

## 19.7. Julio 2018 (extraordinaria)- Opción A

**Problema 19.7.1** (2,5 puntos) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$ ,  $X =$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ se pide:}$$

- (1,25 puntos) Discutir el rango de la matriz  $A$ , en función de los valores del parámetro  $\alpha$ .
- (0,75 puntos) Para  $\alpha = 0$ , calcular, si es posible,  $A^{-1}$ .
- (0,5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema  $AX = B$ , en el caso  $\alpha = 1$ .

**Solución:**

a)

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix} \quad |A| = 490(\alpha - 1) = 0 \implies \alpha = 1$$

Si  $\alpha \neq 1 \implies \text{Rango}(A) = 3$ .

Si  $\alpha = 1 \implies |A| = 0$  y  $\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 98 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$ .

b) Si  $\alpha = 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/49 & -4/49 & 1/7 \\ -3/98 & 3/49 & 1/7 \\ 3/70 & 4/35 & -1/5 \end{pmatrix}$$

c) Si  $\alpha = 1$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 14F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 0 & 56 & 40 & 148 \end{array} \right) =$$

$$\left[ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 8F_2 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} 14x + 10z = 2 \\ 7y + 5z = 37/2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1/7 - (5/7)\lambda \\ y = 37/14 - (5/7)\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Problema 19.7.2** (2,5 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

se pide:

- (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de  $f$  en  $x = 2$ .
- (1 punto) Calcular las asíntotas horizontales de  $f(x)$ . ¿Hay alguna asíntota vertical?
- (0,75 puntos) Calcular  $\int_0^2 f(x) dx$ .

**Solución:**

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8e^{2x-4}) = 8$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-4x}{x-2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2-4}{1} = 8$   
 $f(2) = 8 \implies f$  es continua en  $x = 2$ .
- Si  $x \leq 2$  la función no tiene asíntotas verticales, tendría una horizontal en  $y = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (8e^{2x-4}) = 0$  y, por tanto, en esa rama no habría oblicuas.

Si  $x > 2$  la función no tiene asíntotas verticales, la única posible sería en  $x = 2$  pero no está en la rama. Horizontales tampoco habría

 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-4x}{x-2} = \infty$  y tampoco habría oblicuas en esa rama  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-4x}{x^2-2x} = \infty$
- $\int_0^2 8e^{2x-4} dx = 4e^{2x-4} \Big|_0^2 = 4 - \frac{4}{e^4} \simeq 3,927$

**Problema 19.7.3** (2,5 puntos) Se consideran los vectores  $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ ,  $\vec{v} = (2, 0, -1)$  y el punto  $A(-4, 4, 7)$ . Se pide:

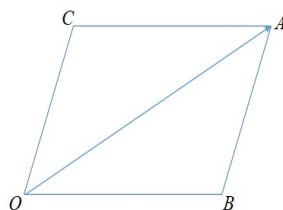
- (1 punto) Determinar un vector  $\vec{w}_1$  que sea ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , unitario y con tercera coordenada negativa.
- (0,75 puntos) Hallar un vector no nulo  $\vec{w}_2$  que sea combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y ortogonal a  $\vec{v}$ .
- (0,75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y una de sus diagonales es el segmento  $\overline{OA}$ .

**Solución:**

$$\text{a) } |\vec{w}| = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{array} \right| = |(-2, 5, -4)| = \sqrt{45} \implies \vec{w}_1 = \left( \frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{-4}{3\sqrt{5}} \right)$$

$$\text{b) } \vec{w}_2 = a\vec{u} + b\vec{v} = a(-1, 2, 3) + b(2, 0, -1) = (-a + 2b, 2a, 3a - b) \text{ y } \vec{w}_2 \perp \vec{v} \implies \vec{w}_2 \cdot \vec{v} = (-a + 2b, 2a, 3a - b) \cdot (2, 0, -1) = -2a + 4b + 0 - 3a + b = 0 \implies -5a + 5b = 0 \implies a = b \text{ Por ejemplo si } a = b = 1 \implies \vec{w}_2 = (1, 2, 2)$$

$$\text{c) } \vec{OA} = a\vec{u} + b\vec{v} = a(-1, 2, 3) + b(2, 0, -1) = (-a + 2b, 2a, 3a - b) = (-4, 4, 7) \implies a = 2 \text{ y } b = -1. \\ \vec{OB} = 2(-1, 2, 3) \implies B(-2, 4, 6) \text{ y } \vec{BA} = -(-2, 0, -1) = (-2, 0, 1) = \vec{OC} \implies C(-2, 0, 1) \\ \text{Es decir, } O(0, 0, 0), B(-2, 4, 6), A(-4, 4, 7) \text{ y } C(-2, 0, 1).$$



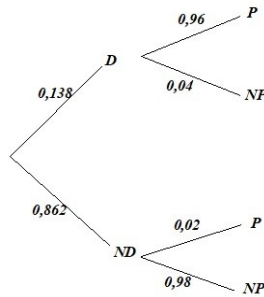
**Problema 19.7.4** (2,5 puntos) Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8% de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43% de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

- a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?
- b) (1,5 puntos) Cierta test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

**Solución:**

$$P(D) = 0,138 \text{ y } P(\bar{S}) = 0,43$$

$$\text{a) } P(D \cap S) = 0,138 \cdot (1 - 0,43) = 0,07866 \\ P(\bar{D} \cup \bar{S}) = P(\bar{D} \cap \bar{S}) = 1 - P(D \cap S) = 1 - 0,07866 = 0,92134$$



b)

$$P(D|P) = \frac{P(P|D)P(D)}{P(P)} = \frac{0,96 \cdot 0,138}{P(P|D)P(D) + P(P|ND)P(ND)} = \frac{0,13248}{0,13248 + 0,02 \cdot 0,862} = 0,88485$$

