MATEMÁTICAS II

2º de Bachillerato

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

TEXTOS MAREA VERDE

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-606-9050-4

I.S.B.N. - 10: 84-606-9050-4

Matemáticas II.
2º Bachillerato.
Capítulo 1: Matrices

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

Resumen

En la historia del Álgebra podemos encontrar etapas muy diferentes: el álgebra de la antigüedad de babilónicos, egipcios, griegos,… el álgebra árabe o el álgebra de la edad moderna, en que continúa tratándose la resolución de ecuaciones. En el siglo XVIII y XIX tiene su auge el Álgebra Abstracta que trata de las estructuras algebraicas. Surgen las matrices y los determinantes, aunque se puede pensar que su origen es mucho más antiguo si se piensa en los cuadrados mágicos que se conocen desde el año 650 a.C.

El cálculo matricial tiene importantes aplicaciones, como para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que estudiaremos este curso. Otras aplicaciones se encuentran al trabajar en Física Cuántica o en Teoría de Grafos, y se utilizan en computación por la simplicidad de su manipulación.

Las transformaciones geométricas, giros, simetrías…, se representan mediante matrices. Los vectores son un caso particular de matriz. La información se organiza usando matrices.

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

1. CONCEPTO DE MATRIZ

Actividad de introducción

En el IES "Virgen de Covadonga" de El Entrego se está desarrollando una actividad solidaria de recogida de juguetes. Se han repartido las tareas por cursos, de modo que los alumnos y alumnas de 1º de ESO recogen juguetes tradicionales, los de 2º de ESO juegos de mesa y los de 3º de ESO juegos electrónicos. Durante la primera semana se recogieron 35 juguetes en 1º de ESO, 24 en 2º y 33 en 3º; la segunda semana los estudiantes trajeron 28 juguetes en primero, 18 en segundo y 37 en tercero. Los profesores encargados, satisfechos por el resultado de la actividad, decidieron recompensar a los niños y niñas ofreciéndoles 4 caramelos por cada juguete tradicional, 2 morenitos por cada juego de mesa y un pincho por cada juego electrónico. Cuando se enteran el resto de grupos del instituto (4º de ESO, 1º y 2º de Bachiller), deciden participar, y la semana siguiente traen 18 juguetes tradicionales, 25 juegos de mesa y 16 electrónicos. El Equipo Directivo, muy orgulloso de la implicación de todos los estudiantes, decide duplicar los premios.

- ¿Cuántos juguetes de cada tipo se recogieron?
- ¿Cuántos pinchos, caramelos y morenitos deben comprar como premio?
- Si los caramelos cuestan un céntimo, los morenitos 5 céntimos y los pinchos 75 céntimos, ¿cuánto les costará a los profesores recompensar a sus alumnos?

Sugerencia: Organiza la información en forma de tablas.

Colecta	Juguetes tradicionales	Juegos de mesa	Juegos electrónicos
1ª semana			
2ª semana			
3ª semana			

Premios	Juguetes tradicionales	Juegos de mesa	Juegos electrónicos
Caramelos			
Morenitos			
Pinchos			

	Precio por unidad	Coste total
Caramelos		
Morenitos		
Pinchos		

Analiza:

- ¿Habrías sabido resolver el problema sin usar las tablas?
- ¿Te ha parecido más fácil con la información ordenada?
- ¿Conoces alguna situación de la vida cotidiana similar al problema planteado?
- Busca otros ejemplos donde la información tabulada es fundamental para entender mejor qué está ocurriendo.

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

1.1. Definición

Las matrices son una de las herramientas más usadas dentro del Álgebra Lineal y están asociadas a un conjunto de datos numéricos ordenados. Encontramos las matrices en muchas ciencias: Sociología, Economía, Demografía, Física, Biología, etc.

La idea intuitiva de matriz es muy sencilla, pudiéndose definir una matriz como un **tabla de números ordenados**, números que pueden provenir de experimentos, encuestas, análisis económicos, etc.

Por tanto:

Se llama **matriz** de orden $m \times n$ a un conjunto de números reales dispuestos en m **filas** y en n **columnas**, de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las matrices se representan por letras mayúsculas A, B, C,… Los elementos de la matriz (los números) se representan en general por $\boldsymbol{a_{ij}}$, donde los subíndices (i, j) nos dan la posición que ocupa el término:

$$\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \to fila \\ j = 1, 2, \dots, n \to columna \end{cases}$$

Así, el término a_{13} es el elemento que está en la primera fila y en la tercera columna.

1.2. Dimensión de una matriz

El número de filas (m) y el número de columnas (n) nos da la **dimensión de la matriz** $m \times n$.

Ejemplo:

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión 2×3.

1.3. Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los términos que ocupan la misma posición son iguales:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \qquad A = B \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11};\ a_{21} = b_{21} \\ a_{12} = b_{12};\ a_{22} = b_{22} \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \\ a_{13} = b_{13};\ a_{23} = b_{23} \end{cases}$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 4 \\ 1 & y & -9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & b & 4 \\ x & 5 & z \end{pmatrix}$, para que $A = B$ debe cumplirse que:

$$a = 3 \quad , \quad b = -1 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad y = 5 \quad \text{y} \quad z = -9.$$

Actividades resueltas

- *Indica la* dimensión *de las siguientes matrices:*

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -9 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz A es de dimensión 2×3 porque tiene dos filas y tres columnas.

La matriz B es de dimensión 1×4 porque tiene una fila y cuatro columnas.

La matriz C es de dimensión 3×1 porque tiene tres filas y una columna.

La matriz D es de dimensión 3×3 porque tiene tres filas y tres columnas.

- *Determina los valores de a, b y c para que las matrices A y B sean iguales*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & a & -6 & b \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} x & 2 & y & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Para que dos matrices sean iguales deben tener la misma dimensión, requisito que cumplen A y B. Además, han de ser iguales los términos que ocupan la misma posición. Por tanto debe ser $x = 3$, $a = 2$, $y = -6$, $b = 0$.

Actividades propuestas

1. Utiliza matrices para representar la información siguiente: Un agricultor cultiva lechugas, naranjas y melones. Durante el año 2014 ha recogido mil lechugas, 2000 kilos de naranjas y 500 melones. En los años anteriores su producción ha sido de 500, 1000 y 400 respectivamente. Por cada lechuga recibe un céntimo, por cada kilo de naranjas 3 céntimos y por cada melón 5 céntimos. Escribe la matriz de sus ganancias del año 2014.

2. Analiza los siguientes elementos de tu entorno y determina si son matrices o no:

a. Un calendario.

b. La clasificación de la Liga de fútbol (o cualquier otro deporte).

c. El disco duro de un ordenador.

d. Un armario donde se guarda una colección de copas.

e. Los lineales de un supermercado.

f. Una pantalla de televisión.

g. El boleto de la Lotería Primitiva, de la Quiniela y del Euromillón.

h. Los buzones de una vivienda.

i. Los pupitres de una clase.

3. Propón otros elementos de tu entorno que sea matrices o puedan representarse mediante matrices.

2. TIPOS DE MATRICES

Si el número de filas es distinto del número de columnas $(m \neq n)$ la matriz se llama **rectangular**. Dentro de las matrices rectangulares tenemos los siguientes tipos:

- **Matriz fila**: Es aquella que sólo tiene una fila.

  Ejemplo:

  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz fila.

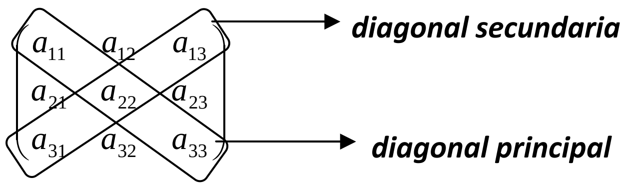
- **Matriz columna**: Es la que sólo tiene una columna.

  Ejemplo:

  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una matriz columna.

Si el número de filas es igual al número de columnas ($m = n$) se habla de una **matriz cuadrada.**

Dentro de las matrices cuadradas es importante destacar que los elementos a_{ij} en que los dos subíndices son iguales forman la ***diagonal principal***, y los elementos en que $i + j = n + 1$ (donde n es el orden de la matriz) forman la ***diagonal secundaria.***



En el conjunto M_n de las matrices cuadradas de orden n, cabe destacar los siguientes tipos de matrices:

- **Matriz triangular**: Es aquella matriz en la que los elementos situados por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.

  Ejemplos:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

  Matriz Triangular. Inferior *Matriz. Triangular. Superior*

- **Matriz Diagonal**: Es aquella matriz en la que los elementos que no están en la diagonal principal son nulos: $a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$

  Ejemplos:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

- **Matriz Escalar**: Es aquella matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son todos iguales.

  Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Unidad (Identidad)**: Es la matriz escalar en la que los elementos no nulos son iguales a 1. Se representa por $\boldsymbol{I}$.

  Ejemplo:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  En ocasiones se añade un subíndice que indica la dimensión de la matriz.

- **Matriz Nula**: Es aquella en la que todos sus elementos son cero.

  Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Matriz nula de tamaño 3.

Actividad resuelta

Clasifica las matrices siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; La matriz A es rectangular de dimensión 2×3.

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; La matriz B es una matriz cuadrada de dimensión 3×3 o simplemente 3.

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; La C es cuadrada de dimensión 4.

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Es una matriz cuadrada 3×3, es la matriz nula de dicha dimensión

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ La matriz E es una matriz fila de dimensión 1×4.

3. OPERACIONES CON MATRICES

Actividad de introducción

La siguiente tabla muestra los resultados de la Liga de fútbol española 2014/2015 cuando cada equipo juega como local y como visitante:

	En casa				Fuera				Total			
Equipo	PJ	G	E	P	PJ	G	E	P	PJ	G	E	P
F.C. Barcelona	19	16	1	2	19	14	3	2				
Real Madrid	19	16	2	1	19	14	0	5				
Atlético C. Madrid	19	14	3	2	19	9	6	4				
Valencia C.F.	19	15	3	1	19	7	8	4				
Sevilla C.F.	19	13	5	1	19	10	2	7				
Villarreal C.F.	19	12	1	6	19	4	11	4				
Athletic C. Bilbao	19	8	6	5	19	7	4	8				
R.C. Celta de Vigo	19	8	5	6	19	5	7	7				
C.D. Málaga	19	8	6	5	19	6	2	11				
R.C.D. Espanyol	19	8	6	5	19	5	4	10				
Rayo Vallecano	19	8	2	9	19	7	2	10				
R. Sociedad	19	9	5	5	19	2	8	9				
Elche C.F.	19	6	3	10	19	5	5	9				
Levante C.F.	19	6	6	7	19	3	4	12				
Getafe C.F.	19	6	5	8	19	4	2	13				
R.C. Deportivo	19	5	6	8	19	2	8	9				
Granada C.F.	19	4	10	5	19	3	4	12				
S.D. Eibar	19	5	3	11	19	4	5	10				
U.D. Almería	19	3	7	9	19	5	1	13				
Córdoba C.F.	19	1	6	12	19	2	5	12				

- Completa la tabla de la derecha, fijándote principalmente en:
  - Qué deberías haber hecho en caso de que los equipos hubieran estado ordenados de diferente forma en ambas tablas.
  - Cómo eliges trabajar con los números y por qué.
  - Qué dimensiones tienen las tablas con los datos “En casa”/”Fuera” y la que obtienes.
  - Cómo habrías resuelto el problema inverso: dados los resultados totales y los obtenidos “En casa”, determinar los resultados de los equipos cuando jugaron como “Visitantes”.
- El sistema de puntuación de la Liga da 0 puntos por jugar un partido, 3 puntos por victoria, 1 punto por empate y 0 puntos por derrota.
  - Escribe una matriz que represente estos datos sobre la puntuación
  - Utiliza dicha información para determinar los puntos logrados por cada equipo cuando juega como local, como visitante y en total.
  - Observa las dimensiones de las tablas de partida y de la matriz de puntuación, e intenta relacionarlas con las tablas de “Puntos” que acabas de obtener.

3.1. Suma

Dadas dos matrices A y B de dimensión $m \times n$, se define la suma de matrices $(A+B)$ como aquella matriz cuyos elementos son la suma de los elementos que ocupan la misma posición:

$$C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

La suma de matrices es una consecuencia de la suma de números reales, por lo que las propiedades de la suma de matrices serán las mismas que las de la suma de números reales:

- Propiedad Asociativa.
- Elemento neutro (la matriz nula).
- Elemento opuesto $(-A)$: $A + (-A) = 0$
- Propiedad Conmutativa: $A + B = B + A$

3.2. Producto de un número (escalar) por una matriz

El producto de un número real k por una matriz $A = (a_{ij})$ es otra matriz de la misma dimensión cuyos elementos son los productos de los elementos de la matriz A por el número k:

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

- *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$*, el producto de la matriz A por 5 es:* $5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ -5 & 15 & 10 \\ 0 & -10 & 5 \end{pmatrix}$

El producto de un número por una matriz tiene las siguientes propiedades:

- Propiedad Distributiva respecto de la suma de matrices. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- Propiedad Distributiva respecto de la suma de números: $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$
- Propiedad Asociativa mixta: $k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$
- $1 \cdot A = A$

El conjunto de matrices M_{mxn} respecto de las operaciones suma de matrices y producto por un número real $(M_{mxn}, +, \cdot k)$ tiene estructura de **espacio vectorial**.

3.3. Producto de matrices

El producto de matrices no es una operación tan sencilla como la suma de matrices o el producto de una matriz por un número real, que no necesitan de grandes condiciones. Para poder multiplicar dos matrices, sus dimensiones deben cumplir unas condiciones.

Sean las matrices A y B de dimensiones $m \times n$ y $n \times p$ (es decir, el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B). Se define el producto $A{\cdot}B$, y en ese orden, como una matriz C de dimensiones $m \times p$ cuyos elementos son de la forma:

$$\left.\begin{matrix} A = (a_{ij}) \\ B = (bij) \end{matrix}\right\} \to C = A{\cdot}B = (a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \Big| c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Es decir, el elemento c_{11} se obtiene multiplicando escalarmente los elementos de la primera fila de la matriz A por los elementos de la primera columna de la matriz B, y así sucesivamente.

Ejemplo:

Veamos un producto de matrices desarrollado paso a paso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \to A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4 & 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 1 \\ 4\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot 4 & 4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 47 & 20 \end{pmatrix}$$

Dimensión $\quad 2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad\qquad 2 \times 2$

El número de columnas de A es igual al número de filas de B, por lo tanto se pueden multiplicar en ese orden. La matriz producto tiene tantas filas como A y tantas columnas como B.

Que el producto $A{\cdot}B$ esté definido no implica que lo esté el producto $B{\cdot}A$.

Ejemplo:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{cases} A \cdot B & \text{definido} \\ B \cdot A & \text{no definido} \end{cases}$

Para que estén definidos ambos productos tiene que cumplirse que si la dimensión de la matriz A es $m \times n$, la dimensión de la matriz B debe ser $n \times m$, siendo las dimensiones de las matrices producto:

$$\begin{cases} A \cdot B \to m \times m \\ B \cdot A \to n \times n \end{cases}$$

De aquí se concluye que el producto de matrices ***NO TIENE LA PROPIEDAD CONMUTATIVA***.

Si las matrices son cuadradas de orden n, el producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

- Propiedad Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Elemento neutro (I): $A \cdot I = I \cdot A = A$
- Propiedad distributiva respecto de la suma de matrices: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

3.4. Matriz inversa

Entre las propiedades de las matrices no se ha nombrado la existencia del elemento simétrico o elemento inverso, ya que no existe dicha propiedad. Sin embargo, hay matrices cuadradas para las cuales existe otra matriz que multiplicada por ellas nos da la matriz unidad (elemento neutro).

Definición

Si dada una matriz cuadrada A existe otra matriz B, también cuadrada, que multiplicada por la matriz A nos da la matriz unidad, se dice que la matriz A es una **matriz regular o inversible** y a la matriz B se le llama **matriz inversa** de A y se representa por A^{-1}:

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$$

Si una matriz cuadrada no tiene matriz inversa, se dice que la matriz es **singular**.

La matriz inversa verifica las siguientes propiedades:

- La inversa de la matriz inversa es la matriz original.

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

- La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas de las matrices cambiando su orden.

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

- La inversa de la traspuesta de una matriz es igual a la traspuesta de la matriz inversa.

$$\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$$

Para hallar una matriz inversa dispondremos de varios métodos distintos. En este tema veremos dos:

- Resolver un sistema de ecuaciones
- El método de Gauss – Jordan

Actividades resueltas

Sea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. *Halla la matriz inversa* A^{-1} *mediante un sistema de ecuaciones.*

Planteamos la matriz $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ y hallamos el producto:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ 2a & 2b\end{pmatrix}$$

Debe verificarse que $A{\cdot}A^{-1}=I$, por tanto:

$$A\cdot A^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}c & d\\ 2a & 2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c=1 & d=0\\ 2a=0 & 2b=1\end{cases}$$

Resolviendo para a, b, c y d:

$$\begin{cases}a=0 & b=1/2\\ c=1 & d=0\end{cases}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

- *Sea* $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, *halla la matriz inversa* A^{-1} *mediante un sistema de ecuaciones.*

De nuevo, planteamos la matriz $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ y hallamos el producto:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}$$

Debe verificarse que $A{\cdot}A^{-1}=I$, por tanto:

$$A\cdot A^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2c=1 & b+2d=0\\ 3a+4c=0 & 3b+4d=1\end{cases}$$

Resolviendo para *a*, *b*, *c* y *d*:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}a+2c=1\\ 3a+4c=0\end{cases}\xrightarrow[F_2-2F_4]{}\begin{cases}a+2c=1\\ a=-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c=3/2\\ a=-2\end{cases}\\[2em] \begin{cases}b+2d=0\\ 3b+4d=1\end{cases}\xrightarrow[F_2-2F_4]{}\begin{cases}b+2d=0\\ b=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}d=-1/2\\ b=1\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

Como hemos visto, este método resulta laborioso (y sólo lo hemos utilizado con matrices de orden 2). Es simple imaginar que se complica enormemente si hay muchos términos no nulos y cuanto mayor es la dimensión de la matriz.

Además, debemos tener en cuenta que no siempre existe matriz inversa, por lo que podríamos haber estado trabajando en balde.

Ejemplo:

- Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, halla la matriz inversa A^{-1} mediante un sistema de ecuaciones.

De nuevo, planteamos la matriz $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ y hallamos el producto:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+6c & 3b+6d\end{pmatrix}$$

Debe verificarse que $A{\cdot}A^{-1}=I$, por tanto:

$$A\cdot A^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+6c & 3b+6d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2c=1 & b+2d=0\\ 3a+6c=0 & 3b+6d=1\end{cases}$$

Vemos que cualquiera de los dos pares de ecuaciones no tiene solución:

$$\begin{cases}a+2c=1\xrightarrow{\times 3} & 3a+6c=3\\ 3a+6c=0 & 3a+6c=0\end{cases}$$

Que claramente no puede tener solución.

Por tanto, la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ no tiene matriz inversa.

3.4.2. Método de Gauss – Jordan

El método de Gauss-Jordan para hallar la matriz inversa consiste en convertir la matriz inicial en la matriz identidad, utilizando **transformaciones elementales**.

Llamamos ***transformaciones elementales por filas*** a:

- Permutar dos filas i y j. Lo escribimos como $F_i \leftrightarrow F_j$
- Sustituir la fila i por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número $a \neq 0$. Lo escribimos como $F_i = a \cdot F_i$
- Sustituir la fila i por un múltiplo (no nulo) de ella más otra fila j multiplicada por un número b. Lo escribimos como $F_i = a \cdot F_i + b \cdot F_j$, con $a \neq 0$.

Ampliamos la matriz original, escribiendo junto a ella la matriz identidad, y aplicamos las transformaciones elementales de modo que la matriz inicial se transforme en la matriz identidad.

Actividades resueltas

- *Calcula con el método de Gauss–Jordan la inversa de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Escribimos la matriz identidad junto a la matriz A:

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Y vamos realizando transformaciones elementales a la izquierda, buscando convertirla en la matriz identidad:

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to \frac{1}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comparando este método con el anterior, podemos ver que es mucho más simple y rápido.

