

10.1. Modelo 2009 - Opción A

Problema 10.1.1 (3 puntos) Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π , se pide:

1. (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de π y r .
2. (1 punto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π , que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r .
3. (1,5 puntos) Sea Q el punto intersección de r y t . Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P , y R es un punto cualquiera de s , probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r .

Solución:

1. De dos formas diferentes:

▪ La ecuación de la recta en paramétricas es $r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$, y

si sustituimos en el plano π tenemos:

$$(3 + 2\lambda) + 2(2 + \lambda) - (5 + 4\lambda) = 2 \implies 2 = 2$$

expresión que se cumple para cualquier punto de la recta independientemente del valor de λ y, por tanto, la recta r está contenida en el plano π .

- Ponemos la recta r como intersección de dos planos:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{z-5}{4} \implies 2x - z = 1$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} \implies x - 2y = -1$$

Ahora estudiamos el sistema formado por estos dos planos y el plano π

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 2 \\ x - 2y = -1 \\ 2x - z = 1 \end{array} \right. \implies \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

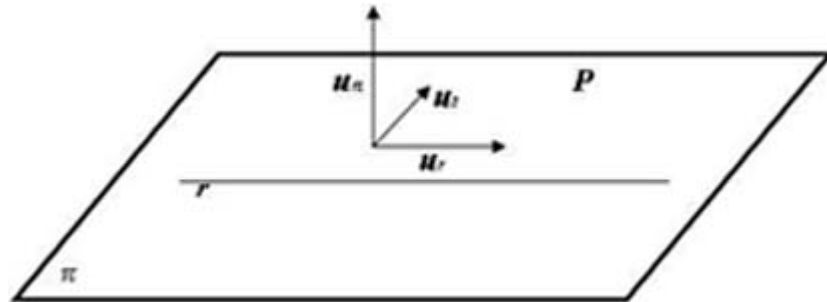
$$\left. \begin{array}{l} |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \implies \text{Rango}(A) = 2 \\ F_3 = F_1 + F_2 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2 \end{array} \right\} \implies$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies$ Sistema Compatible Indeterminado.

El plano π y la recta r tienen infinitos puntos comunes y, por tanto, la recta está contenida en el plano.

2. Para que el enunciado tenga sentido es necesario que el punto P esté en el plano π , basta sustituir el punto en el plano para comprobarlo.

El vector \vec{u}_t de la recta t que buscamos tiene que ser perpendicular



al vector característico del plano $\vec{u}_\pi = (1, 2, -1)$ y al vector director $\vec{u}_r = (2, 1, 4)$ de la recta r . Luego:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(3, -2, -1)$$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (3, -2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{cases} \implies t : \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$

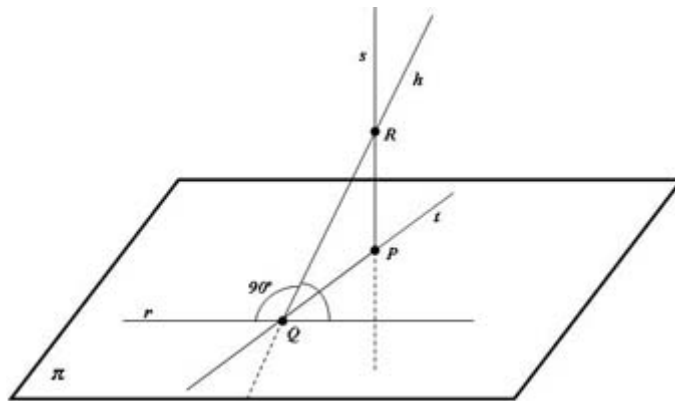
Evidentemente esta recta tiene que estar contenida en el plano π .

3. La situación geométrica es la siguiente:

Tenemos que encontrar una recta s perpendicular al plano π y que pase por el punto P

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Un punto cualquiera R de la recta s es $R(-2 + \lambda, 3 + 2\lambda, 2 - \lambda)$.



