

## 12.1. Modelo 2011 - Opción A

**Problema 12.1.1** (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x & + & \lambda z = & 2 \\ x + & \lambda y - & z = & 1 \\ x + & 3y + & z = & 2\lambda \end{cases}$$

se pide:

1. (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro  $\lambda$
2. (1,5 puntos). Resolver el sistema para  $\lambda = 1$ .

**Solución:**

1.

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array} \right) \quad |A| = -6\lambda = 0 \implies \lambda = 0$$

- Si  $\lambda \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$  de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si  $k = 0$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

2.

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 0 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

**Problema 12.1.2** (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.
- (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de  $f$ , el eje  $OX$  y las rectas  $x = 0$ ,  $x = 3$ .

**Solución:**

- Máximos y Mínimos:

$$f'(x) = \frac{3-x}{(x+1)^3} = 0 \implies x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función presenta un Máximo en el punto  $\left(3, \frac{1}{8}\right)$ . En el punto  $x = -1$  la función no es continua, en ese punto habrá una posible asíntota vertical.

- Asíntotas:

- Verticales:  $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[ \frac{-2}{0} \right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[ \frac{-2}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[ \frac{-2}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales:  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales
- Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abscisas que esté dentro del intervalo  $[0, 3]$ :

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \implies x = 1$$

Los límites de integración serán de 0 a 1 y de 1 a 3. Calculamos la integral indefinida de la función por descomposición polinómica:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1) + B}{(x+1)^2}$$

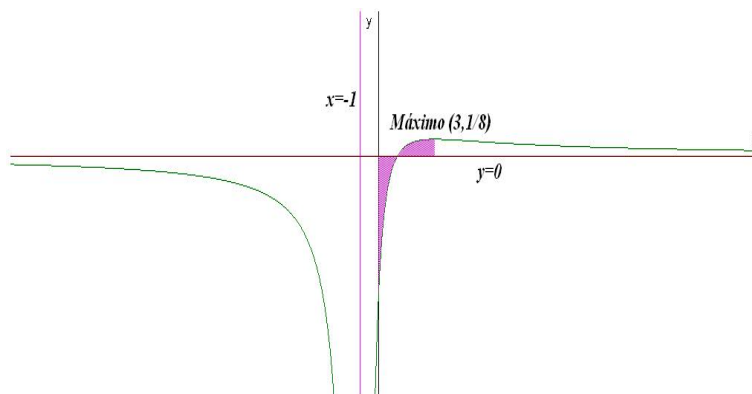
$$x-1 = A(x+1) + B \implies \begin{cases} x = -1 \implies B = -2 \\ x = 0 \implies -1 = A + B \implies A = 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1}$$

$$S_1 = \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = F(1) - F(0) = \ln 2 - 1$$

$$S_2 = \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = F(3) - F(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - \ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} u^2$$



**Problema 12.1.3** (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

1. (1 punto). Estudiar la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .

2. (1 punto). Determinar la posición del plano  $\pi$  que contiene a las rectas  $r$  y  $s$ .

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_s(5, 4, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (6, 4, 1)$$

1.  $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$  y  $\text{Rango} \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_r P_s} \\ \vec{u}_s \end{pmatrix} = 2 \implies$  las rectas  $r$  y  $s$  son paralelas.

2.

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (6, 4, 1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 2 & 6 & x+1 \\ 1 & 4 & y \\ 1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 3x - 4y - 2z + 1 = 0$$

**Problema 12.1.4** (2 puntos) Dados los planos  $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$  y  $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$ , se pide:

- (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  determinada por la intersección de  $\alpha$  con  $\beta$ .
- (1 punto). Determinar el plano  $\gamma$  que es paralelo al plano  $\alpha$  y pasa por el punto  $(\sqrt{2}, 1, 0)$

**Solución:**

1.

$$r : \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = -\frac{3}{5} - 2\lambda \\ z = -\frac{1}{5} + \lambda \end{cases}$$

Un punto de  $r$  puede ser:  $\left(0, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$  y