- *Halla la matriz inversa* A^{-1} *de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *con el método de Gauss–Jordan.*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = -\frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Por tanto, tenemos que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Halla la matriz inversa de

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Escribimos la matriz identidad junto a la matriz A y operamos como se explicó antes:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3=F_3+4F_1]{F_2=F_2+F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 9 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3=F_3-5F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -16 & -1 & -5 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3=-\frac{1}{16}F_3]{F_1=-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2=F_2-5F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -9/16 & 5/16\\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=F_1-3F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -3/16 & 1/16 & 3/16\\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -9/16 & 5/16\\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16\end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa queda:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/16 & 1/16 & 3/16\\ 11/16 & -9/16 & 5/16\\ 1/16 & 5/16 & -1/16\end{pmatrix}$$

3.5. Matriz traspuesta

Dada una matriz A de dimensiones $m\times n$, se llama **matriz traspuesta** de A y se representa por A^t, *a la matriz que se obtiene al cambiar las filas de* A *por sus columnas, por lo que la matriz* A^t *será de dimensión* $n\times m$ *.*

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\to A^t=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada se dice que es **simétrica** cuando coincide con su traspuesta: $A=A^t$.

Para que una matriz sea simétrica, los elementos simétricos respecto de la diagonal principal deben ser iguales.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}\to A^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

Si una matriz cuadrada es igual a la opuesta de su traspuesta, $A = -A^t$, se dice que es **antisimétrica**.

Para que una matriz sea antisimétrica debe cumplirse que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal sean opuestos, y los elementos de la diagonal principal nulos.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Con las matrices traspuestas se cumplen las siguientes propiedades:

- La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las matrices traspuesta:

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

- La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto en orden inverso de las matrices traspuestas:

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Actividad resuelta

- *Para las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *y* $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, *realiza el producto* $D^t \cdot A^t$.

Solución

El primer paso consiste en trasponer las matrices:

$$D^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$D^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Y podemos comprobar la propiedad anterior:

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$(A \cdot D)^t = \begin{pmatrix} 7 & -1 \end{pmatrix} = D^t \cdot A^t$$

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

3.6. Rango de una matriz

Se llama **rango** de una matriz al número de filas o columnas de la matriz que son **linealmente independientes**, es decir, que no pueden obtenerse a partir de las demás filas o columnas de la misma matriz.

Actividad resuelta

- Determina el rango de las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -4\\ -1 & 1 & -7\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 4\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

La tercera fila de A se obtuvo sumando las dos primeras filas. Estas dos primeras filas son independientes, por lo que el rango de A es 2.

La tercera fila de B se obtuvo restando la segunda fila al doble de la primera. El rango de B es 2.

Para hallar el rango de una matriz se pueden usar las **transformaciones elementales** para intentar hacer el máximo número posible de ceros, intentando **triangular** la matriz (**método de Gauss**); sin embargo, será más fácil hallar el rango usando determinantes, como veremos en el capítulo siguiente.

Actividad resuelta

- *Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro a:*

$$A=\begin{pmatrix}a-2 & a+2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Solución

El rango de esta matriz será como máximo 2 pues es una matriz de dimensión 2 x 2. Vamos realizando transformaciones elementales hasta convertirla en una matriz triangular.

Intercambiamos filas para tener un 1 en la posición a_{11}.

$$A=\begin{pmatrix}a-2 & a+2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 2\\ a-2 & a+2\end{pmatrix}$$

Ahora tratamos de conseguir ceros, para lo que a la segunda fila le restamos la primera fila multiplicada por (a – 2):

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ a-2 & a+2\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2-(a-2)F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2\\ (a-2)-1\cdot(a-2) & (a+2)-2\cdot(a-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -a+6\end{pmatrix}$$

Vemos que si ($-a + 6 = 0$) la segunda fila es nula, por lo que su rango sería 1. Por tanto:

$$-a+6=0 \Rightarrow a=6$$

De aquí:

$$\begin{cases} a=6 & \Rightarrow \quad \text{rg}(A)=1\\ a\neq 6 & \Rightarrow \quad \text{rg}(A)=2\end{cases}$$

En un país A, existen tres aeropuertos internacionales (A_1, A_2 y A_3); en otro país B existen cuatro (B_1, B_2, B_3 y B_4); y en un tercer país C existen dos (C_1 y C_2). Desde el aeropuerto A_1 salen vuelos con destino a B_1, B_2, C_1 y dos vuelos con destino a B_3. Desde el aeropuerto A_2 salen vuelos con destino a B_2, B_3 y dos vuelos con destino a B_4. Desde el aeropuerto A_3 sólo sale un vuelo con destino a B_3. Desde cada aeropuerto del país B, salen dos vuelos a cada uno de los aeropuertos del país C.

Se pide, expresar mediante matrices:

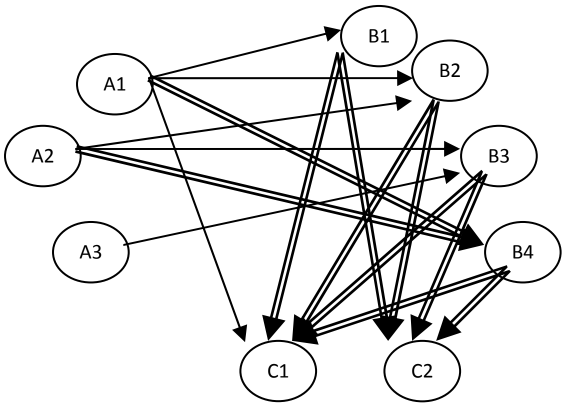
a) Los vuelos del país A al B.

b) Los vuelos del país B al C.

c) Los vuelos del país A al C, necesiten o no efectuar trasbordo en el país B.

Solución

El esquema de los vuelos es:



a) Representamos los vuelos desde *A* (filas) hasta *B* (columnas)

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Representamos los vuelos desde *B* (filas) hasta *C* (columnas)

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Representamos los vuelos directos desde *A* (filas) hasta *C* (columnas):

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los vuelos desde A hasta C con o sin trasbordo serán:

$$X_1 \cdot X_2 + X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Actividades propuestas

4. Escribe tres matrices fila.

5. Escribe tres matrices columna.

6. Escribe tres matrices cuadradas de dimensión 2, 3 y 4 respectivamente.

7. Escribe la matriz unidad de dimensión 2, 3 y 4.

8. Escribe la matriz nula de dimensión 2, 3 y 4.

9. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A + 3B$

b) $2A + B - 5C$

10. Para las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula $A\cdot B$ y $B\cdot A$. ¿Es el producto conmutativo?

11. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula $3\cdot A^t - B^2$.

12. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

13. Resuelve la ecuación matricial $M\cdot X + N = P$ siendo:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

14. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

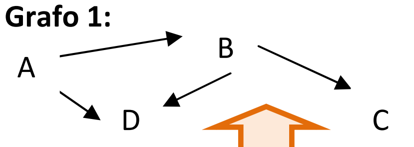
CURIOSIDADES. REVISTA

Con un **grafo** se representan las relaciones entre objetos.

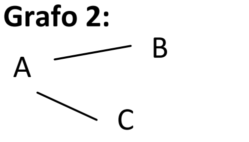
Un grafo está formado por nodos que se relacionan con aristas.

Grafos y matrices

Grafo 1:



Grafo 2:



Hay grafos dirigidos, como el grafo 1, y grafos no dirigidos, como el grafo 2.

A cada grafo se le asocia una matriz

¡única!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los vértices A, B, C y D son las filas de la matriz. Si A está relacionado con B ponemos un 1 en la fila 1, columna 2.

La matriz de un grafo no dirigido es simétrica.

Imagina que esos grafos están indicando personas que están conectadas por WhatsApp.

En el grafo 1, A está conectada con B y D. B con C y D.
En el grafo 2, A está con B y C. B con A, y C con A.

Se pueden utilizar grafos para representar los caminos que unen unas casas, o unos pueblos, o los vuelos (u otro tipo de conexión) que unen las ciudades. En psicología se utilizan por ejemplo para visualizar las relaciones de dominio entre individuos.

Vamos a multiplicar estas matrices por sí mismas e interpretar el resultado

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A podría conectar con C y D (pidiendo a B que reenviara el WhatsApp).

Ahora un WhatsApp de A podría llegar a esa misma persona A por dos caminos distintos (a través de B y de C), pero sólo sus propios WhatsApp.

A la persona B, con 2 WhatsApp, le llegarían los suyos y los de C.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

RESUMEN

		Ejemplos
Definición de matriz	Tabla de números ordenados	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$
Dimensión de una matriz	El número de filas (m) y el número de columnas (n)	La dimensión de la matriz anterior es 2 × 3.
Igualdad de matrices	Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los términos que ocupan la misma posición son iguales	$A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \;\; \forall\, i,j$
Tipos de matrices	Matriz fila: $\begin{pmatrix} 31 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ Matriz columna: $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ Matriz triangular de dimensión 2 × 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Matriz diagonal: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz escalar: $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz unidad: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Suma de matrices	Se suman los elementos que ocupan la misma posición: $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
Producto de un real por una matriz	Es otra matriz de elementos los de la matriz multiplicados por el número: $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$	$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$
Producto de matrices	$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij}) \\ B = (bij) \end{array}\right\} \rightarrow C = A \cdot B = (a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \Big\vert\, c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$
Matriz inversa	$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/13 & 3/13 \\ 5/13 & -2/13 \end{pmatrix}$
Matriz traspuesta	Se obtiene cambiando filas por columnas.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
Rango de una matriz	Número de filas o columnas de la matriz que son **linealmente independientes**, es decir, que no pueden obtenerse a partir de las demás filas o columnas de la misma matriz.	El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ es 1.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A + B$ b) $A - B - C$ c) $3\cdot A + 5\cdot B - 6\cdot C$

2. - Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula $A\cdot B$ y $B\cdot A$. ¿Es el producto conmutativo?

3. - Calcula los productos posibles entre las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula $3\cdot A^t - B^2$.

5.- Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

realiza las siguientes operaciones si es posible:

a) $A + B$ b) $3\cdot A - 4\cdot B$ c) $A\cdot B$ d) $A\cdot D$ e) $B\cdot C$ f) $C\cdot D$ g) $A^t\cdot C$

6. - ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas puedan existir $A\cdot B$ y $B\cdot A$?

7. - a) Calcula A^{50} y A^{97} para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Encuentra los valores de a y b para que la matriz A conmute con la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

8. - Calcula A^n, para $n \in \mathbb{N}$, siendo A las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.- Se dice que dos matrices A y B conmutan si $A \cdot B = B \cdot A$. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

halla las matrices B que conmuten con A.

10. - Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten con las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. - Sean las matrices

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix} \quad , \quad D = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$$

Calcula cada uno de los productos $A \cdot B$, $D \cdot E$, $E \cdot B$, $C \cdot E$.

12.- Sean

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$$

dos matrices de orden 2×3, en las que x, y, z denotan valores numéricos desconocidos.

a) Determina, razonadamente, los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ de manera que $A = B$.

b) ¿Es posible el cálculo de $A \cdot B$? Razona la respuesta.

13.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula, si existen, las siguientes matrices:

a) Una matriz X, tal que

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Una matriz Y tal que

$$A \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14. - Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula $(A \cdot B)^t$ y $(A \cdot B)^{-1}$.

16.- Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz inversa de A
b) Comprueba que $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$
c) Halla una matriz X tal que $A\cdot X = B$, siendo

$$B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

17.- Calcula la matriz inversa de

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

18. - Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

obtén, si procede, $(B\cdot A)^{-1}$.

19.- Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de $A\cdot B$
b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.

20. - Sea

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

comprueba que $A^t = A^{-1}$ y calcula $\left(A\cdot A^t\right)^{2003}$.

21.- Sean las matrices:

$$C=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Halla C^{-1} y D^{-1}

b) Calcula la matriz inversa de $C\cdot D$

c) Comprueba que $(C\cdot D)^{-1} = D^{-1}\cdot C^{-1}$.

22.- Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

23. - Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$

b) Determina la matriz X para que $X \cdot A = A + I$

24. - Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación $X \cdot A \cdot B - X \cdot C = 2 \cdot C$

25. - Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. - Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

27.- Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -1 \\ 9 & -18 & 1 \\ 14 & 9 & -14 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 17 \\ 14 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

28. - Obtener las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales.

a) $\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

30. - Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

31. - En una academia de idiomas se imparten inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos reducidos y grupos normales. La matriz $A = \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$ expresa el número de personas, según el tipo de grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente. Las columnas de la matriz $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}75 \\ 0{,}8 & 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ reflejan el tanto por uno de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

b) Sabiendo que la academia cobra 30 euros por persona en grupos reducidos y 20 euros por persona en grupo normal, hallar la cantidad que obtiene la academia en cada uno de los idiomas.

32. - Tres escritores presentan a un editor, al acabar la enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla adjunta:

	Horas de trabajo	**Conferencias dadas**	**Viajes**
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor *C*	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 75 euros, la conferencia a 300 euros y el viaje a 250 euros. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30 %, el 20 % y el 10 % de lo que correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

33. - Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, *A* y *B*, en tres terminaciones: *N*, *L* y *S*. Produce del modelo *A*: 400 unidades en la terminación *N*, 200 unidades en la terminación *L* y 50 unidades en la terminación *S*. Produce del modelo *B*: 300 unidades en la terminación *N*, 100 en la *L* y 30 en la *S*. La terminación *N* lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación *L* lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación *S* lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

a) Representa la información en dos matrices.

b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

34. - Sean A y B dos matrices de igual orden, y λ un número. Se sabe que $\lambda\cdot(A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$. Justifica el resultado.

35. - Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, analiza si, entonces, también lo es su producto $A\cdot B$.

Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme.

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

36. - Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, siendo r y s dos números reales tales que $r \cdot s \neq 1$.

Calcula M^2, M^3, M^4 y M^{2k} para $k \in \mathbb{N}$.

37. - Sea el conjunto de matrices definido por:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R \right\}$$

a) Comprueba que $A, B \in \mathbb{M}$, también $A + B \in \mathbb{M}$ y $A \cdot B \in \mathbb{M}$

b) Encuentra todas las matrices $C \in \mathbb{M}$, tales que $C^2 = C$.

38. - Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A \cdot A^t = I$ donde A^t es la matriz traspuesta de A e I es la matriz identidad. Si A y B son dos matrices ortogonales de igual tamaño, analiza si $A \cdot B$ es una matriz ortogonal.

39. - Considera las matrices A, B y C definidas como:

$$A_{3\times 3} = (a_{ij} = i + j),\ \forall i, j = 1,2,3$$

$$B_{2\times 3} = (b_{ij} = i - j),\ \forall i = 1,2;\ j = 1,2,3$$

$$C_{3\times 2} = (c_{ij} = 2i + j),\ \forall i = 1,2,3;,\ j = 1,2$$

a) Construye las tres matrices.

b) Halla las traspuestas A^t, B^t y C^t y determina cuál (o cuáles) de las matrices es simétrica.

c) Analiza cuáles de los productos $A \cdot A$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot A$, $B \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot A$, $C \cdot B$ o $C \cdot C$ pueden realizarse.

d) Determina el rango de las tres matrices A, B y C.

40. - Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

En la que se verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Calcula M^2.

b) Calcula $P = M^2 + I$.

c) Comprueba que $P^2 = P$.

d) Comprueba que $P \times M = M \times P = O$.

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.- La dimensión de la matriz A es:

a) 3 b) 2 c) 2 x 3 d) 3 x 2

2.- La matriz A es:

a) una matriz fila b) cuadrada c) traspuesta d) rectangular

3.- La suma de las matrices A y B es:

$a) A+B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ $b) A+B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$ $c) A+B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ $d) A+B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}$

4.- El producto $3A$ es:

$a)\ 3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ $b) 3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -9 \end{pmatrix}$ $c)\ 3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -21 \end{pmatrix}$ $d)\ 3A+B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{pmatrix}$

5.- Indica qué afirmación es cierta

a) Las matrices A y B se pueden multiplicar

b) Las matrices A y B no se pueden multiplicar

c) Ambas tienen matriz inversa

d) Sus matrices traspuestas son iguales

Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

6.- La matriz identidad es la matriz: a) C; b) D; c) E; d) F.

7.- El producto de las matrices E y F es:

$a) EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$ $b) EF = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 0 & 12 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$ $c) EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 13 & 8 \\ 2 & 13 & 9 \end{pmatrix}$ $d) EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 4 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$

8.- La matriz inversa de la matriz F es:

$a) F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b) F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $c) F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $d) F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9.- La matriz traspuesta de la matriz F es:

$a) F^t = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b) F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $c) F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $d) F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

10.- El rango de la matriz C es: a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

Apéndice: Problemas de matrices en las P.A.A.U.

(1) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

a) Comprueba que verifica $A^3 - I = O$, con I la matriz identidad y O la nula.

b) Calcula A^{13}

c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2 \cdot X + I = A$

(2) a) Define rango de una matriz.

b) Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3. ¿Cómo varía el rango si quitamos una columna? Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante valdrá dos?

(3) Sea A una matriz ($m \times n$)

a) ¿Existe una matriz B tal que $B \cdot A$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

c) Busca una matriz B tal que $B \cdot A = (\,0 \;\; 0\,)$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

(4) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y el vector $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente:

a) El vector X tal que $A \cdot X = 0 \cdot X$.

b) Todos los vectores X tales que $A \cdot X = 3 \cdot X$.

c) Todos los vectores X tales que $A \cdot X = 2 \cdot X$.

(5) Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$$

Se pide calcular, explicando todos los pasos necesarios:

a) Las matrices A^2 y A^3.

b) Los números reales a y b para los cuales se verifica $(I + A)^2 = a \cdot I + b \cdot A$.

(6) Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}a & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2, se pide:

a) Calcula el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

b) Calcula B en el caso $a = 1$.

(7) Una matriz 2×2 se dice que es triangular si el primer elemento de su segunda fila es 0. Encuentra todas las matrices triangulares B tales que $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 27 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

(8) Comprueba razonadamente que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, entonces se deduce que el producto de los cuadrados de dichas matrices es igual al cuadrado del producto de dichas matrices.

b) La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

satisface la relación $A^2 - 3{\cdot}A + 2{\cdot}I = O$, siendo I y O, respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula.

c) Calcula razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, los valores a y b que hacen que $A^2 = a{\cdot}A + b{\cdot}I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 = 3{\cdot}A + 2{\cdot}I$.

(9) a) Calcula las matrices reales cuadradas de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 \cdot X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases}$$

donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Si X e Y son las matrices anteriores, calcula $(2{\cdot}X + Y){\cdot}X - (2{\cdot}X + Y){\cdot}(2Y)$.

(10) Calcula todos los valores reales x, y, z, t para los cuales se verifica $A{\cdot}X = X{\cdot}A$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(11) Tenemos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de A.

b) Calcula la matriz $B = A{\cdot}(A + 4{\cdot}I)$.

c) Determina los números reales que cumplen: $A^{-1} = x{\cdot}A + y{\cdot}I$, $A^2 = z{\cdot}A + t{\cdot}I$,

(12) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$$

dos matrices de orden (2×3) en las que x, y y $z \in \mathbb{R}$ denotan valores numéricos desconocidos.

a) Determina, razonadamente, los valores de x, y y $z \in \mathbb{R}$ de manera que $B = A$.

b) ¿Es posible el cálculo de $A \times B$? Razona la respuesta

(13) Sea $6{\cdot}A + 2{\cdot}I = B$ una expresión matricial, donde B denota la matriz cuadrada de orden (2×2):

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden correspondiente:

a) ¿Qué dimensión tiene la matriz A?

b) Determina los elementos que integran la matriz A, esto es, $a_{ij} \in A_{\times q}$.

c) Calcula $A + 2{\cdot}I$.

(14) Sean A y B dos matrices desconocidas. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

(15) Sean X e Y dos matrices desconocidas. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \qquad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(16) Se llama "traza" de una matriz a la suma de los elementos de su diagonal principal. Halla A, matriz de tamaño (2×2), sabiendo que la traza de $A{\cdot}A^t$ es cero.

(17) Sea A una matriz que tiene tres filas; sea B la matriz que resulta de sustituir en A la 1ª fila por la suma de las otras dos. ¿Qué debe ocurrir entre las filas de A para que A y B tengan el mismo rango?