Ahora buscamos el punto de corte Q entre las rectas t y r

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}, \quad t : \begin{cases} x = -2 + 3\mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases} \implies \begin{cases} 3 + 2\lambda = -2 + 3\mu \\ 2 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 5 + 4\lambda = 2 - \mu \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \implies Q(1, 1, 1)$$

Sólo nos queda por comprobar que los vectores $\vec{QR} = (-3 + \lambda, 2 + 2\lambda, 1 - \lambda)$ y $\vec{ur} = (2, 1, 4)$ son siempre perpendiculares. Para ello calculamos su producto escalar y debe de ser cero independientemente del valor del parámetro λ

$$\vec{QR} \cdot \vec{ur} = (-3 + \lambda, 2 + 2\lambda, 1 - \lambda) \cdot (2, 1, 4) = -6 + 2\lambda + 2 + 2\lambda + 4 - 4\lambda = 0$$

Luego la recta h que pasa por los puntos Q y R es siempre perpendicular a la recta r sea cual sea el punto R que tomemos de la recta s .

Problema 10.1.2 (3 puntos) Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{4} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{7}{12} (1 - (x-2)^2) & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

1. (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
2. (1 punto) Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$
3. (1 punto) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

1. (1 punto) Continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (3/2)} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{7}{16}$$

$$\lim_{x \rightarrow (3/2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (3/2)^+} \frac{7}{12} (1 - (x-2)^2) = \frac{7}{16}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16}$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (3/2)^+} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16} \implies$$

f es continua en $x = \frac{3}{2}$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{-7(x-2)}{6} & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}^-\right) = -\frac{3}{4} \\ f'\left(\frac{3}{2}^+\right) = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Luego:

$$f'\left(\frac{3}{2}^-\right) \neq f'\left(\frac{3}{2}^+\right)$$

La función no es derivable en $x = 3/2$

2. Estudiamos su representación gráfica

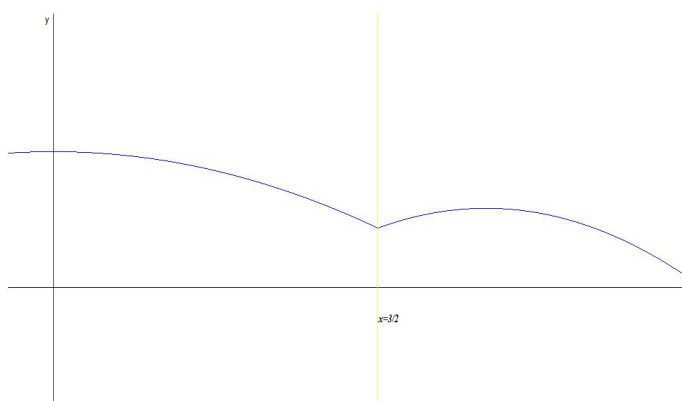
Primero los extremos

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} = 0 & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{-7(x-2)}{6} = 0 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ x = 2 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Recurrimos a la segunda derivada para ver de que tipo son

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \implies \text{Máximo} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{6} \implies \text{Máximo} & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

x	$f(x)$
0	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{16}$
2	$\frac{7}{12}$



Problema 10.1.3 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k \end{cases}$$

1. (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k .
2. (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k \end{array} \right)$$

$$|\bar{A}| = 3(k-1) = 0 \implies k = 1$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies$ el Rango(A) = 2 independientemente del valor de k .

Si $k \neq 1 \implies |\bar{A}| \neq 0 \implies$ Rango(\bar{A}) = 3 \neq Rango(A) = 2 = n^o de incógnitas y el sistema es Incompatible, es decir, no tiene solución.

Si $k = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{array} \right), \quad |\bar{A}| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2$$

Luego en este caso Rango(A) = Rango(\bar{A}) = 2 = n^o de incógnitas \implies Sistema Compatible Determinado, es decir, tiene solución única.