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 5(2, -2, -1)$$

2.  $\gamma : 2x + y + 2z + \lambda = 0$  y contiene al punto  $(\sqrt{2}, 1, 0)$ , luego:

$$2\sqrt{2} + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -(1 + 2\sqrt{2}) \implies$$

$$\gamma : 2x + y + 2z - (1 + 2\sqrt{2}) = 0$$

## 12.2. Modelo 2011 - Opción B

**Problema 12.2.1** (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1 punto). Calcular  $A^2 - 4A + 3I$
2. (1 punto). Demostrar que la matriz inversa  $A^{-1}$  de  $A$  es  $\frac{1}{3}(4I - A)$ .
3. (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz  $A - 2I$ .

**Solución:**

1.

$$\begin{aligned} A^2 - 4A + 3I &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$A^2 - 4A + 3I = O \implies A(A - 4I) = -3I \implies A \left( -\frac{1}{3}(A - 4I) \right) = I \implies$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A)$$

3.

$$(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = A^2 - 2IA - 2AI + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I =$$

$$A^2 - 4A + 3I + I = O + I = I \implies (A - 2I)^{-1} = A - 2I$$

**Problema 12.2.2** (3 puntos) Dados los puntos  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(3, 1, -2)$ ,  $C(7, 2, 3)$ ,  $D(5, -2, 5)$  y  $E(1, 0, 2)$ , se pide:

1. (1 punto). Demostrar que los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son coplanarios.

- (1 punto). Demostrar que el polígono  $ABCD$  es un paralelogramo y calcular su área.
- (1 punto). Hallar la distancia del punto  $E$  al plano  $\pi$  determinado por los puntos  $A, B, C$  y  $D$

**Solución:**

1.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4, -2), \overrightarrow{AC} = (6, 5, 3), \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{son coplanarios}$$

Los tres vectores construidos son linealmente dependientes y, por tanto, están en el mismo plano.

2.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2, 4, -2) = \sqrt{24} \\ \overrightarrow{BC} &= (4, 1, 5) = \sqrt{42} \\ \overrightarrow{CD} &= (-2, -4, 2) = \sqrt{24} \\ \overrightarrow{AD} &= (4, 1, 5) = \sqrt{42} \end{aligned}$$

Los lados son iguales dos a dos, luego se trata de un paralelogramo.

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = |2(11, -9, -7)| = 2\sqrt{251} u^2$$

3.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 4, -2) \\ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5) \\ A(1, -3, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 2 & 4 & x-1 \\ 4 & 1 & y+3 \\ -2 & 5 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 11x - 9y - 7z - 38 = 0$$

$$d(E, \pi) = \frac{|11 - 14 - 38|}{\sqrt{251}} = \frac{41\sqrt{251}}{\sqrt{251}} u$$

**Problema 12.2.3** (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

- (1 punto).  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$
- (1 punto).  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$

**Solución:**

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} &= [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1/x^2)e^{1/x}}{(-1/x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1/\cos^2 x}{2\sqrt{1 + \tan x}} - \frac{-1/\cos^2 x}{2\sqrt{1 - \tan x}} \right) &= 1\end{aligned}$$

**Problema 12.2.4** (2 puntos) Dada la función  $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$ , calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de  $f$ , el eje  $OX$  y las rectas  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**Solución:**

Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abscisas que esté dentro del intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ :

$$\frac{1}{2} - \sin x = 0 \implies x = \frac{\pi}{6}$$

Los límites de integración serán de 0 a  $\pi/6$  y de  $\pi/6$  a  $\pi/2$ . Calculamos la integral indefinida:

$$F(x) = \int \left( \frac{1}{2} - \sin x \right) dx = \frac{x}{2} + \cos x$$

$$S_1 = \int_0^{\pi/6} \left( \frac{1}{2} - \sin x \right) dx = F(\pi/6) - F(0) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$S_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left( \frac{1}{2} - \sin x \right) dx = F(\pi/2) - F(\pi/6) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} = 0,47$$