(18) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $A{\cdot}B = B{\cdot}A$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

(19) Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;,\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \;,\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $(A{\cdot}B)^t$ y $(B{\cdot}A)^t$.

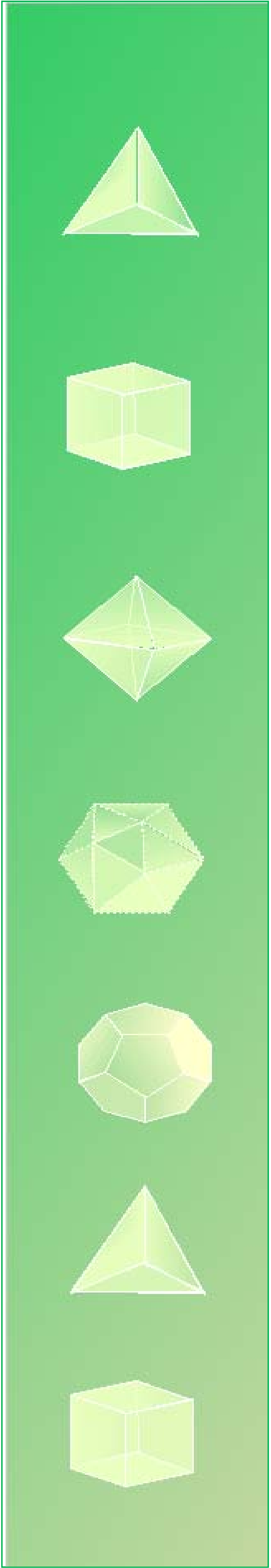
b) Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X + (A \cdot B)^t = C$.

(20) Calcula todas las matrices X tales que $A \cdot X + B = X$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(21) Calcula dos números naturales a y b menores que 10 y tales que la siguiente matriz tenga rango 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$



Matemáticas II.
2º Bachillerato
Capítulo 2: Determinantes

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisor: Eduardo Cuchillo

Índice

Resumen

En una de esas peculiaridades que de vez en cuando se dan en la ciencia, nos encontramos con el caso de las matrices y los determinantes. Hay evidencias de que ambos se conocían entre dos y cuatro siglos antes de nuestra era, cuando para resolver ciertos problemas se organizaba la información en forma de tablas y se explicaban las reglas aritméticas para hallar la solución. Sin embargo, cuando fueron *redescubiertos* para la Matemática moderna, se desarrollaron antes los determinantes que las matrices.

Fue Carl Friedlich Gauss (el príncipe de los matemáticos) el primero que usó el término "determinante" en sus 'Disquisiciones Aritméticas' de 1801, pero con un significado diferente al nuestro. La idea actual de determinante se debe a Augustin Louis Cauchy, mientras que el término "matriz" lo acuñó 50 años después James Joseph Sylvester dando a entender que una matriz es "la madre de los determinantes".

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

1. CONCEPTO DE DETERMINANTE

1.1. Definición

Dada una matriz cuadrada de orden n,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama **determinante de la matriz A** y se representa por $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a **un número** real que es igual a:

$$\det(A)=|A|=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{i(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

Es decir, el determinante de una matriz cuadrada es el número real que se obtiene sumando todos los n factorial ($n!$) productos posibles de n elementos (orden de la matriz) de la matriz, de forma que en cada producto haya un elemento de cada *fila* y uno de cada columna, precedido cada producto con el signo + ó – según que la permutación de los subíndices que indican la columna tenga un número de inversiones, respecto del orden natural, que sea par o impar.

Esta definición sólo es práctica para resolver los determinantes de orden 2 y 3. Los determinantes de orden superior se resuelven con otros métodos, ya que aplicando la definición sería muy laborioso.

1.2. Determinantes de orden dos y tres. Regla de Sarrus

1.2.1. Determinantes de orden dos

Dada una matriz de orden 2,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

se llama determinante de la matriz A,

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

al número:

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Es decir, se multiplican los elementos de la diagonal principal y se le resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}\to |A|=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-5\cdot 1=8-5=3$$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\to |B|=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -4 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot 3-(-2)\cdot(-4)=-3-8=-11$$

1.2.2. Determinantes de orden tres. Regla de Sarrus

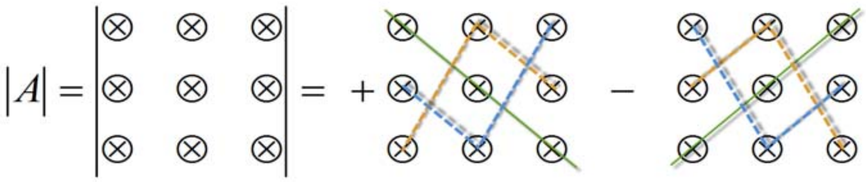
Dada una matriz cuadrada de orden 3,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

se llama determinante de la matriz A al número:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Este desarrollo procedente de la definición de determinante, puede recordarse fácilmente con este diagrama, conocido como la **regla de Sarrus:**



Ejemplo

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 1\\ 3 & 6 & -2\end{vmatrix}=1\cdot 5\cdot(-2)+2\cdot 1\cdot 3+(-1)\cdot 6\cdot 3-3\cdot 5\cdot 3-1\cdot 6\cdot 1-2(-1)(-2)=-10+6-18-30-6-4=-54$$

Actividades propuestas

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}$

2. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\\ 3 & -2 & -2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 5\\ 4 & -2 & -2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}4 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}$

2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1ª) ***El determinante de una matriz A es igual al determinante de su traspuesta.***

$$|A| = |A^t|$$

Demostración

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = |A|$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{11}a_{23} - a_{21}a_{33}a_{12}$$

reorganizando términos:

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} = |A|$$

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 36 + 4 + 30 - 60 - 18 - 4 = -12$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 36 + 4 + 30 - 60 - 18 - 4 = -12$$

Teniendo en cuenta esta propiedad, a partir de ahora todo lo que se diga para la filas de un determinante será igualmente válido para las columnas, y viceversa, pudiendo hablar simplemente de **líneas de un determinante**.

2ª) ***Si los elementos de una fila o de una columna se multiplican todos por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.***

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{21} \\ k \cdot a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot a_{11} \cdot a_{22} - k \cdot a_{21} \cdot a_{12} = k \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = k \cdot |A|$$

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}ka_{13} + a_{12}ka_{23}a_{31} - ka_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}ka_{11} - ka_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= k \cdot (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}) = k \cdot |A|$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -12 \qquad \begin{vmatrix} 2\cdot 2 & 3 & 4 \\ 2\cdot 1 & 3 & 2 \\ 2\cdot 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 10 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -24 = 2\cdot(-12) = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Esta propiedad tiene dos implicaciones:

1. Nos permite sacar fuera los factores comunes a todos los elementos de una línea.
2. $|k\cdot A| = k^n \cdot |A|$, siendo n la dimensión de la matriz

Demostración

Para orden 2:

$$|k\cdot A| = \begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{21} \\ k\cdot a_{12} & k\cdot a_{22} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & a_{21} \\ k\cdot a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = k\cdot k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = k^2\cdot|A|$$

Para orden 3:

$$|k\cdot A| = \begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} \\ k\cdot a_{31} & k\cdot a_{32} & k\cdot a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} \\ k\cdot a_{31} & k\cdot a_{32} & k\cdot a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k^3\cdot|A|$$

3ª) ***Si los elementos de una línea se pueden descomponer en suma de dos o más sumandos, el determinante será igual a la suma de dos determinantes (o más) que tienen todas las restantes líneas iguales y en dicha línea tienen los primeros, segundos, etc. sumandos.***

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11})\cdot a_{22} - a_{12}\cdot(a_{21}+b_{21}) = a_{11}\cdot a_{22} + b_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} - a_{12}\cdot b_{21}$$

reorganizando términos:

$$= a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} + b_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot b_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} (a_{11}+b_{11})a_{22}a_{33} + (a_{21}+b_{21})a_{13}a_{32} + (a_{31}+b_{31})a_{12}a_{23} \\ \quad -(a_{31}+b_{31})a_{22}a_{13} - (a_{11}+b_{11})a_{32}a_{23} - (a_{21}+b_{21})a_{12}a_{33} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \\ \quad + b_{11}a_{22}a_{33} + b_{21}a_{13}a_{32} + b_{31}a_{12}a_{23} - b_{31}a_{22}a_{13} - b_{11}a_{32}a_{23} - b_{21}a_{12}a_{33} \end{cases}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Ejemplo

- Sea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 35 + 108 - 21 - 63 + 9 - 140 = -72$$

Descompongamos la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 48 - 6 - 27 - 40 + 4 = -6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 60 - 15 - 36 - 100 + 5 = -66$$

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+5 & 3 \\ 4 & 3+4 & -1 \\ 3 & 4+5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

4ª) *Si en un determinante los elemento de una línea son nulos, el determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{12} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 \cdot a_{31} - 0 \cdot a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32} \cdot 0 - 0 \cdot a_{21}a_{33} = 0$$

5ª) *Si en una matriz se permutan dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = -|A|$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31}a_{22} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{21}a_{13}a_{32} - a_{11}a_{33}a_{22} \\ &= -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{32}a_{13} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= -|A| \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

Actividades propuestas

3. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces **dos** permutaciones de filas.

4. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

5. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.

6. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

6ª) ***Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales, el determinante es nulo.***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a & a \\ a_{21} & b & b \\ a_{31} & c & c \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = a \cdot b - a \cdot b = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot a_{33} + a \cdot c \cdot a_{32} + b \cdot c \cdot a_{31} - b \cdot c \cdot a_{31} - a \cdot b \cdot a_{33} - a \cdot c \cdot a_{32} = 0$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 = 20 + 36 - 3 - 36 - 20 + 3 = 0$$

Actividad propuesta

7. Razona por qué esta propiedad puede deducirse de la propiedad número 5.

8. Comprueba en un determinante de orden 3 que la propiedad se verifica también cuando hay dos columnas iguales. Hazlo de dos formas diferentes: desarrollando el determinante y utilizando la propiedad del determinante de la matriz traspuesta.

Como consecuencia de las segunda, tercera y sexta propiedades tenemos las siguientes:

7ª) *Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a & k\cdot a \\ a_{21} & b & k\cdot b \\ a_{31} & c & k\cdot c \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} a & k\cdot a \\ b & k\cdot b \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(como vimos en la propiedad anterior)}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ k\cdot a & k\cdot b & k\cdot c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 0 = 0$$

8ª) *Si los elementos de una línea son combinación lineal de las restantes líneas paralelas, el determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r\cdot a_{11} + s\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & r\cdot a_{21} + s\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & r\cdot a_{31} + s\cdot a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

Para determinantes de orden dos esta propiedad se reduce a la anterior.

Para determinantes de orden tres:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r\cdot a_{11} + s\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & r\cdot a_{21} + s\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & r\cdot a_{31} + s\cdot a_{32} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Prop. 3}]{} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r\cdot a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & r\cdot a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & r\cdot a_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & s\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & s\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & s\cdot a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Prop. 2}]{} r\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + s\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Prop. 6}]{} r\cdot 0 + s\cdot 0 = 0$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 7 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_1 + C_2]{} 0$$

9ª) *Si a los elementos de una línea se le suma una combinación lineal de las restantes líneas paralelas,*

el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+(r\cdot a_{11}+s\cdot a_{12}) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+(r\cdot a_{21}+s\cdot a_{22}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+(r\cdot a_{31}+s\cdot a_{32}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demostración

Para determinantes de orden dos sólo hay una posible combinación:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+r\cdot a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+r\cdot a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Prop. 2}]{} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r\cdot a_{12} & a_{12} \\ r\cdot a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Prop. 7}]{} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Actividades propuestas

9. Demuestra esta propiedad para determinantes de orden tres.

10. Comprueba que el valor del segundo determinante, obtenido del primero con la transformación indicada, es el mismo que el del determinante de partida.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3+C_1+2C_2]{} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix}$$

10ª) ***El*** **determinante** ***del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices:***

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$$

Demostración

Para determinantes de orden dos:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix}$$

Aplicamos dos veces la propiedad (3):

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{11}\cdot b_{12} \\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{21}\cdot b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} \\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\cdot b_{21} & a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix}$$

Extraemos todos los factores comunes que se puede (propiedad 2):

$$|A\cdot B| = b_{11}b_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Y observamos que el primer y el último determinantes son nulos (propiedad 6):

$$|A\cdot B| = b_{11}b_{12}\cdot 0 + b_{11}b_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} + b_{12}b_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21}\end{vmatrix} + b_{21}b_{22}\cdot 0$$

Vemos que en el segundo determinante hay una permutación de columnas, luego:

$$|A\cdot B| = b_{11}b_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} + b_{12}b_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21}\end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} - b_{12}b_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{22} & b_{22}\end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$$

Actividades propuestas

11. Comprueba esta propiedad para las siguientes matrices cuadradas de orden tres:

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

12. Razona si es posible que para dos matrices A y B existan los productos $A\cdot B$ y $B\cdot A$, pero no se verifique que $|A\cdot B| = |B\cdot A|$.

13. Dadas dos matrices A y B, cuadradas y de igual dimensión, razona si las siguientes expresiones son ciertas o no:

a) $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + B^2$

b) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2\cdot A\cdot B$

c) $(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$

d) $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2\cdot A\cdot B$

e) $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$

f) $|(A+B)^2| = |A|^2 + |B|^2$

g) $|(A+B)^2| = |A|^2 + |B|^2 + 2\cdot|A|\cdot|B|$

h) $|(A-B)^2| = |A|^2 - |B|^2$

i) $|(A-B)^2| = |A|^2 + |B|^2 - 2\cdot|A|\cdot|B|$

j) $|(A+B)\cdot(A-B)| = |A|^2 - |B|^2$

3. CÁLCULO DE DETERMINANTES POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA

Hemos calculado determinantes de orden 2 y 3 usando la definición de determinante (regla de Sarrus). Intentar aplicar la definición a determinantes de orden mayor que 3 es muy engorroso, por lo que los matemáticos buscaron otro método.

3.1. Definiciones

Comenzamos por definir algunos conceptos que vamos a necesitar.

3.1.1. Menor complementario

Dada una matriz cuadrada A, de orden n, se llama **menor complementario** del elemento a_{ij}, y se representa por α_{ij}, al determinante de orden $(n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \alpha_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3.1.2. Adjunto de un elemento

Dada una matriz cuadrada A, de orden n, se llama **adjunto del elemento** a_{ij} y se representa por A_{ij}, al menor complementario α_{ij}, precedido del signo + o – según que la suma de los subíndices $(i+j)$ sea par o impar:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Así, el adjunto del elemento a_{12} será: $A_{12} = -\alpha_{12}$ y el adjunto del elemento a_{33} será: $A_{33} = +\alpha_{33}$.

3.2. Cálculo de determinantes por adjuntos

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+\dots+a_{ij}\cdot A_{ij}+\dots a_{in}\cdot A_{in} & \text{(por filas)} \\ \text{o} \\ a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+\dots+a_{ij}\cdot A_{ij}+\dots a_{nj}\cdot A_{nj} & \text{(por columnas)} \end{cases}$$

Así, el determinante de una matriz A, de orden 3, se podría calcular de seis formas diferentes:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13} & \text{(por la primera fila)} \\ a_{21}\cdot A_{21}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{23}\cdot A_{23} & \text{(por la segunda fila)} \\ a_{31}\cdot A_{31}+a_{32}\cdot A_{32}+a_{33}\cdot A_{33} & \text{(por la tercera fila)} \end{cases}$$

o

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31} & \text{(por la primera columna)} \\ a_{12}\cdot A_{12}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{32}\cdot A_{32} & \text{(por la segunda columna)} \\ a_{13}\cdot A_{13}+a_{23}\cdot A_{23}+a_{33}\cdot A_{33} & \text{(por la tercera columna)} \end{cases}$$

El problema de asignar el signo más o menos a cada adjunto se simplifica si se tiene en cuenta que éstos van alternándose y que el correspondiente al elemento a_{11} es el signo +, sin importar el camino que se siga para llegar al elemento correspondiente.

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \qquad \dots$$

Ejemplo

- Vamos a desarrollar un determinante de orden 3 mediante los adjuntos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Si desarrollamos el determinante por los adjuntos de la segunda fila (o de la segunda columna) nos encontramos con un producto en que uno de los factores es nulo, lo que nos simplifica el cálculo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Por tanto, cuando se combina este método para calcular determinantes con las propiedades de los mismos, y *trabajamos* antes para conseguir el mayor número posible de ceros en una línea, podremos calcular de forma muy sencilla dicho determinante por los adjuntos de dicha línea.

Ejemplo

- Calcula este determinante mediante adjuntos, *haciendo ceros* para simplificar las filas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+2F_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}}_{0} = -5 - 22 = -27$$

Mediante este método se ha pasado de calcular un determinante de orden 3 a calcular un determinante de orden 2.

Aunque el ejemplo se ha hecho con un determinante de orden 3, vale para cualquier orden y nos abre la puerta a calcular determinantes de orden superior.

Actividad propuesta

14. Calcula por adjuntos el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

3.3. Determinante de una matriz triangular

Como acabas de comprobar en la actividad anterior:

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Demostración

Desarrollamos el determinante por los adjuntos de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + \ldots + 0 \cdot A_{n1} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Repetimos desarrollando por los adjuntos de la *nueva* primera columna:

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + \ldots + 0 \cdot A_{n2}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Es evidente que este proceso se repetirá hasta *agotar* las columnas, por tanto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

El proceso que hemos seguido en esta demostración es una versión muy simplificada de un método de demostración llamado **método de inducción**.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$$

Actividad propuesta

15. Halla el valor de a que verifica:

$$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

3.4. Matriz adjunta

Se llama **matriz adjunta** de la matriz A a la matriz formada por los adjuntos de la matriz A, y se representa por $\mathrm{Adj}(A)$.

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +\alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & +\alpha_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +4 & -1 \\ -5 & +2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(B)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +\alpha_{11} & -\alpha_{12} & +\alpha_{13} \\ -\alpha_{21} & +\alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ +\alpha_{31} & -\alpha_{32} & +\alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\mathrm{Adj}(B)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & +1 & -21 \\ +22 & -11 & 0 \\ -13 & -4 & +7 \end{pmatrix}$$

Actividades propuestas

16. Para las matrices A y B del ejemplo, determina:

a) $|A|$ y $|B|$

b) $[\mathrm{Adj}(A)]^t$ y $[\mathrm{Adj}(B)]^t$

c) $A\cdot[\mathrm{Adj}(A)]^t$ y $B\cdot[\mathrm{Adj}(B)]^t$

¿Qué observas?

17. a) Calcula la matriz adjunta de:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Halla $|C|$, $[\mathrm{Adj}(C)]^t$ y efectúa el producto $C\cdot[\mathrm{Adj}(C)]^t$.

c) ¿Qué observas?

4. MATRIZ INVERSA

En el tema anterior (matrices) se ha visto el concepto de la matriz inversa de una matriz cuadrada y se han calculado inversas de matrices de orden 2 y 3 mediante sistemas de ecuaciones o con el método de Gauss–Jordan. En este capítulo veremos una tercera forma de calcular matrices inversas.

