - y = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la recta: $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π .

Solución

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos de la recta} \begin{cases} A(1, 0, 0) \\ B \begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow B(2, -1, 1) \end{cases}$$

Punto simétrico de A

$$\text{Recta } s \text{ que pasa por A perpendicular al plano} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 0 + \mu = \mu \\ y = 0 - 2\mu = -2\mu \end{cases} \Rightarrow$$

Punto P de corte de la recta s con el plano $\pi \Rightarrow 1+\mu+\mu-2(-2\mu)+1=0 \Rightarrow 6\mu+2=0 \Rightarrow \mu=-\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$P \begin{cases} x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ y=-2\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}=\frac{1+x_{A'}}{2} \Rightarrow 3x_{A'}+3=4 \Rightarrow 3x_{A'}=1 \Rightarrow x_{A'}=\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}=\frac{0+y_{A'}}{2} \Rightarrow 3y_{A'}=-2 \Rightarrow y_{A'}=-\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}=\frac{0+z_{A'}}{2} \Rightarrow 3z_{A'}=4 \Rightarrow z_{A'}=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Punto simétrico de B

Recta t que pasa por A perpendicular al plano $\Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=2+\varepsilon \\ y=-1+\varepsilon \\ y=1-2\varepsilon \end{cases}$

Punto Q de corte de la recta t con el plano $\pi \Rightarrow 2+\varepsilon-1+\varepsilon-2(1-2\varepsilon)+1=0 \Rightarrow 6\varepsilon=0 \Rightarrow \varepsilon=0$

$$t \equiv \begin{cases} x=2+0=2 \\ y=-1+0=-1 \\ y=1-2 \cdot 0=1 \end{cases} \Rightarrow \text{En este caso } B'(2, -1, 1) \text{ al ser punto del plano}$$

Llamando u a la recta pedida

$$\vec{v}_u = (2, -1, 1) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \equiv (5, -1, -1) \Rightarrow u \equiv \begin{cases} x=2+5\beta \\ y=-1-\beta \\ y=1-\beta \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado el sistema $\begin{cases} \lambda x+2y+z=0 \\ \lambda x-y+2z=0 \\ x-\lambda y+2z=0 \end{cases}$, se pide:

a) Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de: $x = y = z = 0$

b) Resolver el sistema para $\lambda = 5$

Solución

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda+4-\lambda^2+1-4\lambda+2\lambda^2 = \lambda^2-6\lambda+5 \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A|=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda+5=0 \Rightarrow \Delta = 36-20=16 > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{6+4}{2} = 5 \\ \lambda = \frac{6-4}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Cuando $\begin{cases} \lambda=5 \\ \lambda=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow \text{rang}(A)=2 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

La solución trivial $\Rightarrow x=y=z=0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{1, 5\}$

b)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -25 & 10 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -27 & 9 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3y+z=0 \Rightarrow z=3y \Rightarrow$$

$$5x+2y+3y=0 \Rightarrow 5x+5y=0 \Rightarrow x=-y \Rightarrow \text{Solución } (-\lambda, \lambda, 3\lambda)$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada las matrices: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la

ecuación matricial $AXB = A + B$

Solución

$$A^{-1}AXB=A^{-1}(A+B) \Rightarrow XBB^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}(A+B)B^{-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ |A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4+2=6 \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ |B| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4-6=-2 \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$X=A^{-1}(A+B)B^{-1}=\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 36 & 48 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$