2.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

Problema 10.1.4 (2 puntos) Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2 - 1) & x + 1 & (x + 1)^2 \\ x - 1 & x + 1 & x + 1 \\ (x - 1)^2 & x - 1 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2 - 1) & x + 1 & (x + 1)^2 \\ x - 1 & x + 1 & x + 1 \\ (x - 1)^2 & x - 1 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = (x + 1)(x - 1) \begin{vmatrix} 2(x - 1) & 1 & x + 1 \\ x - 1 & x + 1 & x + 1 \\ x - 1 & 1 & x + 1 \end{vmatrix} =$$

$$(x + 1)^2(x - 1) \begin{vmatrix} 2(x - 1) & 1 & 1 \\ x - 1 & x + 1 & 1 \\ x - 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = (x + 1)^2(x - 1) \begin{vmatrix} 2(x - 1) & 1 & 1 \\ -(x - 1) & x & 0 \\ -(x - 1) & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(x + 1)^2(x - 1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(x^2 - 1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 0 \end{vmatrix} = x(x^2 - 1)^2 = 0 \implies x = \pm 1$$

10.2. Modelo 2009 - Opción B

Problema 10.2.1 (3 puntos) Dados el punto $P(1, -1, 2)$ y el plano $\pi : 2x - y + z = 11$, se pide:

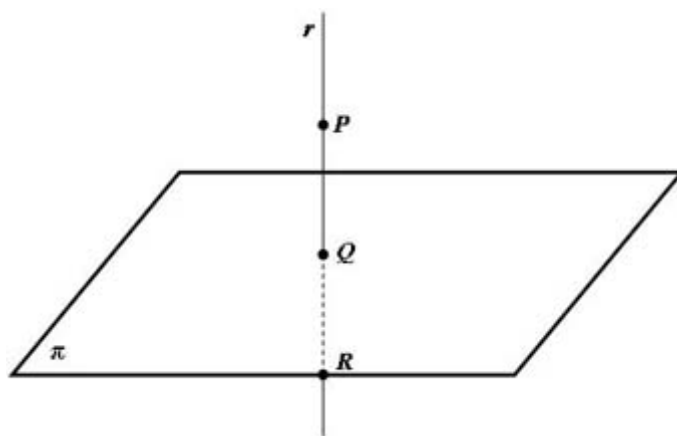
- (1,5 puntos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P . Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π .
- (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector \overrightarrow{PQ} .

Solución:

- Tenemos

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (2, -1, 1) \\ P_r = P(1, -1, 2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en el plano tenemos



$$2(1 + 2\lambda) - (-1 - \lambda) + (2 + \lambda) - 11 = 0 \implies \lambda = 1$$

Sustituyendo este valor en r tenemos $Q(3, -2, 3)$.

El punto Q es el punto medio entre P y el punto R que buscamos

$$Q = \frac{P + R}{2} \implies R = 2Q - P = 2(3, -2, 3) - (1, -1, 2) = (5, -3, 4)$$

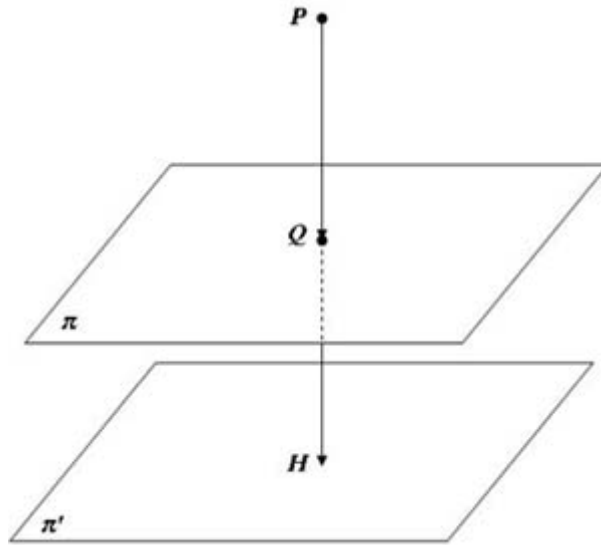
Luego $R(5, -3, 4)$ es el punto simétrico de P respecto del plano π .