Recordemos que una matriz cuadrada A se llama **regular** (o **inversible**) si existe otra matriz cuadrada, llamada inversa y que se representa por A^{-1}, que multiplicada por la matriz A nos da la matriz identidad.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Vamos a deducir cómo es la matriz inversa. Supongamos una matriz cuadrada A de orden n, aunque para facilitar los cálculos trabajaremos con una matriz de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Hallamos la traspuesta de la matriz adjunta:

$$[\mathrm{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Multiplicando la matriz A por la traspuesta de su adjunta $[\mathrm{Adj}(A)]^t$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot I$$

Es decir, al multiplicar nuestra matriz A por la traspuesta de su adjunta nos ha aparecido la matriz unidad:

$$A \cdot [\mathrm{Adj}(A)]^t = |A| \cdot I \rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot [\mathrm{Adj}(A)]^t \right) = I$$

De donde se deduce que, si el determinante de A **no es nulo**:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\mathrm{Adj}(A)]^t$$

Como de toda matriz cuadrada se puede hallar su adjunta y luego la traspuesta de ésta, lo único que puede hacer que no exista la inversa es que no exista el factor $\frac{1}{|A|}$, que no existe cuando $|A| = 0$. Luego:

> ***"La condición necesaria y suficiente para una matriz* cuadrada *tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero"***

Por otro lado, como $A \cdot A^{-1} = I$ y por la novena propiedad: $|A \cdot A^{-1}| = |I| = 1$:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Actividades resueltas

- *Halla la matriz inversa de*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

En primer lugar comprobamos el valor de su determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$$

Hallamos la matriz adjunta y la traspuesta de ésta:

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow [\mathrm{Adj}(A)]^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

- *Halla la matriz inversa de*

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 1\\ 3 & 6 & -2\end{pmatrix}$$

En primer lugar comprobamos el valor de su determinante:

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 1\\ 3 & 6 & -2\end{vmatrix}=-10-18+6-45-4-6=-74\Rightarrow |B|\neq 0\Rightarrow \exists B^{-1}$$

Una vez comprobada la existencia de matriz inversa, hallamos la adjunta de B.

$$\mathrm{Adj}(B)=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 1\\ 6 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & +1 & -21\\ +22 & -11 & 0\\ -13 & -4 & +7\end{pmatrix}$$

la traspuesta de esta matriz:

$$[\mathrm{Adj}(B)]^t=\begin{pmatrix}-16 & +22 & -13\\ +1 & -11 & -4\\ -21 & 0 & +7\end{pmatrix}$$

Y, finalmente:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot[\mathrm{Adj}(B)]^t=\frac{1}{-77}\cdot\begin{pmatrix}-16 & +22 & -13\\ +1 & -11 & -4\\ -21 & 0 & +7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16/77 & -22/77 & 13/77\\ -1/77 & 11/77 & 4/77\\ 21/77 & 0 & -7/77\end{pmatrix}$$

Actividad propuesta

18. Comprueba para los ejemplos anteriores que $A\cdot A^{-1}=I$ y $B\cdot B^{-1}=I$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

5. RANGO DE UNA MATRIZ

Si recordamos que una matriz es una tabla de información, y que la cantidad de información que almacenan algunas tablas es monstruosa (basta con imaginar la base de datos de una empresa), es evidente la necesidad de encontrar una manera de eliminar información redundante y quedarse con una cantidad mínima con la que poder recuperar los datos eliminados.

Ese es el concepto cotidiano de **rango**, el mínimo número de elementos independientes de una tabla de información, es decir, el menor número de líneas con las que podemos obtener todas las demás. Así, basta guardar una cantidad pequeña de líneas junto con las operaciones que generan el resto.

5.1. Menor de una matriz

Dada una matriz de dimensión $m \times n$, se llama *menor de orden* k al determinante formado por la intersección de k filas y k columnas de la matriz.

Así, por ejemplo, en la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

- Los determinantes $|a_{11}|$ $|a_{23}|$ y $|a_{14}|$ serán algunos de los menores de orden 1.
- Los determinantes $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ serán algunos de los menores de orden 2.
- Los determinantes $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$ son menores de orden 3.

En este caso la matriz no tiene menores de orden superior a 3, pues sólo tiene tres filas.

5.2. Rango de una matriz

Definimos en su momento el rango de una matriz como el número de filas o columnas linealmente independientes, y lo calculamos usando el método de Gauss. Vamos a ver otra forma de definir y calcular el rango de una matriz.

Se llama rango de una matriz (o característica de una matriz) al orden del menor de mayor orden no nulo.

Actividades resueltas

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Como la matriz no es la matriz nula, basta con escoger un elemento no nulo para comprobar que el rango de la matriz es por lo menos 1. Tomamos el elemento a_{11} y trabajamos a partir del él (podríamos haber cogido cualquier otro): $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) \geq 1$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Trabajamos ahora a partir del menor de orden 1 que hemos tomado, para construir los menores de órdenes superiores. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

La matriz no puede tener rango mayor que 2 pues sólo tiene dos columnas.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Como la matriz no es la matriz nula, ya sabemos que su rango será mayor o igual que 1 y por lo tanto empezamos a trabajar con menores de orden 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) \geq 2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$$

El rango no puede ser mayor que 3.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \\ 3 & 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 que sea distinto de cero y trabajamos con él para formar los menores de orden 3 y superiores. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{rg}(C) \geq 2$

Formamos un menor de orden 3: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Como este menor de orden 3 es nulo, formamos otro menor de orden 3, pero siempre a partir del mismo menor de orden 2, hasta que encontremos un menor de orden 3 que sea distinto de cero, si lo hay: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 0$

Como todos los menores de orden 3 que se pueden formar son nulos, entonces el rango de la matriz es 2.

Es interesante conocer esta propiedad:

"Si los todos los menores de un determinado orden son nulos, también lo son los de órdenes superiores".

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

CURIOSIDADES. REVISTA

Emmy Noether (1882-1935)

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío que realizó sus investigaciones en las primeras décadas del siglo XX. Su primera especialización fue la teoría de invariantes algebraicos, que le permitió demostrar dos teoremas esenciales en la teoría de la relatividad. Su verdadera aportación a la investigación matemática fue poner las bases del Álgebra Moderna. Sus investigaciones en álgebra no conmutativa destacan, sobre todo, por el carácter unificado y general que dio a esta teoría. Sus publicaciones serían suficientes para valorar su decisiva contribución a las matemáticas, pero hay que considerar, además, que nunca le interesó mucho publicar y siempre permitió a sus colegas y a sus estudiantes desarrollar resultados interesantes a partir de las sugerencias que ella les hacía.

El calificativo ***Noetheriano*** se utiliza para designar muchos conceptos en Álgebra.

El Senado de la Universidad de Erlangen había declarado en 1898, que la admisión de mujeres estudiantes "*destrozaría todo orden académico*". Sin embargo se les autorizaba a asistir a clase con un permiso especial que no les daba derecho a examinarse. En 1904 Noether regresó a Erlangen donde habían cambiado los estatutos de la Universidad y pudo proseguir sus estudios de doctorado.

En 1915 fue invitada por David Hilbert (1862-1943) y Félix Klein (1849-1925) a trabajar con ellos en Göttingen. Aunque Göttingen había sido la primera universidad en conceder un doctorado a una mujer, Sonia Kovalevskaya, no por ello tenía la disposición de contratar como enseñante a una mujer. Emmy no fue una excepción y, a pesar de su valía, fracasó en su primer intento de presentarse a oposiciones como docente universitario. El reglamento vigente indicaba explícitamente que los candidatos debían ser hombres. Hilbert quiso corregir esa injusticia pero sus esfuerzos no tuvieron éxito, pues ciertos miembros de la facultad, no matemáticos, se opusieron.

Hilbert y Emmy encontraron un sistema para que ella pudiera trabajar como docente: las clases se anunciaban bajo el nombre de Hilbert y ella figuraba como ayudante. Así pudo probar su competencia y ser mejor conocida.

Se cuenta, como anécdota, que Hilbert dijo en un Consejo de la Universidad de Göttingen, *"no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un establecimiento de baños"*.

A pesar del reconocimiento obtenido por este éxito, los cambios políticos y la llegada de Hitler al poder le obligaron a reorientar su carrera. Ser una intelectual, pacifista, judía y liberal le obligó a abandonar Alemania.

RESUMEN

		Ejemplos
Definición de determinante	**El determinante** de una matriz cuadrada A **es el número real** que se obtiene mediante $\det(A)=\lvert A\rvert=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{i(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$	
Determinante de orden dos	$\det(A)=\lvert A\rvert=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$	$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=2\cdot5-3\cdot1=10-3=7$
Determinante de orden tres. Regla de Sarrus	$\begin{vmatrix}\otimes & \otimes & \otimes\\ \otimes & \otimes & \otimes\\ \otimes & \otimes & \otimes\end{vmatrix}=+\begin{matrix}\otimes & \otimes & \otimes\\ \otimes & \otimes & \otimes\\ \otimes & \otimes & \otimes\end{matrix}-\begin{matrix}\otimes & \otimes & \otimes\\ \otimes & \otimes & \otimes\\ \otimes & \otimes & \otimes\end{matrix}$	$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}=10+6+18-45-6-4=-21$
Menor complementario	Menor complementario del elemento a_{ij}, α_{ij}, es el determinante de orden $n-1$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j.	$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha_{21}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$
Adjunto de un elemento	Adjunto del elemento a_{ij}, A_{ij}, es el menor complementario α_{ij}, precedido de + o – según la suma de los subíndices $i+j$ sea par o impar. $A_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$	$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A_{21}=-\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ A_{33}=+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{cases}$
Matriz adjunta	Se llama matriz adjunta de la matriz A a la matriz formada por los adjuntos de la matriz A, y se representa por $\mathrm{Adj}(A)$.	$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}$
Desarrollo por adjuntos	El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.	$\lvert A_3\rvert=\begin{cases}a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\\ a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}\end{cases}$
Matriz inversa	**Si el determinante de A no es nulo:** $A^{-1}=\dfrac{1}{\lvert A\rvert}\cdot[Adj(A)]^t$	
Menor de una matriz	Menor de orden k es el determinante formado por la intersección de k filas y k columnas de la matriz.	$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\to M_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}$
Rango de una matriz	Rango (o característica) de una matriz es el orden del menor de mayor orden no nulo	El rango de la matriz anterior es dos, porque $M_2=3-2=1\neq0$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & b \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$

2.- Prueba, sin desarrollarlos, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix}$

3.- Demuestra sin desarrollar que los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

son múltiplos de 15.

4.- Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

5.- Comprueba, a partir de las propiedades de los determinantes, que $A_1 = 0$ y que $A_2 = \dot{5}$.

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

6.- Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$$

calcula, sin desarrollar, el valor de

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

7.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$ calcula sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} x-2p+3a & a & -3p \\ z-2r+3c & c & -3r \\ y-2q+3b & b & -3q \end{vmatrix} =$$

8.- ¿Cuál será el orden de una matriz cuadrada A si sabemos que su determinante vale -5 y que el determinante de la matriz $3 \cdot A^t$ vale -1215?

9.- Justifica, sin realizar cálculo alguno, que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

10.- Dadas las matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $\left|\left(AB^{-1}\right)^t\right|$.

11.- Obtén, en función de a, b y c el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$

12.- Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3 \cdot (a+3)$$

13.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula: $|A|$; α_{32} ; α_{13} ; A_{22} ; A_{12}

b) Resuelve la siguiente ecuación: $|A| \cdot x + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot x$

14.- Sea una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{3x3}$ cuyo determinante es $-\frac{1}{3}$. Comprueba si es verdadero o falso

$\lvert -3A \rvert = 9$	$\dfrac{\lvert A \cdot A^t \rvert}{3} = 3^{-3}$	$A^3 \notin \mathcal{M}_{3x3}$	$4\lvert A \rvert - 7\lvert A^t \rvert = 1$	$2A \in \mathcal{M}_{6x6}$
$\lvert 4A - A^t \rvert = -3^2$	$\lvert A^{-1} \rvert = -3^{-1}$	$\dfrac{\lvert 3A - A^t \rvert}{\lvert 3A^t + A \rvert} = (-2)^{-3}$	$\frac{1}{9}\lvert A^{-1} \rvert - 6\lvert A^t \rvert^2 = 1$	$\lvert 3^{-2} A^t \rvert = -\dfrac{1}{3^7}$

Si son falsas, indica la respuesta correcta.

15.- Sean las matrices A y $B \in \mathcal{M}_{3x3}$ tales que $|A| = -3^{-2}$ y $|B| = 3$. Con estos datos calcula de forma razonada: $|A^{-1}|$; $|B^{-1}|$; $|A|\cdot|B|^{-1}$; $|3B^{-1}\cdot A|$; $|3A\cdot B^t|$; $\left|\left(B^{-1}\cdot A^{-1}\right)^t\right|$

16. - Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las cuatro filas de una matriz cuadrada A, cuyo determinante vale -2. Se pide calcular de forma razonada:

a) El determinante de la matriz $-\dfrac{3A}{2}$.

b) El determinante de la matriz inversa de A.

c) El determinante de la matriz $\dfrac{A^2}{6}$.

d) El determinante de una matriz cuyas filas son: $2F_2, -3F_1+4F_3, -F_4, 2F_3$.

17.- Para los determinantes

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) Halla los menores complementarios de los elementos α_{11}, α_{23}, α_{32} y α_{12}, cuando existan.

b) Halla los adjuntos de dichos elementos, cuando existan.

18.- a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica que $A \cdot A^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A.

19.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula el determinante de la matriz A de las siguientes maneras:

a) Aplicando la regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la 3ª fila y de la 2ª columna.

20.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide calcular el valor de los siguientes determinantes: $|A\cdot B|$; $|C|$; $|A^t\cdot B^t|$; $|C\cdot B\cdot A|$; $|C|^2$

21. - Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2-3x$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & x & -3 \\ x & 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 = 5x-3$

22.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 1 & 2 \\ -x & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 11$

23.- Resuelve la siguiente ecuación $|A - x \cdot I| = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad.

24.- Halla los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1- & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

25.- Aplicando propiedades, calcular el valor del determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

a) Indicando los pasos a realizar, hasta llegar a uno de orden 2.

b) Desarrollando por los elementos de una línea.

26. - Comprobar el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 137 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 27$$

27.- Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

28.- Calcula los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

29. - Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x+6$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

30.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1-7x$

31.- Halla las matrices inversas de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$

32.- Siendo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Es cierto que $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$?

b) Calcula, si es posible, la inversa de $A \cdot B$.

33. - Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa.

34.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

averigua para qué valores de λ existe A^{-1}, y calcúlala para $\lambda = -3$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

35.- Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

36.- Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba si es una matriz regular o inversible. En caso afirmativo, halla su inversa.

b) Descompón la matriz M en suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica.

c) Descompón $|M|$ en suma de dos determinantes $|P|$ y $|Q|$, tales que sus elementos sean <u>todos no nulos</u> y que el valor de uno de ellos sea <u>nulo</u>.

d) Comprueba si: $|M| = |P| + |Q|$ y $|M| = |P| \cdot |Q|$

e) Resuelve la ecuación: $\alpha_{13}x^2 - |M|x + 4A_{32} = 2$

37.- ¿Para qué valores de a la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

no tiene inversa? Halla la inversa para $a = 2$.

38.- a) ¿Para qué valores del parámetro a no es invertible la matriz A?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Para los valores de a encontrados calcular los determinantes de $A \cdot A^t$ y de $A^t \cdot A$.

39.- Sea C la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m no tiene inversa la matriz C?

b) Calcula la inversa de C para $m = 2$.

40.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

donde x es un número real, halla:

a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa.

b) La inversa de A para $x = 2$.

c) Con $x = 5$, el valor $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1.

43.- Dadas las matrices A, B y $C \in \mathcal{M}_{3x3}$, plantea la resolución de las siguientes ecuaciones utilizando la matriz inversa:

a) $X \cdot A = B$ b) $B \cdot X - 2B = 3X$ c) $A \cdot X \cdot C = 2B^t + A$

44.- Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa. Si A es una de esas matrices, calcula su cuadrado.

45.- a) Halla, si existe, la matriz inversa de M.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$

46.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué valores de *a* hacen singular la matriz C?

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz B para que la ecuación $A \cdot B \cdot C = D$ tenga sentido?

c) Calcula B para el valor $a = 1$.

47.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

48.- Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

49. - Halla el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

50.- Halla el rango de las matrices en función del parámetro:

a) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

51. - Determina el rango de las matrices siguientes en función del parámetro correspondiente:

$$A=\begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

52.- Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

a) Resuelve la ecuación $\det(A)=0$

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x.

53. - Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Discute el rango de A según los valores de m.

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$?

c) Calcula X para $m = 0$.

54.- Resuelve las ecuaciones:

a) $A \cdot X = B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B \cdot X = C$, siendo

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $A \cdot X = B + 2C$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

d) $A \cdot X + B = 2C$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1.- El valor del determinante de la matriz A es:

a) 4 b) 0 c) –4 d) 8

2.- El adjunto B_{23} del determinante de la matriz B es:

a) 0 b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ c) –4 d) $-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

3.- El valor del determinante de la matriz B es:

a) 4 b) 0 c) 8 d) –8

4.- El rango de B es: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5.- La matriz inversa de A es:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Dadas las matrices: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6.- La matriz inversa de la matriz F es:

$a)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $c)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $d)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.- El rango de la matriz C es: a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

8.- La matriz de determinante nulo es: a) C b) D c) E d) F

9.- El determinante de la matriz 5CD vale: a) 5 b) 0 c) 15 d) 1

10.- El rango de la matriz CF es: a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Apéndice: Problemas de determinantes en la P.A.U.

(1) Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ x & 1 & -1\\ 2 & 1 & -x\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) ¿Puede existir una matriz C de forma que se puedan realizar los productos $A\cdot C$ y $C\cdot B$? Si es posible, proporciona un ejemplo. Si no es posible, explica por qué.

b) Calcula $(B-I)^2$.

c) Determina los valores de x que verifican $|A| = -7|I|$

(2) Dados los números reales a, b, c y d, se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

Prueba que el polinomio $p(x) = \det(A - x\cdot I_2)$ es $p(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)\cdot x + \det(A)$, donde $\mathrm{tr}(A)$ es la traza de la matriz A, es decir, la suma de los elementos de la diagonal de A.

(3) Considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

a) Halla el determinante de la matriz A.

b) Halla el determinante de la matriz $3\cdot A$.

c) Halla el determinante de la matriz $(3\cdot A)^3$.

(4) Dadas las matrices cuadradas

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ -3 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

a) Calcula las matrices $(A-I)^2$ y $A\cdot(A-2\cdot I)$.

b) Justifica razonadamente que

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $(A-2\cdot I)$.

b.2) No existe la matriz inversa de la matriz $(A-I)$.

c) Determina el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1} = \lambda\cdot(A-2\cdot I)$.

(5) Considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}\sec\theta & \mathrm{tg}\,\theta & 0\\ \mathrm{tg}\,\theta & \sec\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Estudia para qué valores de θ la matriz A tiene inversa.

b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

(6) Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica que $M^2 = M$. Obtén razonadamente:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - k\,I$ tiene inversa.

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$.

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha\, A^2 + \beta\, A = -2\, I$.

d) Comprueba razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $M\,P = P\,M$.

(7) Dado el número real a se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 1-a & 1 & 2\\ a & a^2 & -1\end{pmatrix}$$

a) Obtén los valores del número real a para los que la matriz A tiene inversa.

b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $a = 0$.

(8) Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-x & 1 & 0\\ 0 & -x & 1\\ c & b & a-x\end{pmatrix}$$

a) Obtén el polinomio $p(x) = \det(A)$.

b) Si $c = 0$, busca las raíces de $p(x)$ dependiendo de a y b.

(9) Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) Calcula, si es posible, la matriz inversa de la matriz A.

b) Resuelve, si es posible, la ecuación matricial $X\cdot A = B$.

(10) Utilizando las propiedades de los determinantes:

a) Verifica que:

$$\begin{vmatrix}a-2 & 4 & 3\\ 1 & a+1 & -2\\ 0 & 0 & a-4\end{vmatrix}=(a-3)\cdot(a-4)\cdot(a+2)$$

b) Calcula:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5 & 1\\ 2 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 3 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

(11) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula su inversa, si existe.

b) Encuentra la regla de cálculo de las sucesivas potencias A^n de A.

c) Resuelve la ecuación

$$x \cdot \left(A^4 + A^2 - A\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(12) Se considera una matriz cuadrada A de orden tres que verifica la ecuación $A^2 = 6 \cdot A - 9 \cdot I$, donde I es la matriz identidad.

a) Expresa A^4 como combinación lineal de I y A.

b) 1) Estudia si la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

verifica la ecuación $B^2 = 6 \cdot B - 9 \cdot I$.

2) Determina si B tiene inversa y, si la tiene, calcúlala.

(13) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

a) Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$.

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x.

(14) Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) Calcula las matrices que verifican la relación $|A| = |A + I|$ (I es la matriz identidad)

b) Calcula todas las matrices diagonales que no poseen inversa y que verifican la relación anterior.

c) ¿Se verifica para cualquier par de matrices B y C la relación $|B + C| = |B| + |C|$? Si no es cierto pon un contraejemplo.

