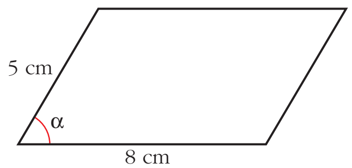
5 VECTORES EN EL ESPACIO

Página 133

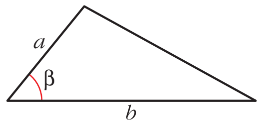
REFLEXIONA Y RESUELVE

Relaciones trigonométricas en el triángulo

■ **Halla el área de este paralelogramo en función del ángulo α:**

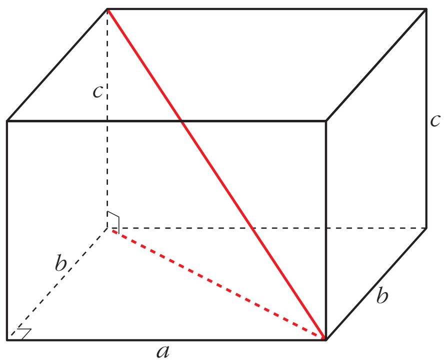


■ **Halla el área de este triángulo en función del ángulo β:**



Diagonal de un ortoedro

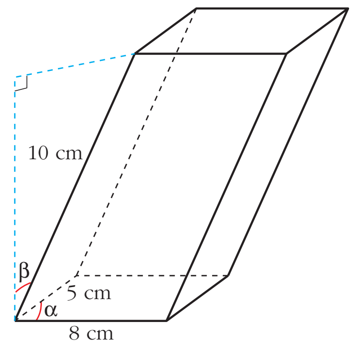
■ **Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son $c = 3$ cm, $b = 4$ cm y $a = 12$ cm.**



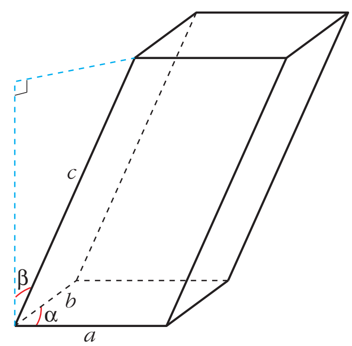
■ **Escribe la expresión general de la diagonal de un ortoedro de aristas a, b y c.**

Volumen de un paralelepípedo

- Halla el volumen de este paralelepípedo en función de α y de β:



- ¿Cuál será el volumen de un paralelepípedo de aristas $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, tal que las dos aristas de la base formen entre sí un ángulo α, y las aristas laterales formen un ángulo β con la perpendicular?



Página 135

1. La propiedad $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \vec{v}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \vec{v}$ relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.

a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?

b) Interpreta dicha propiedad para $\boldsymbol{a} = 3$, $\boldsymbol{b} = -2$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

2. La propiedad distributiva $(a+b)\cdot\vec{v} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{v}$ relaciona la suma de números con la suma de vectores.

a) De las dos sumas que aparecen, ¿cuál es de cada tipo?

b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = 5$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

Página 137

1. Si $\vec{u}(-3, 5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, -2)$, halla las coordenadas:

a) $2\vec{u}$ b) $0\vec{v}$ c) $-\vec{u}$ d) $2\vec{u}+\vec{v}$ e) $\vec{u}-\vec{v}$ f) $5\vec{u}-3\vec{v}$

2. Sean los vectores $\vec{x}(1, -5, 2)$, $\vec{y}(3, 4, -1)$, $\vec{z}(6, 3, -5)$, $\vec{w}(24, -26, -6)$. Halla a, b, c para que se cumpla:

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$$

Página 139

1. **Respecto de una base ortonormal, las coordenadas de tres vectores son $\vec{u}(3, -1, 5)$, $\vec{v}(4, 7, 11)$, $\vec{w}(-2, \boldsymbol{k}, 3)$.**

a) Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Halla $\boldsymbol{k}$ para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.

Página 141

1. **Dados los vectores $\vec{u}(5, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, 2, -2)$, calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. (Segmento y vector).

e) ¿Cuánto tiene que valer $\boldsymbol{x}$ para que el vector $(7, 2, \boldsymbol{x})$ sea perpendicular a $\vec{u}$?