2. El vector $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) = \vec{u}_\pi$ y es perpendicular al plano π . Tenemos

$$H = P + \lambda \cdot \vec{u}_\pi \implies \overrightarrow{PH} = \lambda \cdot \vec{u}_\pi \implies$$

$$|\overrightarrow{PH}| = \lambda |\vec{u}_\pi| = \lambda \sqrt{6} = 5\sqrt{6} \implies \lambda = 5$$

Luego el punto $H = (1, -1, 2) + 5(2, -1, 1) = (11, -6, 7)$. El plano π' que buscamos contiene a este punto y tiene el mismo vector característico que π



$$\pi' : 2x - y + z = \lambda \implies 22 + 6 + 7 = \lambda \implies \lambda = 35 \implies 2x - y + z = 35$$

Nota: Podemos comprobar si $d(P, \pi') = 5\sqrt{6}$:

$$d(P, \pi') = \frac{|2 + 1 + 2 - 35|}{\sqrt{6}} = \frac{30}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6}$$

y también podemos comprobar que

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \text{ y } |\overrightarrow{QH}| = \sqrt{64 + 16 + 16} = 4\sqrt{6}$$

La suma de ambos módulos nos vuelve a dar $5\sqrt{6}$.

Problema 10.2.2 (3 puntos) Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3 , y se sabe que $\det(A) = 4$, se pide:

1. (1 punto) Calcular $\det(A^3)$ y $\det(3A)$.
2. (2 puntos) Calcular $\det(B)$ y $\det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:

$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

Solución:

- $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 4^3 = 64$
▪ $|3A| = |(3C_1, 3C_2, 3C_3)| = 3^3|A| = 27 \cdot 4 = 108$
- $|B| = |(2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)| = -10|(C_1, C_1 - C_2, C_3)| =$
 $= -10[(C_1, C_1, C_3) - (C_1, C_2, C_3)] = 10|A| = 40$
▪ Si $|B \cdot B^{-1}| = 1 \implies |B| \cdot |B^{-1}| = 1 \implies |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{40}$

Problema 10.2.3 (2 puntos) Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

- (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
- (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$
$$f(0) = 0$$

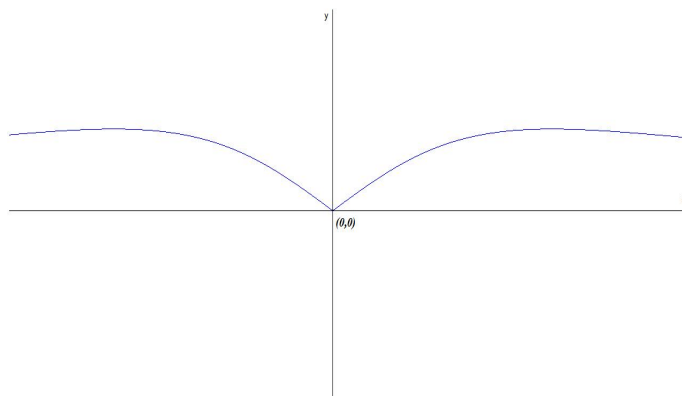
Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \implies$$

f es continua en $x = 0$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases}$$



Luego:

$$f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$

2. Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle la función debe ser continua en el intervalo $(-1, 1)$ y derivable en el intervalo $[-1, 1]$, lo cual no es cierto según el apartado anterior.

Problema 10.2.4 (3 puntos) Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x . Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

Solución:

- Comprobamos si hay continuidad en el punto $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x-1)^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \implies$$

f es continua en $x = 1$

- Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con $y = 1$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x = e & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Calculamos el área:

$$S = |S_1| + |S_2|$$

Resolvemos las integrales por separado

$$S_1 = \int_0^1 (1 - (x-1)^2) dx = \left. -\frac{x^3}{3} + x^2 \right|_0^1 = \frac{2}{3} \implies |S_1| = \frac{2}{3}$$

La siguiente integral se resuelve por partes $u = \ln x \implies u' = dx/x$ y $dv = dx \implies v = x$

$$\int (1 - \ln x) dx = x - \left(x \ln x - \int dx \right) = 2x - x \ln x$$

$$S_2 = \int_1^e (1 - \ln x) dx = 2x - x \ln x \Big|_1^e = e - 2 \implies |S_2| = e - 2$$

$$S = \frac{2}{3} + e - 2 = e - \frac{4}{3}$$