(15) Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor de su determinante en función de a.

b) Encuentra su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

(16) Aplicando las propiedades de los determinantes (y sin desarrollar, ni aplicar la regla de Sarrus) responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo varía el determinante de una matriz de orden 3 si se multiplica cada elemento a_{ij} de la matriz por 2^{i-j}?

b) La matriz, de orden 4, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$, ¿tiene inversa?

(17) Aplicando las propiedades de los determinantes y sin utilizar la regla de Sarrus, calcula razonadamente las raíces de la ecuación polinómica:

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades utilizadas.

(18) Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) Calcular el determinante de la matriz A_5.

(19) Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina el rango de M según los valores del parámetro a.

b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcula dicha inversa para $a = 2$.

(20) Halla una matriz X tal que $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(21) Calcula los valores de *b* para los cuales la matriz *A* tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ b+1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

(22) Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$$

(23) Obtén razonadamente:

a) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y verifica la ecuación $B^2 = B$.

b) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene tres filas y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que el determinante de A es positivo.

(24) Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y se sabe que T es una matriz cuadrada de tres filas y tres columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$. Calcula razonadamente los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) ½ T b) M^4 c) TM^3T^{-1}

(25) Dadas las matrices

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtén razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6.

b) Calcula razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$.

c) Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y.

(26) Se da la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) Obtén razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m.

b) Explica por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$.

c) Obtén razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m = 1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. Comprueba que los productos AA^{-1} y $A^{-1}A$ dan la matriz identidad.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

(27) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

calcula razonadamente el valor de los determinantes siguientes escribiendo todos los pasos utilizados.

a) $\left|A+B\right|$ y $\frac{1}{2}\left|(A+B)^{-1}\right|$ b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ y $\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right|$ c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^{3}B^{-1}\right|$

(28) Dada la matriz

$$A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & a-2\\ 4 & 3 & 2\\ a & a & -6\end{pmatrix}$$

a) Calcula, en función de a, le determinante de la matriz $A(a)$, escribiendo los cálculos necesarios.
b) Determina, razonadamente, los números reales a, para los que el determinante de la matriz inversa $A(a)$ es igual a $\frac{1}{66}$.

(29) Dadas las matrices cuadradas

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}18 & 48 & 12\\ 0 & 18 & 12\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Justifica que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa de A, incluyendo en la respuesta todos los pasos.
b) Calcula, razonadamente, el determinante de la matriz $3\,A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados.
c) Obtén razonadamente los valores reales x, y, z que verifican la ecuación:

$$x\cdot I + y\cdot A + z\cdot A^2 = B.$$

(30) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcula $(A - I)^2\cdot(A - 5I)$ donde I es la matriz identidad.
b) Obtén la matriz traspuesta de la matriz A.
c) Razona si existe la matriz inversa de A y, en su caso, calcúlala.

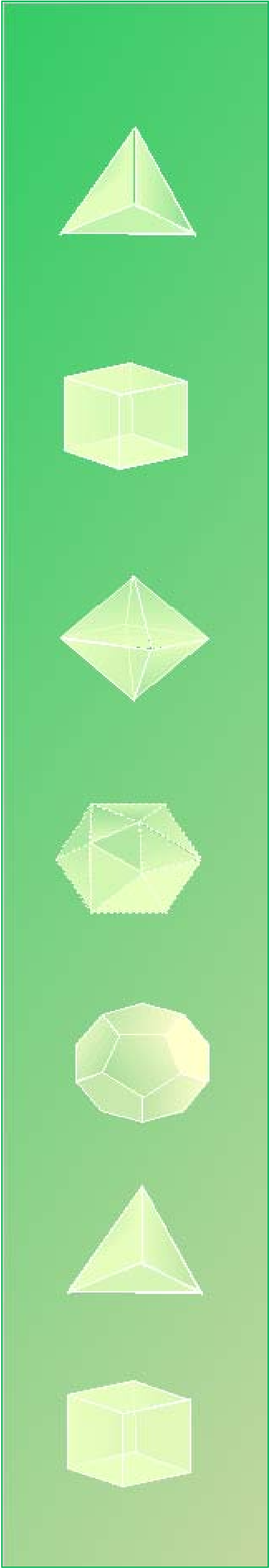
(31) Tenemos las matrices reales

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}:$$

a) Justifica que existe la matriz inversa de A, calcúlala y calcula el determinante de A^{-1}.
b) Calcula el determinante de la matriz B, $B = A(A + 4\cdot I)$.
c) Determina los números reales x, y, z, t que cumplen:

$$A^{-1} = x\cdot A + y\cdot I \quad , \quad A^2 = z\cdot A + t\cdot I.$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo



Matemáticas II.
2º Bachillerato.
Capítulo 3: Sistemas de ecuaciones

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisor: Eduardo Cuchillo

Índice

Resumen

Se ha considerado un *milagro* que las Matemáticas sean tan útiles para el resto de las Ciencias. Si se quiere estudiar un fenómeno se construye un modelo matemático que lo explique. Antes del uso de los ordenadores estos modelos eran casi siempre lineales para hacer posibles los cálculos, pues si no lo eran se simplificaban linealizándolos.

En este capítulo vamos a aprender a resolver sistemas lineales. Lo haremos con sistemas de un número pequeño de incógnitas, pero podríamos utilizar los mismos procedimientos para resolver, por ejemplo, sistemas con un millón de ecuaciones y de variables. Ahora, de nuevo, debemos utilizar para ello los ordenadores.

Imagina que estamos trabajando con la red eléctrica de un país, o las redes telefónicas, o las posibles rutas de una compañía de transportes. Toda simplificación que hagamos en el modelo puede representar un buen ahorro en tiempo de computación.

Una buena idea es sustituir los sistemas por sus coeficientes y trabajar con matrices. Otra buena idea es simplificar esas matrices consiguiendo que muchos coeficientes sean nulos, que es en lo que va a consistir el método de Gauss. Este método se puede implementar fácilmente en un ordenador.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

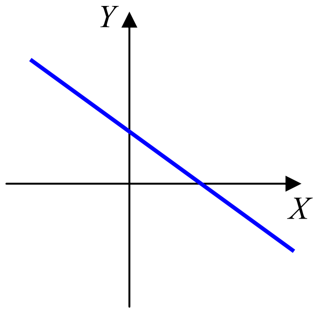
1. REPASO: SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES

1.1. Ecuación lineal de dos incógnitas

Una **ecuación lineal** con dos incógnitas, es una expresión de la forma $ax + by = c$, donde x e y son las incógnitas y a, b y c son números reales, de los cuales a a y b se les denomina coeficientes y a c término independiente.

A todo par de números (x_0, y_0) que verifique la expresión anterior se le denomina **solución** de la ecuación.

La representación gráfica de todas las soluciones de dicha expresión será una **recta**.

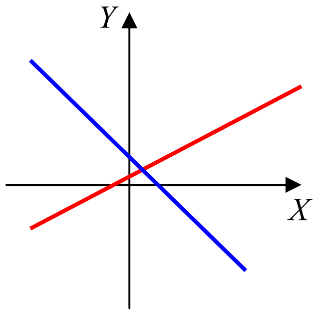


1.2. Sistema de ecuaciones lineales.

Un **sistema de dos ecuaciones** lineales con dos incógnitas es una expresión del tipo:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

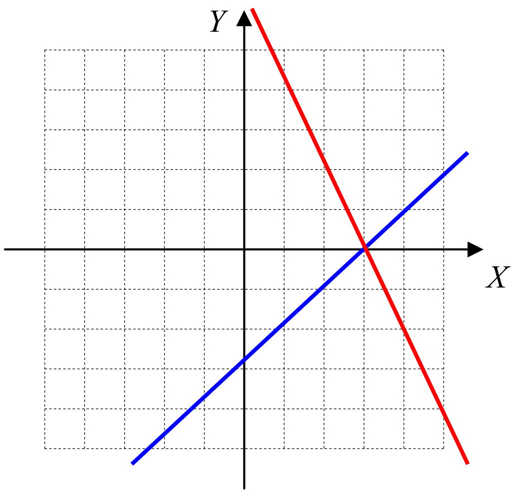
Si representamos la gráfica de cada ecuación, obtendremos dos rectas. El **punto de corte** de ambas rectas, si existe, será la única **solución del sistema**.



Actividades resueltas

- Resuelve gráficamente el sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

  Si representamos la gráfica de cada ecuación, obtenemos dos rectas:



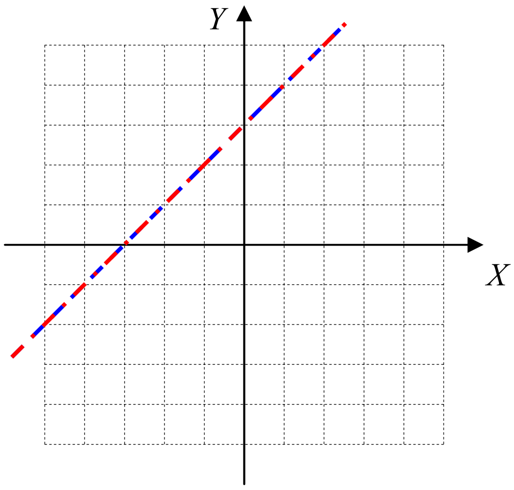
  Vemos que se cortan en el punto (3,0), que es la solución del sistema:

$$(x_0, y_0) = (3, 0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Un **sistema de ecuaciones** que tiene una única solución se denomina **Compatible Determinado**.

- Resuelve gráficamente el sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$

En este caso obtenemos dos rectas **que se superponen**:

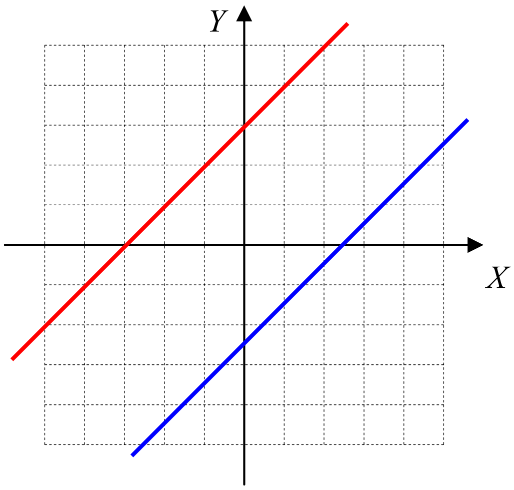


Esto quiere decir que toda solución de una ecuación es también solución de la otra. El sistema, en este caso, tiene **infinitas soluciones**, que son los infinitos puntos de la recta.

Un **sistema de ecuaciones** con infinitas soluciones se denomina **Compatible Indeterminado**.

- Resuelve gráficamente el sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$

En este caso obtenemos dos rectas **paralelas**:



Las rectas **NO** se cortan en ningún punto, por tanto el sistema no tiene solución.

Un **sistema de ecuaciones** que no tiene solución se denomina **Incompatible**.

Podemos formar el siguiente esquema para clasificar los sistemas atendiendo al número de soluciones:

$$\text{Sistemas}\begin{cases} \text{Compatible}\begin{cases} \text{Determinado}\,(\text{SCD})\,(\text{tiene una solución}) \\ \text{Indeterminado}\,(\text{SCI})\,(\text{tiene infinitas soluciones}) \end{cases} \\ \text{Incompatible}\,(\text{SI})\,(\text{no tiene solución}) \end{cases}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Actividades propuestas

1. Analiza y resuelve, cuando sea posible, los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y=-3 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=-14 \\ -x+3y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x+y=6 \\ 3x-y=-7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y+6x=33 \\ 3y+2x=11 \end{cases}$

1.3. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

El curso pasado estudiamos tres formas de resolver sistemas de ecuaciones lineales: reducción, sustitución e igualación. Resolvamos por reducción un sistema general de la forma

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por a_2 y la segunda por a_1:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_2a_1x+a_2b_1y=a_2c_1 \\ a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2 \end{cases}$$

Restamos miembro a miembro:

$$(a_2a_1-a_1a_2)\cdot x+(a_2b_1-a_1b_2)\cdot y=a_2c_1-a_1c_2 \Rightarrow 0\cdot x+(a_2b_1-a_1b_2)\cdot y=a_2c_1-a_1c_2$$

Observamos que si el factor $(a_2b_1-a_1b_2)$ es distinto de cero, podemos despejar y como:

$$y=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}$$

Operando del mismo modo, podemos hallar x:

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

Fijándonos bien en ambas expresiones, podemos reconocer tanto en el numerador como en el denominador la forma característica de un determinante, lo que nos lleva al siguiente razonamiento:

Todo sistema de la forma $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ se puede expresar mediante el producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

la primera formada por los coeficientes y que se denomina **matriz asociada del sistema**:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

y la **matriz de los términos independientes:**

$$B=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Si retomamos las expresiones obtenidas para x e y vemos que necesitamos una tercera matriz:

Combinando A y B se obtiene la **matriz ampliada**:

$$A^*=\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

Con ellas podemos deducir la solución del sistema original:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Actividades propuestas

2. Escribe en forma matricial y encuentra la matriz ampliada de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y=-3 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=-14 \\ -x+3y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x+y=6 \\ 3x-y=-7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y+6x=33 \\ 3y+2x=11 \end{cases}$

3. Para los sistemas anteriores, calcula el determinante de la matriz A que has obtenido y utiliza la expresión:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

para intentar resolverlos.

4. Para los sistemas anteriores, analiza qué relación existe entre el valor del determinante de la matriz A y la clasificación como Sistema Compatible o Sistema Incompatible que hiciste en la primera actividad propuesta.

5. Para los sistemas anteriores, determina el rango de la matriz ampliada que has obtenido y analiza qué relación existe entre dicho rango, el de la matriz A y la clasificación como Sistema Compatible Determinado, Sistema Compatible Indeterminado o Sistema Incompatible.

6. Decide cuáles de los siguientes sistemas puede resolverse con esta metodología matricial:

a) $\begin{cases} x^2+2xy=3x \\ 2x+y=3-y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=-4 \\ x+3y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\cdot y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-y^2=12 \\ x+y=3 \end{cases}$

7. Dadas las siguientes matrices A, B y A^*, determina los sistemas lineales asociados:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) $A^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ d) $A^*=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Escribe en forma matricial y encuentra la matriz ampliada de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y=-3x+y+5 \\ 2x-3y+15=3x+2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=4+x+y \\ 3-x+2y=y-x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12+x-4y=3-2x+4y \\ 7-y+4x=7+y-x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5=3x+3y \\ 3=x-y \end{cases}$

9. Razona qué valores debe tener el parámetro m para que el sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

a) $\begin{cases} -x+2y=-3 \\ mx-3y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=-14 \\ -x+y=m \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx+y=6 \\ 3x-y=-7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y+6x=33 \\ 3y+mx=11 \end{cases}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

2. SISTEMAS GENERALES DE ECUACIONES LINEALES

2.1. Definición de sistema de ecuaciones lineales

En general se denomina **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** a un conjunto de relaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

donde $x_1, x_2, \cdots x_n$ son las incógnitas, los números a_{ij} son los coeficientes de las incógnitas y los b_i son los términos independientes.

El conjunto de números reales ordenados $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ será **solución del sistema** si satisface todas las ecuaciones del mismo.

Independientemente del número de incógnitas y ecuaciones, estos sistemas pueden clasificarse del mismo modo que los de (2 × 2):

$$\text{Sistemas} \begin{cases} \text{Compatible} \begin{cases} \text{Determinado (S.C.D.)} \\ \text{Indeterminado (S.C.I.)} \end{cases} \\ \text{Incompatible (S.I.)} \end{cases}$$

Ejemplos:

- *El sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Solo tiene una solución: $x = y = z = 1$, y es **compatible determinado**.

- *El sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - 2y \quad = -1 \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones; aparte de la anterior: $x = y = z = 1$, podemos encontrar $x = -1$, $y = 0$, $z = 4$, o $x = 2$, $y = {}^3/_2$, $z = -½$ y muchas más. Es, por tanto, **compatible indeterminado**.

- *El sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

No puede tener solución, ya que la tercera ecuación se *contradice* con la primera (no pueden verificarse simultáneamente). Es, por tanto, un sistema **incompatible**.

La diferencia fundamental estriba en la **interpretación geométrica** de los sistemas. Si una ecuación lineal en x e y es una *recta en el plano*, al aumentar el número de incógnitas la figura geométrica cambia, pasando a ser un *plano en el espacio de tres dimensiones*:

$$\pi : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

y un *hiperplano* en dimensiones superiores.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

2.2. Sistemas homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es **HOMOGÉNEO** cuando el término independiente de todas las ecuaciones es igual a cero; es decir, $b_i = 0 \quad \forall\, i$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Todo sistema homogéneo es **compatible**, pues tiene al menos una solución, $x_i = 0 \ \forall\ i$.

Se llama **solución trivial** de un sistema homogéneo a la matriz columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En general, la solución trivial no suele tener interés.

Si el sistema es compatible indeterminado se suele trabajar para dejar el conjunto de soluciones en forma paramétrica, es decir, haciendo que una (o más) de las incógnitas se comporte como un parámetro libre y expresando las demás en función de ella.

Ejemplo:

- *El sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y \quad = 0 \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones; aparte de la trivial: $x = y = z = 0$, podemos encontrar $x = -2$, $y = -1$, $z = 3$, o $x = 2$, $y = 1$, $z = -3$ y es, como antes, **indeterminado**.

Para expresar el conjunto de soluciones en forma paramétrica, elegimos la incógnita que se pueda despejar más fácilmente, en este caso x. Simplemente sumando miembro a miembro las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y \quad = 0 \end{cases} \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_1]{} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x \quad + 2z = 0 \\ x - 2y \quad = 0 \end{cases}$$

y podemos despejar y y z en función de x:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot x \\ z = -\frac{3}{2} \cdot x \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} \cdot t \\ z = -\frac{3}{2} \cdot t \end{cases}$$

2.3. Sistemas equivalentes

Dos sistemas con el mismo número de incógnitas, aunque no tengan el mismo número de ecuaciones, se dice que son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero es solución del segundo, y viceversa.

Ejemplo:

- *Los sistemas*

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 3x+3y-2z=4 \\ x-y-3z=-3 \\ x+4y-3z=2 \end{cases}$$

Tiene ambos la misma solución: $x = y = z = 1$.

Para pasar de un sistema a otro equivalente, se pueden usar las siguientes **Transformaciones de Gauss**:

a) *Cambiar el orden de las ecuaciones del sistema.*

b) *Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero.*

c) *Suprimir una ecuación del sistema que sea combinación lineal de las demás.*

d) *Sustituir una ecuación por la suma de ella más otra ecuación multiplicada por un número real cualquiera.*

e) *Sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella y de las restantes, siempre que el coeficiente de la ecuación sustituida, en la combinación lineal, sea distinto de cero.*

Esta última transformación se conoce como **Teorema Fundamental de equivalencia de sistemas.**

Ejemplo:

- Transformemos el sistema

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y-3z=0 \\ 2x-y+z=2 \end{cases} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to 2F_1 - F_3}]{} \begin{cases} x+y+z=3 \\ y-4z=-3 \\ 3y+z=4 \end{cases}$$

Actividades propuestas

10. Determina si los sistemas siguientes son equivalentes o no:

a) $\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y=-2 \\ x+3y=-4 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x+3y-z=1 \\ 3x-y+4z=6 \\ 2x+2y+3z=7 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-9y+5z=-3 \\ x+3y-z=3 \\ x-y+z=2 \end{cases}$

11. Determina el valor de m para que los sistemas siguientes sean equivalentes:

a) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -x+my=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y=0 \\ x-2y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x+2y-3z=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x-y-z=m \\ -x+y+2z=2 \end{cases}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS:

3.1. Método de Gauss o de eliminaciones sucesivas:

Este método consiste en sustituir el sistema dado por otro equivalente, aplicando las transformaciones de Gauss, hasta conseguir un sistema escalonado.

Sistema escalonado: es aquél en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.

Dicho de otro modo, se trata de ir anulando coeficientes de las incógnitas hasta que sea posible organizarlos en una matriz triangular. Así, por ejemplo, si partiendo del sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \text{ llegamos al sistema: } \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

para resolverlo no tendríamos más que ir sustituyendo el valor de la variable obtenida en una ecuación en la ecuación anterior, y así sucesivamente.