2. **Obtén tres vectores perpendiculares a $\vec{v}$ que no sean paralelos entre sí:**

$$\vec{v}(3, 2, 7)$$

3. **Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados:**

$$\vec{u}(5, -1, 2) \qquad \vec{v}(-1, 2, -2)$$

Página 144

1. **Halla el producto vectorial de $\vec{u}(3, 7, -6)$ y $\vec{v}(4, 1, -2)$.**

2. **Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(3, 7, -6)$ y a $\vec{v}(4, 1, -2)$.**

3. Halla el área del triángulo determinado por los vectores:

$$\vec{u}(3,\ 7,\ -6) \quad y \quad \vec{v}(4,\ 1,\ -2)$$

Página 145

1. Halla el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{w}(0, 6, 1)$.

2. Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{z}(1, 14, x)$ sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).

Página 149

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Dependencia lineal

1 Dados los vectores $\vec{u}(3, 3, 2)$, $\vec{v}(5, -2, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 0)$:

a) Halla los vectores $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$.

b) Calcula $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tales que $\vec{u} = \boldsymbol{a}\vec{v} + \boldsymbol{b}\vec{w}$.

2 Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3, -1, 0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1, 2, -1)$ y $\vec{v}(2, -3, 5)$. ¿Son linealmente independientes $\vec{x}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

3 Comprueba que cualquiera de los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$, $\vec{c}(1, 0, 1)$ puede expresarse como C.L. de los otros dos.

s4 **Determina m y n para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:**

a) $\vec{u}(m, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 3, m)$, $\vec{w}(4, 6, -4)$

b) $\vec{u}(3, 2, 5)$, $\vec{v}(2, 4, 7)$, $\vec{w}(1, -1, n)$

s5 **¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?:**

$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$

$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$

s6 **¿Para qué valores de a el conjunto de vectores $S = \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)\}$ es una base?**

Producto escalar

7 En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1, 2, 2)$ y $\vec{b}(-4, 5, -3)$. Calcula:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

c) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

d) El vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

8 Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$ halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:

a) Paralelos.

b) Ortogonales.

9 Halla el vector proyección del vector $\vec{u}(3, 1, 2)$ sobre el vector $\vec{v}(1, -1, 2)$.

10 ¿Son $\vec{a}(1, 2, 3)$ y $\vec{b}(2, -2, 1)$ ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.

11 Calcula m para que el vector $\vec{a}(1, 3, m)$ sea ortogonal al vector $\vec{b}(1, -2, 3)$.

12 Comprueba que el vector $\vec{u}(1/2, 1/2, 0)$ no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$.

Producto vectorial

13 Dados $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, comprueba que los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos, y halla su módulo.

14 Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}(7, -1, 2)$ y $\vec{b}(1, 4, -2)$.

15 Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, 3, 1)$ y a $\vec{v}(-1, 3, 0)$ y que sea unitario.

16 Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1, -1, 0)$ y $\vec{v}(2, 0, 1)$ cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.

Producto mixto

17 Halla el producto mixto de los tres vectores que aparecen en cada caso:

a) $\vec{u}(1, -3, 2)$, $\vec{v}(1, 0, -1)$, $\vec{w}(2, 3, 0)$

b) $\vec{u}(3, 2, 1)$, $\vec{v}(1, -2, 0)$, $\vec{w}(-4, 1, 1)$

c) $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(3, 0, 2)$, $\vec{w}(-1, 4, -4)$

Calcula, en cada apartado, el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

s18 Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-2, 1, 0)$ y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Justifica por qué el resultado es $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$.

19 Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vectores siguientes:

$$\vec{a}(3, -1, 1), \quad \vec{b}(1, 7, 2), \quad \vec{c}(2, 1, -4)$$

s20 Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ y $\vec{w}(-4, 5, -1)$ sean coplanarios.

Página 150

PARA RESOLVER

s21 Prueba que los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$ son linealmente independientes cualesquiera que sean a, b y c.

22 Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, -1)$ y $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprueba que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.

23 a) Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}(3, -2, 1)$ y $\vec{v}(4, 3, -6)$ es un rectángulo.

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

24 Dado el vector $\vec{v}(-2, 2, -4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores:

a) Unitario y perpendicular a $\vec{v}$.

b) Paralelos a $\vec{v}$ y de módulo 6.