## 19.8. Julio 2018 (extraordinaria)- Opción B

**Problema 19.8.1** (2,5 puntos) Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

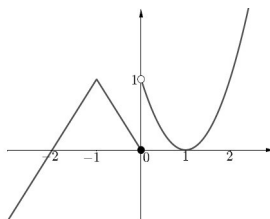
**Solución:**

$x$  días en Francia,  $y$  días en Alemania y  $z$  días en Suiza.

$$\begin{cases} (20 + 20 + 8)x + (25 + 15 + 8)y + (30 + 25 + 8)z = 765 \\ x + y + z = 15 \\ x = 2z \end{cases} \implies \begin{cases} 48x + 48y + 63z = 765 \\ x + y + z = 15 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \quad x = 6, \quad y = 6, \quad z = 3$$

**Problema 19.8.2** (2,5 puntos) El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función  $y = f(x)$ . Usando la información de la figura, se pide:

- (0,5 puntos) Indicar los valores de  $f(-1)$  y  $f'(1)$ .
- (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si  $f$  es continua en los puntos  $x = -1$  y  $x = 0$ .



c) (0,5 puntos) Indicar razonadamente si  $f$  es derivable en los puntos  $x = -1$  y  $x = 0$ .

d) (0,5 puntos) Determinar el valor de  $\int_{-2}^0 f(x) dx$

**Solución:**

a)  $f(-1) = 1$  y  $f'(1) = 0$ .

b) En  $x = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \text{ y } f(-1) = 1 \implies f \text{ es continua en } x = -1.$$

En  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \implies f \text{ discontinua no evitable en } x = 0, \text{ presenta un salto.}$$

c) En  $x = 0$  la función no es continua y, por tanto, no es derivable. En  $x = -1$  la función es continua pero hace un pico en el que se podrían trazar infinitas rectas tangentes, luego no es derivable en  $x = -1$ .

d)  $\int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \text{ u}^2.$

**Problema 19.8.3** (2,5 puntos) Dados el punto  $P(0, -1, 1)$  y la recta  $r$ , que pasa por el punto  $Q(1, 0, 1)$  y tiene como vector director  $\vec{v} = (0, 1, 2)$ , se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a  $r$  y pasa por  $P$ .

b) (0,5 puntos) Encontrar el punto  $S$  contenido en  $r$  tal que el vector  $\overrightarrow{SP}$  sea perpendicular a la recta  $r$ .

c) (1,5 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto  $P$  y dos puntos  $T_1, T_2$ , contenidos en la recta  $r$ , que están a distancia  $\sqrt{5}$  de  $P$ .

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{v} = (0, 1, 2) \\ P_r = Q(1, 0, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{y } P(0, -1, 1)$$

a)

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 1, 2) \\ \vec{P}_r \vec{P} = (0, -1, 1) - (1, 0, 1) = (-1, -1, 0) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \implies$$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2x - 2y + z - 3 = 0$$

b)  $S \in r \implies S(1, \lambda, 1 + 2\lambda)$  luego  $\vec{SP} = (0, -1, 1) - (1, \lambda, 1 + 2\lambda) = (-1, -1 - \lambda, -2\lambda)$  y como  $\vec{SP} \perp \vec{u}_r \implies \vec{SP} \cdot \vec{u}_r = 0 \implies (-1, -1 - \lambda, -2\lambda) \cdot (0, 1, 2) = -1 - \lambda - 4\lambda = 0 \implies -1 - 5\lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{5} \implies S\left(1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$

c) Sea  $T \in r: T(1, \lambda, 1 + 2\lambda) \implies \vec{PT} = (1, \lambda, 1 + 2\lambda) - (0, -1, 1) = (1, \lambda + 1, 2\lambda)$  y  $|\vec{PT}| = \sqrt{1 + (\lambda + 1)^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{5} \implies \lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = \frac{3}{5} \implies$

$$T_1(1, -1, -1) \quad T_2\left(1, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

$$\vec{PT}_1 = (1, -1, -1) - (0, -1, 1) = (1, 0, -2) \quad \vec{PT}_2 = \left(1, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right) - (0, -1, 1) = \left(1, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{PT}_1 \times \vec{PT}_2| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 8/5 & 6/5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \left( \frac{16}{5}, -\frac{16}{5}, \frac{8}{5} \right) \right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \left| \left( \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right) \right| = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ u}^2$$

**Problema 19.8.4** (2,5 puntos) La variable aleatoria  $X$  sigue una distribución normal de media  $\mu = 8,5$  y desviación típica  $\sigma = 2,5$ . Se pide:

- (1,25 puntos) Calcular el valor  $a$  tal que  $P(X \leq a) = 0,05$ .
- (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.

**Solución:**

$$N(8,5;2,5)$$

a) La tabla de la normal empieza con 0,5:  $P(X \leq a) = 0,05 \implies 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 8,5}{2,5}\right) = 1 - 0,05 \implies P\left(Z \leq -\frac{a - 8,5}{2,5}\right) = 0,95 \implies -\frac{a - 8,5}{2,5} = 1,645 \implies a = 4,3875$

b)  $P(8 \leq X \leq 9,3) = P\left(\frac{8 - 8,5}{2,5} \leq Z \leq \frac{9,3 - 8,5}{2,5}\right) = P(-0,2 \leq Z \leq 0,32) = P(Z \leq 0,32) - P(Z \leq -0,2) = P(Z \leq 0,32) - (1 - P(Z \leq 0,2)) = 0,6255 - (1 - 0,5793) = 0,2048$