Este método no se limita a la resolución de sistemas. Según las ecuaciones que obtengamos, nos permite saber si el sistema tiene o no solución y cuántas tiene.

Actividades resueltas

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \xrightarrow{E_2-2E_1} \\ 5x - y + 3z = 16 \xrightarrow{E_3-5E_1} \end{cases} \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 4y + 13z = 21 \xrightarrow{E_3+4E_2} \end{cases} \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 45z = 45 \end{cases}$$

El último sistema, como se ve, es escalonado. De la última ecuación obtenemos que $z = 1$, y sustituyendo sucesivamente en la segunda y en la primera obtenemos $y = 2$, $x = 3$. Se trata de un sistema compatible determinado (SCD).

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \xrightarrow{E_2-2E_1} \\ 3x - 2y + 2z = 10 \xrightarrow{E_3-3E_1} \end{cases} \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \\ y - 7z = -2 \xrightarrow{E_3-E_2} \end{cases} \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

En este caso, después de realizar las transformaciones de Gauss, resulta un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, un sistema compatible indeterminado (SCI).

Se trata de un sistema uniparamétrico, donde una de las incógnitas hace de parámetro y puede tomar cualquier valor. Las otras incógnitas tomarán valores dependiendo del valor que le demos al parámetro. Las soluciones se presentan de la forma:

$$\begin{cases} x = 2 + 4z \\ y = -2 + 7z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = k \\ x = 2 + 4k \\ y = -2 + 7k \end{cases}$$

(También podríamos haber observado que la tercera ecuación es suma de las otras dos)

Analicemos el sistema

$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x-y+3z=6 \\ 4x-2y+6z=9 \end{cases} \xrightarrow[E_3-4E_1]{E_2-2E_1} \begin{cases} x-y+z=3 \\ y+z=0 \\ 2y+2z=-3 \end{cases} \xrightarrow{E_3-2E_2} \begin{cases} x-y+z=3 \\ y+z=0 \\ 0=-3 \end{cases}$$

Como se ve la última ecuación es imposible, por tanto el sistema no tiene solución, es un sistema incompatible (SI).

(También podríamos haber observado que los coeficientes de la tercera ecuación son el doble de los de la segunda, pero el término independiente no está duplicado, lo que genera un absurdo).

Se ha obtenido en cada uno de los tres casos un sistema escalonado, pero de distinto tipo:

- En el caso A, tenemos tantas ecuaciones como incógnitas, y la última ecuación tiene solución. Se trata pues de un sistema compatible determinado (SCD), que tendrá una única solución.
- En el segundo caso, sistema B, tenemos más incógnitas que ecuaciones. Se trata de un sistema compatible indeterminado (SCI) y tendrá infinitas soluciones. En este caso, las soluciones vienen dadas en función de un solo parámetro, aunque puede haber sistemas con más de un parámetro.
- En el tercer caso, sistema C, la última ecuación es imposible, por tanto el sistema no tiene solución. Se trata de un sistema incompatible (SI).

Para discutir el sistema tendremos en cuenta la forma de la última ecuación transformada. Si partimos de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas obtendremos:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \ldots \\ \qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

A la hora de despejar x_n tenemos tres situaciones diferentes:

$$a'_{nn}x_n = b'_n \to \begin{cases} a'_{nn} \neq 0; & \Rightarrow x_n = b'_n / a'_{nn} \\ a'_{nn} = b'_n = 0; & \Rightarrow 0 \cdot x_n = 0 \\ a'_{nn} = 0, b'_n \neq 0; & \Rightarrow 0 \cdot x_n = b'_n \end{cases}$$

- La primera es trivial y no merece más explicación, el sistema puede resolverse.
- En la segunda vemos que cualquier valor de x_n satisface la ecuación. Por tanto hay infinitas soluciones y el sistema es indeterminado.
- Vemos que la última es claramente imposible (ningún valor multiplicado por cero puede dar un resultado diferente de cero) y el sistema es incompatible.

Por tanto, el análisis de la última ecuación queda:

$$a'_{nn}x_n = b'_n \to \begin{cases} a'_{nn} \neq 0; & \text{SCD} \\ a'_{nn} = b'_n = 0; & \text{SCI} \\ a'_{nn} = 0, b'_n \neq 0; & \text{SI} \end{cases}$$

Esto es precisamente lo que vimos en los tres ejemplos anteriores y que nos daban lugar a los tres tipos de sistemas.

Para el caso en el que el número de ecuaciones no coincida con el número de incógnitas podemos encontrar diferentes situaciones:

1. El número de incógnitas es menor que el de ecuaciones. Sea el sistema general:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

con $n < m$. Aplicaremos el método de Gauss a las m ecuaciones, intentando obtener $(m - n)$ ecuaciones de la forma 0 = 0, aunque no siempre se conseguirá:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \dots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \dots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & & & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ & & & & & & a'_{kn}x_n & = & b'_n \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & \dots & \ddots & \dots \\ & & & & & & 0 & = & b'_m \end{cases}$$

Entonces:

- Si después de la ecuación $a'_{kn}x_n = b'_k$, con $a'_{kn} \neq 0$, el resto son ecuaciones de la forma 0 = 0, el sistema es compatible determinado.
- Si antes de la n–ésima ecuación aparecen las igualdades 0 = 0 ($a'_{kn}x_n = b'_k \Rightarrow a'_{kn} = b'_k = 0$), el sistema es compatible indeterminado.
- Si alguna igualdad es de la forma $0 = b'_k$, el sistema es incompatible.

2. El número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones. En este caso el sistema nunca será compatible determinado. *A priori*, se tratará de sistemas compatibles indeterminados, pero si alguna ecuación es *contradictoria* con otra el sistema será (obviamente) incompatible. Si estas ecuaciones incoherentes están muy separadas en el sistema, serán difíciles de encontrar, lo que hace que el Método de Gauss no sea la mejor opción.

Actividades propuestas

12. Analiza y resuelve mediante el método de Gauss los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+2y+3z=-9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ -x+3y+3z=2 \\ x-3y+4z=5 \\ -2x-3y-3z=-5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+3z=3 \\ x+3y+2z=0 \\ 2x+3y+z=-1 \\ x-3y-3z=5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y+3z=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+y+3z=3 \\ 2x+2y+6z=1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} w-x+y+z=5 \\ w+x-y-z=3 \end{cases}$

4. EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

podemos expresarlo como producto de matrices, $A \cdot X = B$, de esta forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Esta igualdad se denomina **expresión matricial de un sistema**.

A recibe el nombre de **matriz de coeficientes** o **matriz del sistema**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

B se denomina **matriz de los términos independientes**:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Y llamamos matriz X a la matriz columna formada por las incógnitas

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A partir de las matrices A y B definimos la matriz ampliada:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Actividad resuelta

- Plantea matricialmente el sistema $\begin{cases} 6x + my = 15 \\ 3x + 2my = 8 \end{cases}$

  Simplemente escribimos: $A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & m \\ 3 & 2m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Plantea el sistema cuyas matrices de coeficientes y de sus términos independientes son:

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Como A y B son matrices de dimensiones (2×2) y (2×1), la matriz de incógnitas debe ser:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Planteamos la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

operamos:

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \cdot x + (-2) \cdot y \\ a \cdot x + (a-1) \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e igualamos los términos de las matrices para obtener el siguiente sistema:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{cases} a\,x - \quad 2\,y = 4 \\ a\,x + (a-1)\,y = 4 \end{cases}$$

4.1. Resolución de sistemas mediante la matriz inversa:

La expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales nos ofrece otro mecanismo de resolución del sistema a partir de la matriz inversa de la matriz de los coeficientes.

Si la matriz A tiene matriz inversa, es decir, si se cumple que:

- $m = n$: el sistema tiene que tener tantas ecuaciones como incógnitas, es decir, la matriz de los coeficientes debe ser cuadrada.
- $|A| \neq 0$: el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser distinto de cero, para que la matriz tenga inversa.

Podemos escribir:

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} A \cdot X = A^{-1} B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} B \Rightarrow \quad X = A^{-1} B$$

Actividad resuelta

Resuelve mediante la matriz inversa el sistema

$$\begin{cases} 6\,x + y = 15 \\ 2\,x + 2\,y = 8 \end{cases}$$

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante de A vemos que vale $|A| = 10$, por tanto podemos hallar la inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Y multiplicamos por A^{-1} por la izquierda:

$$X = A^{-1} B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}$$

4.2. Teorema de Rouchè-Fröbenius:

Si recapitulamos todo lo aprendido, en concreto las situaciones que fuimos viendo acerca de cuándo un sistema es compatible determinado, obtenemos la condición necesaria para que el sistema tenga una única solución.

Consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

para el que las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

El **teorema de Rouchè-Fröbenius** dice: "La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas sea compatible (tenga solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada".

Si estudiamos los rangos de las matrices nos podemos encontrar con las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \text{Sist. Compatible} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{rg}(A) = n & \text{SCD} \\ \mathrm{rg}(A) < n & \text{SCI} \end{cases} \\ \mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \text{Sist. Incompatible} \end{cases}$$

<u>Aplicación a Sistemas Homogéneos</u>:

Un sistema homogéneo tendrá siempre solución, ya que el rango de A siempre coincide con el de A*, pues la última columna de la matriz ampliada son ceros. La solución será única (la trivial) si el rango de A es igual al número de incógnitas, y tendrá infinitas soluciones si el rango de A es menor que el número de incógnitas.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

Un sistema homogéneo es siempre COMPATIBLE.

En el caso particular $n = m$, un sistema homogéneo tendrá sólo la solución trivial si el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

4.3. Método de Gauss y expresión matricial

Utilizando las matrices asociada y ampliada podemos simplificar el método de Gauss visto antes. Bastará con partir de la matriz ampliada e ir escalonándola mediante transformaciones elementales:

Ejemplo:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ -x+y-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

En este sistema la última ecuación, que corresponde a la última fila de la matriz, es

$$-2z=0 \Rightarrow z=0$$

Por tanto el sistema tiene solución única:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ -x+y-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-4 \\ z=0 \end{cases}$$

Curiosidad:

Aunque este método se denomina *de Gauss*, hay evidencias de que se conocía en la antigua China en el siglo III antes de Cristo (desde donde llegó a Babilonia, Grecia, India,…) y fue Isaac Newton el primero en desarrollarlo en su forma moderna. Pese a que no quiso publicarlo, durante el siglo XVIII muchos libros de matemáticas lo denominaban Método de Newton. Otros matemáticos como Leonhard Euler no lo recomendaban o bien, como ocurría con Henri Lebesgue, lo tenían como "ordinario". Para el propio Gauss, simplemente era un método "muy conocido" y lo utilizó para resolver varios problemas pero, precisamente por ser *tan conocido*, sin dar muchos detalles de haberlo usado.

El nombre actual le llega después de la Segunda Guerra Mundial, sin que esté muy claro el motivo, cuando ya estaba emparejado al uso de matrices.

El método de Gauss también nos permite ***discutir*** los sistemas en función de los distintos valores que tome un parámetro determinado ya que, como vimos, es un método para determinar rangos.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-aF_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

De la última ecuación $(2-a-a^2)z=1-a$ deducimos los valores del parámetro *a* que nos pueden hacer que el sistema tenga o no solución, y en el caso de que tenga solución de que sea o no una única solución.

Como vimos en la sección 3.1, tendremos que determinar los valores de a que hacen nulo al último coeficiente y si esos valores coinciden o no con el valor que anula el término independiente.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

4.4. Análisis de un sistema por el método de Gauss

Analicemos de forma genérica un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en forma matricial. Comentábamos antes que estamos intentando convertir el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

en el sistema equivalente:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

Para un sistema genérico en forma matricial, se trata de convertir la matriz ampliada en:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

o, si hay más incógnitas que ecuaciones, en:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\; a_{1\,k+1} \cdots a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k}\; a'_{2\,k+1} \cdots a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mk}\; a'_{m\,k+1} \cdots a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

Antes explicamos que esta situación con más incógnitas que ecuaciones era el *punto flaco* del método, así que vamos a centrarnos en el caso $m \geq n$. Para discutir el sistema analizamos la última ecuación. En este caso, analizamos la última fila, y llegamos a dos situaciones diferentes:

- ***Caso 1:***

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right) \quad \text{con } a'_{mn} \neq 0$$

Observamos que **los rangos** de las matrices A y A^* son iguales, e iguales al número de ecuaciones y todo dependerá del número de incógnitas.

- ***Caso 2:***

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right) \text{ con } b'_m \neq 0$$

Observamos que **los rangos** de las matrices A y A^* no coinciden.

Recuperemos el ejemplo anterior:

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Analizamos el último término, que corresponde a la ecuación $(2-a-a^2)z=1-a$, y deducimos los valores del parámetro *a* que nos pueden dar una solución válida. Como vimos, todo depende de cuándo ese coeficiente es nulo, por tanto:

$$2-a-a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

Con lo que deducimos:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado (SCD), ya que el coeficiente de z es distinto de cero, y podemos despejar:

$$z=\frac{1-a}{2-a-a^2}=\frac{1-a}{(1-a)\cdot(a+2)}=\frac{1}{a+2}$$

(podemos simplificar porque $a \neq 1$)

de donde, mirando la segunda ecuación transformada:

$$(a-1)\cdot y+(1-a)\cdot z=0 \Rightarrow y=z \Rightarrow y=\frac{1}{a+2}$$

y, finalmente, llegando a la primera:

$$x+y+az=1 \Rightarrow x=1-y-az \Rightarrow x=1-\frac{1}{a+2}-\frac{a}{a+2}=\frac{a+2-1-a}{a+2}=\frac{1}{a+2}$$

Es decir:

$$x=y=z=\frac{1}{a+2}$$

En la mayoría de los ejercicios y problemas que resolveremos no será necesario hallar las expresiones de x, y y z en función de los parámetros. Habitualmente nos plantearán el problema de discutir en función del parámetro y resolver para valor (o valores) concreto/s del mismo.

- Si $a=1$, la última ecuación es de la forma $0=0$ (en este caso también la segunda ecuación) por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

En este caso se trata de un sistema biparamétrico, dos de las incógnitas hacen de parámetros y la tercera toma valores en función de ellas (es un Sistema Compatible Indeterminado):

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases} \xrightarrow[a=1]{} \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow z=1-x-y \Rightarrow \begin{cases} x=t \in \mathrm{R} \\ y=u \in \mathrm{R} \\ z=1-t-u \end{cases}$$

- Si $a=-2$, la última ecuación queda $0=3$, situación que es imposible y el sistema no tiene solución (es un Sistema Incompatible).

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

4.5. Regla de Cramer

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es un **sistema de Cramer** si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y además el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas es distinto de cero.

Ejemplos:

$$\begin{cases} x-y=4 \\ -x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1=0$$ **NO** es sistema de Cramer

$$\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2=3\neq 0$$ **SÍ** es sistema de Cramer.

La **Regla de Cramer** dice que: "un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, en el cual el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, admite una solución y sólo una, es decir, es un sistema compatible determinado".

Vamos a ver cómo se calcula esta solución por el **método de Cramer**: Consideremos un sistema de n ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

La expresión matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Al ser un sistema de Cramer, el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero y por tanto admite inversa, A^{-1}. Multiplicando los dos miembros de la ecuación por la inversa de A, tenemos:

$$A\cdot X = B \to A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Operando las matrices e igualando los términos correspondientes tenemos:

$$x_1 = \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}}{|A|} \qquad x_2 = \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2}}{|A|}$$

hasta llegar a la última incógnita:

$$x_n = \frac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn}}{|A|}$$

Observamos que los numeradores de estas fracciones son los desarrollos de ciertos determinantes por los elementos de una línea, con lo cual tenemos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \;\; \ldots\ldots \;\; x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

En cada una de las fracciones el determinante del numerador es el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas cambiando, en cada caso, la columna correspondiente a la incógnita x_i por los términos independientes. El denominador en todos los casos es el determinante de la matriz de los coeficientes.

Podemos simplificar esas expresiones si representamos por Δ_1, Δ_2,… Δ_n, los determinantes de los numeradores:

La **solución de un sistema de Cramer** puede calcularse como:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}$$

siendo Δ_i el determinante que resulta de sustituir la columna de la incógnita i–ésima por la matriz de términos independientes:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Esta nomenclatura genérica queda más clara cuando tenemos los sistemas con las incógnitas habituales $(x, y, z, \ldots)$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

En este caso, las soluciones quedan así:

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|} \quad , \quad y = \frac{\Delta_y}{|A|} \quad , \quad z = \frac{\Delta_z}{|A|}$$

siendo:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

En ocasiones se representa por Δ al determinante del sistema, que sabemos que no puede ser nulo:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Actividades resueltas

- *Expresa en forma matricial los siguientes sistemas y comprueba que son sistemas de Cramer.*

a) $\begin{cases} -4x+3y=-5 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y+2z=-3 \\ 2x+y \quad =3 \\ x+3y-4z=3 \end{cases}$

Resuélvelos utilizando la regla de Cramer.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} -4x+3y=-5 \\ 3x-4y=2 \end{cases} \Rightarrow A\cdot X=B \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada quedan:

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Veamos si es un sistema de Cramer:

$$|A|=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=16-9=7\neq 0 \Rightarrow \text{es un sistema de Cramer}$$

Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{7}=\frac{20-6}{7}=\frac{14}{7}=2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{7}=\frac{-8+15}{7}=\frac{7}{7}=1$$

La solución es: $\{x=2\ ;\ y=1\}$

(b) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} y+2z=-3 \\ 2x+y \quad =3 \\ x+3y-4z=3 \end{cases} \Rightarrow A\cdot X=B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Veamos si es un sistema de Cramer:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=12-(2-8)=12-(-6)=12+6=18\neq 0 \Rightarrow \text{Es un sistema de Cramer}$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}=36 \quad , \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-18 \quad , \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=-18$$

Finalmente:

$$x=\frac{36}{18}=2 \quad , \quad y=\frac{-18}{18}=-1 \quad , \quad z=\frac{-18}{18}=-1$$

Es decir, la solución del sistema queda:

$$\{x=2, y=-1, z=-1\}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Planteamiento de problemas

En este tema es **fundamental** saber plantear un problema a partir de un enunciado de texto. La clave para ello es saber **LEER** y **TRADUCIR** adecuadamente toda la información que se da en un problema, **ESCRIBIENDO** correctamente lo que estamos leyendo. Nunca se escribe demasiado y nunca un problema está demasiado explicado a la hora de intentar resolverlo.

Ejemplo:

Una determinada empresa hace una prueba de selección que consiste en un test de 90 preguntas. Por cada acierto dan 6 puntos, por cada fallo quitan 2,5 puntos y por cada pregunta no contestada quitan 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos. ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos y que el número de aciertos más el de preguntas no contestadas sea igual al doble del número de fallos?

Empezamos definiendo (y lo escribimos claramente):

x = nº de preguntas contestadas correctamente

y = nº de preguntas contestadas erróneamente

z = nº de preguntas no contestadas

A continuación, vamos *troceando* el problema:

- El test consta de 90 preguntas, por tanto deducimos que: $x+y+z=90$
- Por cada acierto dan 6 puntos, por cada fallo quitan 2,5 puntos y por cada pregunta no contestada quitan 1,5 puntos:
$$6\cdot x-2{,}5\cdot y-1{,}5\cdot z=210$$
- Para que el número de aciertos más el de preguntas no contestadas sea igual al doble del número de fallos:
$$x+z=2y\Rightarrow x-2y+z=0$$

Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=90 \\ 6x-2{,}5y-1{,}5z=210 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

y, desde este momento, sólo tenemos que aplicar lo aprendido en el tema:

- Planteamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.
- Comprobamos si es un sistema de Cramer (que el determinante del sistema no sea nulo)
- Resolvemos con el método de Cramer.

Actividad propuesta

13. Resuelve el sistema anterior y comprueba que el aspirante deberá contestar 50 preguntas correctamente, 30 erróneamente y dejar 10 preguntas sin contestar para alcanzar los 210 puntos.

CURIOSIDADES. REVISTA

Algunas biografías

Gabriel Cramer

Gabriel Cramer nació en Ginebra el 31 de julio de 1704 y murió el 4 de enero de 1752.

Mostró gran precocidad en matemática, a los 18 años se doctoró con una tesis sobre la teoría del sonido, y a los 20 años era profesor adjunto de matemáticas.