25 Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(2, 3, -1)$ y a $\vec{v}(1, 4, 2)$ cuya tercera componente sea 1.

s26 Dados los vectores $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{u}_3$ sea ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?

s27 Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ y $\vec{w}(1, -1, 1)$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.

s28 a) Obtén λ para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:

$\vec{u}_1 = (3, 2, 5)$, $\vec{u}_2 = (2, 4, 7)$, $\vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$

b) Para $\lambda = 3$, expresa el vector $\vec{v} = (7, 11, 14)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

s29 **a) Determina los valores de a para los que resultan linealmente dependientes los vectores $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ y $(a, a, -2)$.**

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

s30 **Dados los vectores $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(3, 1, -1)$, halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a $\vec{u}$, sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

s31 Dados los vectores $\vec{u}(a, 1+a, 2a)$, $\vec{v}(a, 1, a)$ y $\vec{w}(1, a, 1)$, se pide:

a) Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}(3, 3, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$.

c) Justifica razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

s32 a) Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto $S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$.

b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de S?

c) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S.

s33 Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$ y tal que determine con el vector $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u^2.

s34 Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}(2, -1, 1)$ y $\vec{b}(1, 0, 3)$ y ortogonal a $\vec{c}(2, 3, 0)$.

s35 Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$, con $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$.
Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

s36 De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$.
Halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.

s37 **Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ y $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.**

38 De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que cumplen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$, siendo $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, 3, -1)$. Halla el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

39 Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumplen las siguientes condiciones:

$$|\vec{u}| = 5, \quad |\vec{v}| = 4, \quad |\vec{w}| = 7, \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

☛ ***Desarrolla el siguiente producto escalar:***

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

Página 151

CUESTIONES TEÓRICAS

40 Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿podemos asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?

41 Prueba, utilizando el producto escalar, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$ entonces $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

42 Demuestra que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no nulos que tienen el mismo módulo, entonces $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son ortogonales.

43 a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?

b) Si dos vectores verifican $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$, ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

44 Justifica por qué el producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ es igual a 0 cualesquiera que sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

45 Dados los vectores $\vec{a}(1, -2, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 1)$, $\vec{c}(-2, 0, 1)$, comprueba que:

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

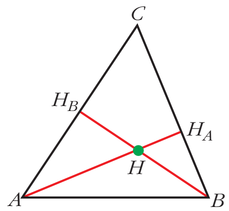
46 Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, ¿es $\vec{b} = \vec{c}$ necesariamente? Pon ejemplos.

s47 Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:

$$[\vec{a} + \vec{c},\ \vec{a} - \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}],\quad [\vec{a} + \vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a} + \vec{b}],\quad [\vec{a} - \vec{c},\ \vec{c} - \vec{b},\ \vec{b} - \vec{a}]$$

PARA PROFUNDIZAR

48 **“Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto”.**



Para demostarlo, llamamos *H* al punto en que se cortan dos alturas, AH_A y BH_B. Da los pasos que se indican a continuación:

a) Justifica que $\begin{cases} \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0 \\ \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0 \end{cases}$

b) De las igualdades anteriores se llega a:

$$\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$$

y de aquí se concluye que $\vec{HC} \perp AB$ y, por tanto, que las tres alturas se cortan en *H*. (Justifica las afirmaciones anteriores).

AUTOEVALUACIÓN

1. a) Halla el valor de m para el cual $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, 1, 2)$ y $\vec{w}(-1, m, 3)$ son linealmente dependientes.

b) Obtén, en este caso, una relación de dependencia entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

2. $\vec{u}(3, -2, \sqrt{3})$, $\vec{v}(4, -2, -4)$. Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ y el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

3. Dados los vectores $\vec{u}(3, -4, 0)$ y $\vec{v}(m, 0, 7)$:

a) Halla m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Halla un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

c) Obtén tres vectores unitarios. $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$, que tengan, respectivamente, la misma dirección que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

d) ¿Forman $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{w}'$ una base ortonormal?

4. Halla el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{u}(5, -1, 3)$ y $\vec{v}(4, 0, 7)$.

5. Halla el volumen del tetraedro determinado por los vectores:

$$\vec{u}(5, -1, 3), \quad \vec{v}(4, 0, 7), \quad \vec{w}(-2, 6, 3)$$

6. Halla un vector de módulo 10 que sea perpendicular a (3, –1, 0) y forme un ángulo de 60° con (0, 0, 1).