Fue profesor de matemática de la Universidad suiza de Ginebra durante el periodo 1724-27. En 1750 ocupó la cátedra de filosofía en dicha universidad.

En 1731 presentó ante la Academia de las Ciencias de París, una memoria sobre las múltiples causas de la inclinación de las órbitas de los planetas.

Gabriel Cramer (1704-1752).

Visitó varios países para conocer y trabajar con matemáticos de su época: Euler, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Halley, de Moivre, Stirling, y otros matemáticos. Sus conversaciones y posterior correspondencia son de gran interés.

La **Regla de Cramer** es un teorema en álgebra lineal, que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de **determinantes**. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer, que publicó la regla en su *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de 1750, obra en la que desarrolla la teoría de las curvas algebraicas según los principios newtonianos. Aunque **Colin Maclaurin** también publicó el método en su *Treatise of Geometry* de 1748 (y probablemente sabía del método desde 1729). Los determinantes ya habían sido usados por Leibniz.

Eugène Rouché

Eugène Rouché (1832-1910) nació en Sommières, al sur de Francia, el 18 de agosto de 1832 y murió en Lunel en 1910. Era hijo de un terrateniente. Estudió en la "Ècole Polytechnique" donde consiguió el doctorado en ciencias. Fue un famoso matemático francés, profesor en el *"Lycée Charlemagne*" y en el Conservatorio de Artes y Oficios de París. En 1873 fue nombrado presidente de la *Societé Mathematique* de Francia y más tarde, en 1896, fue elegido miembro de la Academia de Ciencias francesa. Es conocido por ser el autor del Teorema de Rouché sobre análisis complejo y coautor del resultado conocido en los países de habla hispana como **Teorema de Rouché–Frobenius**. Se conoce poco de su vida, pero se sabe que escribió varios artículos publicados en prestigiosas revistas, además de libros de texto y obras didácticas como: *Traité de géométrie élémentaire* (1874), *Éléments de Statique Graphique* (1889), C*oupe des pierres: précédée des principes du trait de stéréotomie* (1893), *Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs* (1900-02). Uno de esos artículos es el que publicó en "*Journal of the Ècole Polytchnique*" en 1862, donde aparece su célebre teorema sin demostrar. Por tanto fue el primero en enunciarlo, aunque otros autores, como Georges Fontené también enunció este teorema y reivindicó su autoría.

F.G. FROBENIUS

Ferdinand Georg Frobenius

Ferdinand Georg Frobenius, hijo de un pastor protestante, nació en el lujoso barrio berlinés de Charlottemburg el 26 de octubre de 1849 y murió en Berlín el 3 de agosto 1917.

Tras graduarse en el Joachimsthal Gymnasium, en 1867 fue a la Universidad de Göttingen. Siguió sus estudios en la Universidad Humboldt de Berlín, donde obtuvo su doctorado con una tesis sobre la solución de las ecuaciones diferenciales bajo la dirección de Karl Weierstrass.

Fue profesor en distintos sitios: Berlín, Zürich…

Matemático alemán reconocido por sus aportaciones tanto a la teoría de las ecuaciones diferenciales como a la teoría de grupos, así como al teorema planteado por Eugène Rouché que conoces con el nombre de teorema de Rouché-Frobenius.

En 1905, Fröbenius discrepó tanto del teorema enunciado por Rouché como del enunciado y demostrado por Fontené y propuso una demostración alternativa.

Otras obras suyas en el campo del álgebra han contribuido a establecer la llamada ley de reciprocidad de Frobenius y los grupos de Frobenius. Estos trabajos se encuadran principalmente en la teoría algebraica de los grupos finitos y la sistematización del álgebra mediante procedimientos de lógica matemática y axiomática.

El nombre de teorema de Rouché – Fröbenius se debe al matemático español ***Julio Rey Pastor***.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Cuadrados mágicos

Se pueden usar sistemas de ecuaciones para confeccionar cuadrados mágicos.

En un cuadro de Durero y en la Sagrada Familia de Barcelona tienes un cuadrado mágico.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

RESUMEN

		Ejemplos
Sistema de ecuaciones lineales	Se denomina sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas al conjunto de relaciones: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$
Sistema homogéneo	Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo cuando el término independiente de todas las ecuaciones es igual a cero.	$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$
Sistemas equivalentes	Dos sistemas con el mismo número de incógnitas, aunque no tengan el mismo número de ecuaciones, se dice que son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones**, es decir, toda solución del primero es solución del segundo, y viceversa.	$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-2y=-2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ Verifican $x = 1$; $y = 2$
Expresión matricial de un sistema	Todo sistema puede expresarse como producto de matrices en la forma $A \cdot X = B$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$	$\begin{cases} 6x+y=15 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ $A \cdot X = B \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$
Resolución por inversa	$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$	
Teorema de Rouchè-Fröbenius	El **teorema de Rouchè-Fröbenius** dice: "La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas sea compatible (tenga solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada".	$\begin{cases} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{rg}(A) = n & \text{SCD} \\ \mathrm{rg}(A) < n & \text{SCI} \end{cases} \\ \mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \text{S.I.} \end{cases}$
Regla de Cramer	La **solución de un sistema** puede calcularse como: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\lvert A \rvert}$ Si $\lvert A \rvert \neq 0$ Siendo Δ_i el determinante que resulta de sustituir la columna de la incógnita i–ésima por la matriz de términos independientes.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ $x = \dfrac{20}{10} = 2 \quad y = \dfrac{10}{10} = 1$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación o de Gauss:

a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+6y-z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

2. – Dados los sistemas:

a) $\begin{cases} -4x+3y=-5 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=-4y \\ 5+2y=3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y+2z=-3 \\ 2x+y \quad =3 \\ x+3y-4z=3 \end{cases}$

a) Exprésalos en forma matricial y comprueba que son sistemas de Cramer.

b) Resuélvelos utilizando la matriz inversa y aplicando la regla de Cramer.

3. – Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -2x+y=-3 \\ 6x-3y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x-6y=-6 \\ -2x+3y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ 9x-6y=6 \\ 6x+4y=3 \end{cases}$

4. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando, si es posible, la Regla de Cramer:

a) $\begin{cases} -x-2y+3z=6 \\ 3x-4y+2z=7 \\ 4x+y-z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+z=-29 \\ 3x+y-5z=21 \\ -x+2y-4z=32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

5. – Discute y resuelve los sistemas en los casos que sea posible:

a) $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-az=2 \\ x+y+az=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}$

6. – Dado el sistema

$$\begin{cases} (a+2)x+(a-1)y-z=3 \\ ax-y+z=3 \\ x+ay-z=1 \end{cases}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvelo para el caso $a=-1$.

7. – Dadas las ecuaciones

$$\begin{cases} 6x-9y+2z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{cases}$$

se pide:

a) Añade una ecuación para que resulte un sistema incompatible.

b) Añade una ecuación para que resulte un sistema compatible determinado.

8. – Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$$

se pide:

a) Discútelo y resuélvelo, cuando sea posible.

b) Añade una ecuación lineal para que el sistema resultante tenga:

i) una solución

ii) muchas soluciones

iii) no tenga solución

9. – Discute y resuelve los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ -2x-3y+z=0 \\ 3x+2y+4z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 2y-z=0 \\ -2x+3y-4z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=x+3z-y \\ x=z-2y+x \\ z=x-2y-2z \end{cases}$

10. – Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcula cada uno de los tres productos $A{\cdot}B$, $E{\cdot}D$, $D{\cdot}E$.

b) Si $C-2AB=-D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

11. – Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que $(AB-C)D=2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a.

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

c) Para $a=0$ encuentra una solución del sistema con $z\neq 0$

12. – El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 €. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

13. – Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en ésta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en ésta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1550 euros.

14. – La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. ¿De qué número se trata?

15. – Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener por lo menos 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los 150 puntos y que el número de fallos más el quíntuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

16. – En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

17. – Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la edad de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.

18. – Una persona invirtió 72000 € repartidos en tres empresas y obtuvo 5520 € de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10 % en la empresa A, el 8 % en la empresa B y el 5 % en la empresa C.

19. – Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?

20. – Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

21. – En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros dos.

22. – En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1,20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1,18 euros/litro, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que es de m euros/litro). También recuerda que:

- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46,80 € al gasto en C.
- el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.
- el gasto de litros en A superó al de B en 12,60 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de m. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

23. – En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.

a) ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?

b) Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

AUTOEVALUACIÓN

Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2z+2y=5 \\ 2y-x+z=11 \end{cases}$

1.- Su matriz de coeficientes es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Su matriz ampliada es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$

3.- Si aplicamos el método de Gauss la nueva matriz ampliada obtenida es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right)$

4.- El sistema es:

a) compatible determinado b) compatible indeterminado c) incompatible d) tiene tres soluciones

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x-y=-4y \\ 5+2y+z=3x \end{cases}$

5.- Su forma matricial es:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4y \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

6.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible determinado

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $-3x+2y+z=7$

7.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible indeterminado

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $-3x+2y+z=7$

8.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es incompatible

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $x+y+z=7$

9.- Indica la afirmación que es correcta:

a) Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.

b) Dos sistemas son equivalentes si coincide alguna de sus soluciones.

c) Un sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.

d) Todos los sistemas se pueden resolver por el método de Cramer.

Apéndice: Problemas de matrices en las P.A.A.U.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+2z=5 \\ 2x-y+z=11 \end{cases}$$

a) Obtén su matriz de coeficientes.

b) Calcula el determinante de la matriz anterior.

c) Sin resolver el sistema, razonar si tendrá solución única.

(2) En el primer curso de un centro de la Universidad de Oviedo se han matriculado 352 alumnos divididos en tres titulaciones distintas. En la tercera titulación hay la tercera parte de alumnos que en la primera, y la diferencia de alumnos que hay entre la primera titulación y la segunda es inferior en dos alumnos al doble de los alumnos que hay en la tercera.

a) Establece un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de alumnos en cada titulación, y obtén el número de alumnos que hay en cada titulación.

b) Calcula el determinante de la matriz del sistema.

(3) En un partido de baloncesto femenino, el equipo de la Universidad de Oviedo ganó al de otra universidad española con un marcador 64 a 48. El marcador obtenido por el equipo ganador se consiguió mediante canastas de dos puntos, triples (canastas de tres puntos) y tiros libres (canastas de un punto). El número de tiros libres fue dos más que cinco veces el número de triples. Además, el número de canastas de dos puntos fue dos más que el número de tiros libres.

a) Plantea el sistema de ecuaciones resultante de lo anterior.

b) Escribe la matriz ampliada del sistema obtenido en a).

c) ¿Cuántas canastas de cada tipo metió el equipo de la Universidad de Oviedo?

(4) Cada acción de BBA ha dado una ganancia de 6 euros y cada acción de NKO ha dado una ganancia de m euros. Un inversor había comprado acciones de ambos tipos, lo que le supuso una ganancia total de 800 euros, pero está arrepentido de su inversión, porque si hubiese comprado la mitad de acciones de BBA y el doble de NKO, su ganancia total habría sido de 1150 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de acciones compradas de cada tipo. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema, ¿existe algún valor de m para el que el sistema tenga más de una solución?

b) Si la ganancia por cada acción de NKO fue de 5 euros, ¿cuántas acciones de NKO había comprado?

(5) Una tienda vende bolsas de caramelos a 2 euros cada una y bolsas de gominolas a 4 euros cada una. La recaudación de un determinado día por estos dos conceptos ha ascendido a 200 euros y se sabe que el número de bolsas de caramelos que han vendido ese día es m veces el número de bolsas de gominolas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de bolsas de cada tipo que se han vendido ese día. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que se hayan vendido el doble de bolsas de caramelos que de gominolas?

b) Suponiendo que se han vendido el triple de bolsas de caramelos que de gominolas, ¿cuántas bolsas de gominolas se han vendido?

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

(6) Un tren realiza un viaje directo entre dos capitales. El viaje lo realiza por dos tipos de vías, por la primera circula siempre a 100 Km/h y por la segunda circula siempre a m Km/h. El recorrido total del viaje es de 1240 Km y la duración del mismo es de 11 horas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de horas que circula por cada tipo de vía. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía sea también de 100 Km/h?

b) Suponiendo que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía es 120 Km/h, ¿cuánto tiempo ha estado circulando por el primer tipo de vía?

(7) Una academia de idiomas da clases de español a un total de m alumnos, entre los de nivel básico y los de nivel avanzado, con los que recauda 3000 euros. Los alumnos de nivel básico pagan m euros al mes, mientras que los de nivel avanzado pagan el doble.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de alumnos de cada tipo en las clases de español de la academia. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los alumnos de nivel básico paguen 40 € al mes?

b) Si los alumnos de nivel básico pagan 50 euros al mes, ¿cuántos alumnos de nivel avanzado hay?

(8) Juan y Luis son dos amigos que en total tienen 10 hijos. Un tercer amigo, Javier, tiene m hijos más que Juan y m veces los de Luis.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de hijos de Juan y Luis. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) Si Javier tiene el doble de hijos que Luis, ¿cuántos hijos tiene Luis?

(9) Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantea un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resuelve el problema.

(10) Considera el sistema

$$\begin{cases} ax - ay + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = a \\ -ax + 3y - z = 2 \end{cases}$$

a) Estudia su compatibilidad según los distintos valores del número real a.

b) Resuélvelo, si es posible, en el caso $a = 1$.

(11) Dado el sistema

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1 + a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvelo cuando $a = 0$.

(12) La matriz ampliada asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales es:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Obtener las ecuaciones del sistema.

b) Calcular el rango de la matriz formada por los coeficientes del sistema.

c) Sin resolver el sistema, deducir razonadamente si admite soluciones y en qué número.

(13) La matriz de los coeficientes de un sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{pmatrix}$ y la de términos independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valor o valores de a el sistema no tiene solución?

b) Para cierto valor de a un individuo encontró 2 soluciones del sistema. ¿Cuánto valía a? ¿Tenía más soluciones el sistema?

c) Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga solución única y, para dicho valor, resuélvelo.

(14) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

donde x, y, z son desconocidos.

a) Calcular las matrices $(A \cdot B) + C$ y $3D$

b) Sabiendo que $(AB) + C = 3D$, plantear un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z.

c) Estudiar la compatibilidad del sistema ¿Cuántas soluciones tiene?

d) Encontrar, si es posible, una solución.

(15) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde a es desconocido.

a) Sea el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes es A y de términos independientes B. ¿Puede para algún valor de a no tener solución este sistema? ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución única?

b) Si la matriz de coeficientes es A pero la de términos independientes es C, ¿es posible que para algún valor de a el sistema no tenga solución? Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga más de una solución y calcula dos de ellas.

(16) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix} \quad , \quad D=10\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad , \quad E=\begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$$

a) Calcula cada uno de los tres productos $A{\cdot}B$, $D{\cdot}E$, $E{\cdot}B$.

b) Si $AB+C=D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

(17) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$$

a) Si $AB-C=D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de a.

b) ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución? ¿Es siempre única? Encuentra una solución para $a=1$ con $y \neq 1$

(18) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D=\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que $AB = 2C - D$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) donde a es cierto valor desconocido.

b) Si se supiera que el sistema tiene solución, ¿podríamos descartar algún valor de a?

c) Si se supiera que el sistema tiene solución única, ¿podríamos descartar algún valor de a?

d) ¿Hay algún valor de a para el que el sistema tenga más de una solución?

(19) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad E=\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que $(AB-C)D=2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a.

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

c) Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$

(20) Halla todas las soluciones de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas del que se conoce que $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$ son soluciones y el rango de la matriz de los coeficientes es mayor o igual que uno

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo

Matemáticas II.
2º Bachillerato.
Capítulo 4: Geometría en el espacio – Vectores

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisora: Milagros Latasa

Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *sofware* libre (GeoGebra y GIMP)

Índice

Resumen

En este capítulo vamos a estudiar los vectores en el espacio de dimensión tres, que tienen muchas aplicaciones tanto en Geometría como en Física.

Ya conoces de los vectores en dimensión dos, el módulo de un vector que usábamos para calcular distancias, y el ángulo entre dos vectores, que usábamos para medir ángulos. Volveremos a estudiarlos ahora en dimensión tres.

Mediante el producto vectorial, que sólo es posible en dimensión tres, calcularemos áreas, y con el producto mixto, volúmenes.

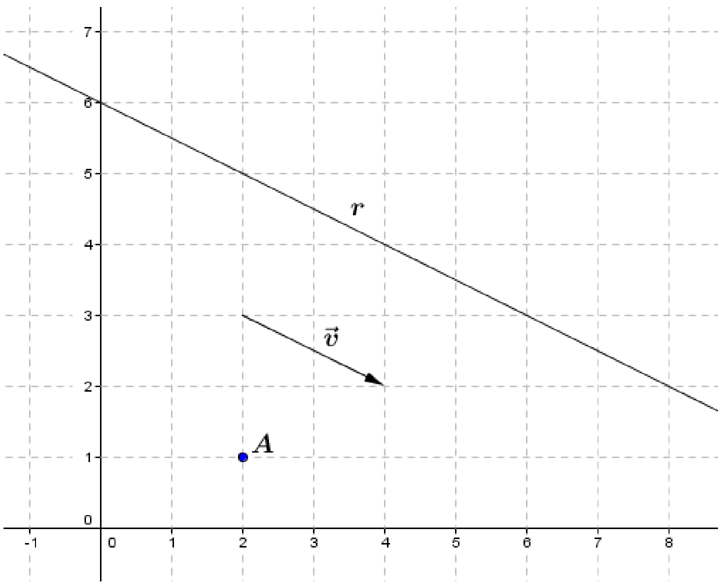
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

1. GEOMETRÍA DEL PLANO

A lo largo de los cursos pasados estudiamos la geometría del plano, con los siguientes elementos fundamentales:

- **Punto**: Posición en el plano que, por convenio, definimos como adimensional (no tiene largo, ancho ni profundidad). Para representarlo algebraicamente utilizamos letras mayúsculas, por ejemplo hablamos de un punto A, y se caracteriza mediante dos valores que denominamos x e y, representados por el par ordenado: (x, y). y que llamamos **coordenadas** del punto.
- **Vector (o vector libre)**: Viene dado por un par de valores llamados **componentes** (o coordenadas) del vector que escribimos como (v_1, v_2) en general o (v_x, v_y) si estamos en un sistema cartesiano. Lo caracteriza su módulo, dirección y sentido.
- **Recta**: figura en el plano que únicamente tiene longitud, no tiene anchura ni profundidad. Se suele representar con una letra minúscula, habitualmente r, y se define a partir de un punto P (x_P, y_P) y un vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Algebraicamente se obtienen diferentes ecuaciones:
  - Vectorial: $(x, y) = (x_P, y_P) + \lambda \cdot (v_x, v_y)$
  - Paramétricas: $\begin{cases} x = x_P + \lambda \cdot v_x \\ y = y_P + \lambda \cdot v_y \end{cases}$
  - Continua: $\dfrac{x - x_P}{v_x} = \dfrac{y - y_P}{v_y}$
  - General o implícita: $A\,x + B\,y + C = 0$

Ejemplo



En la imagen vemos el punto A, de coordenadas $(2, 1)$, el vector $\vec{v}$, de componentes $(2, -1)$, y la recta r, de ecuación $x + 2y = 12$.

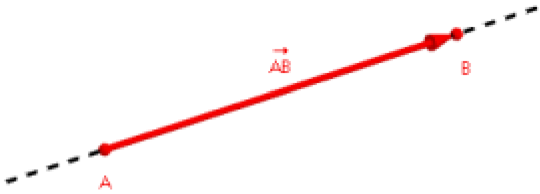
En este capítulo y los siguientes ampliaremos esos elementos hacia las tres dimensiones, generalizando los conceptos anteriores y añadiendo otros nuevos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

2. VECTORES EN EL ESPACIO

2.1. Definición

Un **vector fijo** en el espacio es un segmento orientado que viene determinado por un par de puntos, el origen A y el extremo B.

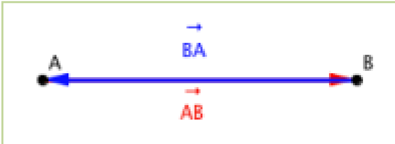


Los elementos de un vector son los siguientes:

- **Módulo:** Es la longitud del segmento orientado que lo define. El módulo de un vector será un número positivo, a excepción del vector nulo, que tendrá módulo cero.
- **Dirección:** Es la dirección de la recta que contiene al vector o cualquier recta paralela a ella. Dos vectores tendrán la misma dirección si están situados sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.
- **Sentido:** Es la forma de recorrer el segmento AB, es decir, de fijar qué punto es el origen y cuál el extremo.

En el conjunto de los vectores libres podemos definir una relación de equivalencia, diciendo que pertenecen a la misma clase aquellos vectores fijos de igual módulo, dirección y sentido. Todos los vectores fijos de igual módulo, dirección y sentido forman un mismo **vector libre**.

Dos puntos A y B determinarán dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, con el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto.

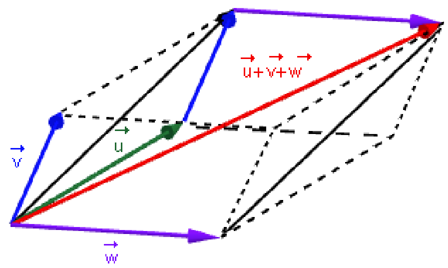


2.2. Operaciones con vectores

Suma de vectores

Dados dos vectores en el espacio $\vec{u}$ y $\vec{v}$, su suma es otro vector $\vec{u}+\vec{v}$.

Para sumar dos vectores gráficamente, se toman vectores equivalentes a ellos de manera que el extremo del primero coincida con el origen del segundo.



Este procedimiento se puede usar para sumar varios vectores. En este caso, se toman vectores equivalentes tales que el extremo de cada uno coincida con el origen del siguiente. El vector suma tiene como origen, el origen del primer vector, y como extremo, el extremo del último vector.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Opuesto de un vector

Dado un vector en el espacio $\vec{v}$, su vector opuesto se denota por $-\vec{v}$ u $\mathrm{Op}(\vec{v})$ y es otro vector con el mismo módulo, la misma dirección pero sentido contrario a $\vec{v}$.

Resta de vectores

Dados dos vectores en el espacio $\vec{u}$ y $\vec{v}$, su diferencia es otro vector $\vec{u}-\vec{v}$.

Restar un vector es lo mismo que sumar el vector opuesto.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Producto de un vector por una constante

Dada una constante k y un vector $\vec{v}$, su producto es otro vector con la misma dirección, el mismo sentido si $k > 0$ o sentido contrario si $k < 0$, y cuyo módulo es k veces el módulo del vector $\vec{v}$.

$$k \cdot \vec{v} = \overrightarrow{k \cdot v}$$

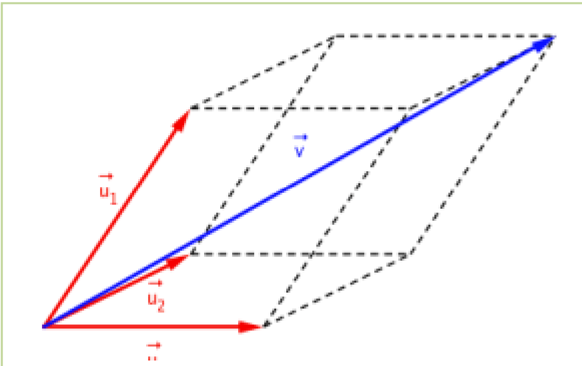
Combinación lineal de vectores

Un vector $\vec{v}$ es **combinación lineal** del los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ cuando existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Re$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son linealmente **independientes** cuando ninguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los demás.

Ejemplo

- *El vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.*



Ya que se obtiene como suma de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$

2.3. Base de un sistema de vectores

Definición:

Se dice que el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ forman una **base** del espacio de dimensión *n*, y se denota por $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ cuando verifican:

- Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son linealmente independientes.
- Cualquier otro vector del espacio $\vec{v}$ se puede escribir como **combinación lineal** de ellos, es decir, $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Re$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

Los números $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ son las **componentes** del vector $\vec{v}$ respecto de la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \cdots \vec{u}_n\}$, y se escribe $\vec{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ o bien $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

En el espacio de dimensión tres, todas las bases tienen tres elementos: $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ por lo que en el conjunto de los vectores libres del espacio de dimensión tres cada vector tiene tres componentes: $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3$.

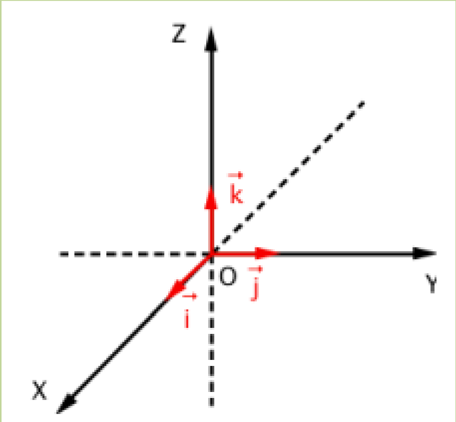
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

2.4. Sistema de referencia

Definición

Un **sistema de referencia** en el espacio de dimensión tres es un par formado por un punto fijo O y una base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Se escribe $R \equiv \{O, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}\}$

Un sistema de referencia nos permite asociar a cada punto del espacio P un vector $\overrightarrow{OP}$, llamado **vector de posición del punto**.



Las coordenadas del punto P serán las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto de la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

El **sistema de referencia canónico** en el espacio de dimensión tres es aquel cuyo punto fijo es el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y cuya base $B=\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ está formada por vectores de módulo 1 y perpendiculares entre sí.

Lo representamos por $R \equiv \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$.

Componentes (o coordenadas) de un vector

Consideramos el sistema de referencia canónico $R \equiv \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$.

Dados dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, sus vectores de posición son $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Módulo de un vector

Consideramos el sistema de referencia canónico $R \equiv \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$.

Dado el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el módulo de $\vec{v}$ viene dado por la siguiente expresión:

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$$

resultado de aplicar el teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

Ejemplo

- *Calcula las componentes y el módulo de un vector de origen* $A(-2, 3, 7)$ *y extremo* $B(2, 0, -4)$.

Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $\overrightarrow{AB} = (2-(-2), 0-3, -4-7) = (4, -3, -11)$.

El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-11)^2} = \sqrt{16+9+121} = \sqrt{146}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Operaciones con vectores usando componentes

A partir de ahora se supone que se ha fijado el sistema de referencia canónico: $R \equiv \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$.

Suma, resta y opuesto de vectores

Dados dos vectores en el espacio $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

- Su suma es otro vector $\vec{u}+\vec{v}$ cuyas componentes son:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

- El opuesto del vector $\vec{v}$ es:

$$\text{Op } (\vec{v}) = -\vec{v} = -(v_1, v_2, v_3) = (-v_1, -v_2, -v_3)$$

- La resta es otro vector $\vec{u}-\vec{v}$ cuyas componentes son:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

Ejemplo

- *Dados los vectores* $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ *y* $\vec{w} = (7, 2, -1)$ *tenemos:*

$\vec{u} + \vec{v} = (1, -3, 5) + (-6, 3, 0) = (-5, 0, 5)$

$\vec{v} - \vec{w} = (-6, 3, 0) - (7, 2, -1) = (-13, 1, 1)$

$\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = (1, -3, 5) - (-6, 3, 0) + (7, 2, -1) = (14, -4, 4)$

Producto de un vector por una constante

Dada una constante k y un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, su producto será otro vector $k \cdot \vec{v}$ cuyas componentes son:

$$k \cdot \vec{v} = k \cdot (v_1, v_2, v_3) = (k \cdot v_1, k \cdot v_2, \cdots k \cdot v_3)$$

Suma de un punto más un vector

Estrictamente hablando *no se puede* sumar un vector a un punto. Lo que hacemos es sumar al vector el vector de posición del punto.

Dado un punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, para sumar el punto A y el vector $\vec{v}$ trabajamos con el vector de posición del punto A y el vector $\vec{v}$. Lo que obtenemos es otro punto B, cuyo vector de posición es:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = (a_1, a_2, a_3) + (v_1, v_2, v_3) = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)$$

Ejemplo

- *Dado el punto* $A(1, 2, 3)$ *y los vectores* $\vec{u} = (-2, 5, 0)$ *y* $\vec{v} = (9, -7, 3)$, *tenemos:*

$-3\vec{u} = -3(-2, 5, 0) = (6, -15, 0)$

$2\vec{u} - 4\vec{v} = 2(-2, 5, 0) - 4(9, -7, 3) = (-40, 38, -12)$

$(\overrightarrow{OA} + \vec{u}) + \vec{v} = [(1, 2, 3) + (-2, 5, 0)] + (9, -7, 3) = (-1, 7, 3) + (9, -7, 3) = (8, 0, 6)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

2.5. Estudio de la dependencia e independencia lineal de vectores mediante sus componentes

Dados n vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, se dice que son **linealmente independientes** cuando ningún vector del conjunto puede expresarse como combinación lineal del resto.

Análogamente, se dice que n vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son **linealmente dependientes** cuando cualquiera de ellos puede expresarse como combinación lineal del resto.

Ejemplos

- *Dado el conjunto de vectores* $V_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, *con* $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ *y* $\vec{w} = (4, 2, 4)$, vemos fácilmente que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, por lo que V es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

- *En el conjunto de vectores* $V_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, *con* $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ *y* $\vec{w} = (3, -6, -7)$, **no** es evidente que $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$, por lo que debemos buscar otra forma de proceder.

Los n vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un conjunto son **linealmente independientes** cuando al resolver el sistema homogéneo $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ sólo es posible la solución trivial:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Teniendo en cuenta lo aprendido en el capítulo 3, podemos concluir que:

- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son **linealmente independientes** cuando la matriz que forman sus componentes tiene de rango n.
- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son **linealmente dependientes** cuando la matriz que forman sus componentes tiene un rango estrictamente menor que n.

Actividades resueltas

- *Determina si son linealmente independientes o no los vectores de los siguientes conjuntos:*

- $V_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ y $\vec{w} = (3, -6, -7)$.

  Planteamos el determinante formado por las componentes de los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 0 + (-54) + 6 - 0 - (-42) + (-6) = -54 + 6 + 42 + 6 = 0$$

  Por lo que el rango de la matriz de las componentes es menor que 3, y los vectores del sistema son linealmente dependientes.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

- $V_3 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ y $\vec{w} = (2, 2, 2)$.

  Planteamos el determinante formado por las componentes de los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 4 - 0 - 12 - 2 = 22 - 14 = 8 \neq 0$$

  Por lo que el rango de la matriz de las componentes es 3, y los vectores del sistema son linealmente independientes

- $V_4 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$, $\vec{w} = (2, 2, 2)$ y $\vec{x} = (-1, 0, 2)$.

  En este caso no podemos plantear directamente el determinante, sino que debemos plantear el sistema y la matriz del mismo:

$$\lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} + \lambda_3 \cdot \vec{w} + \lambda_4 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \cdot (1, 2, 3) + \lambda_2 \cdot (3, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (2, 2, 2) + \lambda_4 \cdot (-1, 0, 2) = \vec{0}$$

$$(\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1) + (3\lambda_2, 0, \lambda_2) + (2\lambda_3, 2\lambda_3, 2\lambda_3) + (-\lambda_4, 0, 2\lambda_4) = \vec{0}$$

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_1 + 2\lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4) = (0, 0, 0)$$

  es decir:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  El rango de la matriz del sistema es a lo sumo tres, por los que los vectores del sistema son linealmente dependientes.

  De este resultado podemos inferir que un sistema de n vectores en el espacio tridimensional SIEMPRE será linealmente dependiente si $n > 3$.

- $V_5 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, con $\vec{u} = (-2, 1, 3)$ y $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

  Como antes, planteamos el sistema y la matriz del mismo:

$$\lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \cdot (-2, 1, 3) + \lambda_2 \cdot (2, 1, 1) = \vec{0}$$

$$(-2\lambda_1, \lambda_1, 3\lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) = \vec{0}$$

$$(-2\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

  es decir:

$$\left.\begin{array}{r} -2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Cualquiera de los determinantes que podemos construir es no nulo, por tanto es un sistema de vectores linealmente independientes.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

De este resultado podemos deducir que dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son **paralelos** si y sólo si son linealmente dependientes, es decir, sus coordenadas son proporcionales.

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Ejemplo

- *Comprueba si los vectores $\vec{u} = (2, -8, 1)$ y $\vec{v} = (-4, 16, -2)$ son paralelos.*

$$\frac{2}{-4} = \frac{-8}{16} = \frac{1}{-2} \Rightarrow \text{Son paralelos.}$$

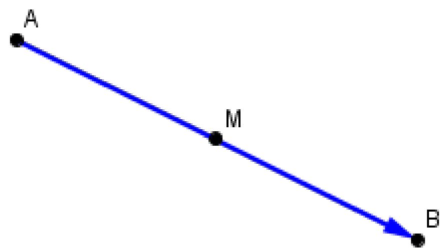
2.6. Aplicaciones de los vectores

Punto medio de un segmento

Dados dos puntos del espacio $A\,(a_1, a_2, a_3)$ y $B\,(b_1, b_2, b_3)$, el **punto medio** del segmento AB es:

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Esta fórmula se comprueba fácilmente. Observando la imagen:



Se deduce fácilmente que los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{MB}$ son iguales, por tanto:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Rightarrow (m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3) = (b_1 - m_1, b_2 - m_2, b_3 - m_3)$$

Igualando componentes:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 - a_1 = b_1 - m_1 \\ m_2 - a_2 = b_2 - m_2 \\ m_3 - a_3 = b_3 - m_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2m_1 = b_1 + a_1 \\ 2m_2 = b_2 + a_2 \\ 2m_3 = b_3 + a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow M\,(m_1, m_2, m_3) = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Ejemplo

- *Dados los puntos $A\,(4, -2, 6)$ y $B\,(3, 8, -5)$, calcula el punto medio del segmento AB:*

$$M\left(\frac{4+3}{2}, \frac{-2+8}{2}, \frac{6-5}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Condición de puntos alineados

Se dice que tres puntos en el espacio $A\,(a_1, a_2, a_3)$, $B\,(b_1, b_2, b_3)$ y $C\,(c_1, c_2, c_3)$ están **alineados** si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales, es decir:

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - a_2} = \frac{b_3 - a_3}{c_3 - a_3}$$

Ejemplo

- Comprueba si los puntos $A\,(3, 2, 1)$, $B\,(4, 4, -2)$ y $C\,(4, -1, 6)$ están alineados.

$$¿\frac{4-3}{4-3} = \frac{4-2}{-1-2} = \frac{-2-1}{6-1}? \quad \Rightarrow \quad 1 \neq -\frac{2}{3} \neq -\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \text{No están alineados.}$$

Actividades propuestas

1. Calcula las componentes y el módulo de un vector de origen $A\,(-1, 1, 2)$ y extremo $B\,(3, 1, -4)$.

2. Dados los puntos $P = (2, 2, 3)$, $Q = (1, 0, 5)$ y $R = (-2, 3, 4)$ y los vectores $\vec{v} = (1, -1, 3)$, $\vec{w} = (0, -2, 1)$ calcula, indicando si el resultado es punto o vector:

a) $\overrightarrow{QP}$ b) $3\vec{v} - 2\vec{w}$ c) $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$ d) $P + \vec{v}$ e) $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$

3. Dados tres puntos genéricos, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R = (r_1, r_2, r_3)$, demuestra:

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ b) $\overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{QP}$ c) $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ d) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$

4. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ y $\vec{w} = (7, 2, -1)$ calcula:

a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w}$
b) $2\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w}$
c) $3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 3\vec{w}$
d) $3\vec{u} - 2(\vec{v} + \vec{w})$

5. Dados los puntos $A\,(0, -2, 6)$ y $B\,(4, 8, -4)$, determina el punto medio del segmento AB.

6. Comprueba si los puntos $A\,(3, 2, 1)$, $B\,(4, 4, -2)$ y $C\,(4, -1, 3)$ están alineados.

7. Determina si son linealmente independientes o no los conjuntos de vectores siguientes:

$A = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ y $\vec{w} = (4, 2, -7)$.

$B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, 4, 0)$.

$C = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (4, 1, 3)$, $\vec{w} = (4, 2, -7)$ y $\vec{x} = (0, 0, 1)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

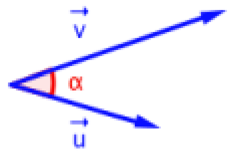
3. PRODUCTO ESCALAR

3.1. Definición

El ángulo que forman dos vectores libres es el menor de los ángulos que forman dos de sus representantes con un origen común.

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto escalar** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se denota por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, al **número real** que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$



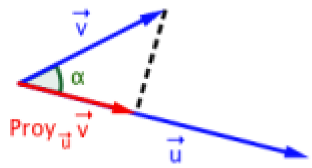
Ejemplo

- *Dados los vectores* $\vec{u} = (1,3,0)$ *y* $\vec{v} = (1,1,-1)$*, que forman un ángulo de 43'1°, calcula su producto escalar.*

$$\left.\begin{aligned}|\vec{u}| &= \sqrt{1^2+3^2+0^2} = \sqrt{10}\\ |\vec{v}| &= \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha = \sqrt{30}\cdot\cos 43'1^{\circ} = \sqrt{30}\cdot 0'73 = 4$$

3.2. Interpretación geométrica

El producto escalar de dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



Observamos en la figura un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa es $\vec{v}$ y uno de los catetos es la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. Aplicando la definición de coseno de un ángulo agudo, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

De aquí tenemos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha = |\vec{u}|\cdot\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}$$

Análogamente, se tiene que: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha = |\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\alpha = |\vec{v}|\cdot\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}$

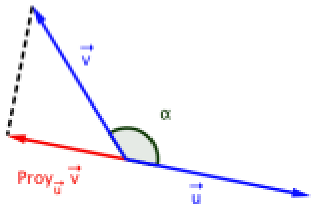
Ejemplo

- *Dados los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*, calcula* $\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}$*, sabiendo que* $\vec{v} = (5,1,-3)$ *y que forman un ángulo de 30°*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} \Rightarrow \text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|} \Rightarrow \text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha}{|\vec{u}|} = |\vec{v}|\cdot\cos\alpha = \sqrt{5^2+1^2+(-3)^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa

Cuando la proyección sobre el vector es un número negativo, esto significa que el vector y la proyección tienen sentido contrario.



3.3. Propiedades del producto escalar

1. El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo es siempre positivo e igual al cuadrado de su módulo.

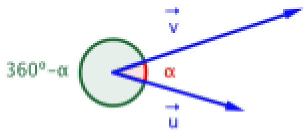
Demostración:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0^{o}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot 1=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|=|\vec{u}|^{2}\geq 0$$

2. Propiedad conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Demostración:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\alpha=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(360^{o}-\alpha)=\vec{v}\cdot\vec{u}$$



3. Propiedad asociativa con el producto por un número real: $k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}$

Demostración:

$$k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=k\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|k\cdot\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}$$

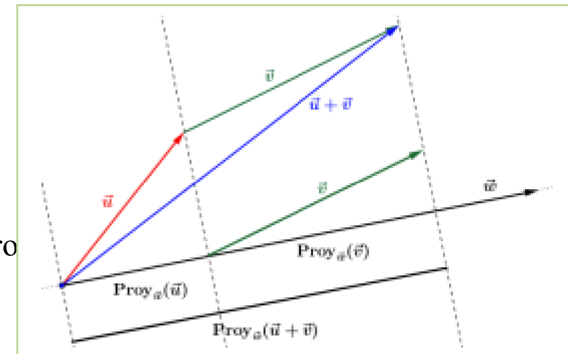
4. Propiedad distributiva respecto de la suma: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

Demostración:

La demostración analítica de esta propiedad es bastante complicada, por lo que lo veremos gráficamente.

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=|\vec{w}|\cdot\text{Proy}_{\vec{w}}(\vec{u}+\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{w}|\cdot\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{u}+|\vec{w}|\cdot\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{v}=|\vec{w}|\cdot(\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{u}+\text{Pro}$$



Basta observar en el gráfico que:

$$\text{Proy}_{\vec{w}}(\vec{u}+\vec{v})=\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{u}+\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{v}$$

5. El producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y sólo si los vectores son perpendiculares.

Demostración:

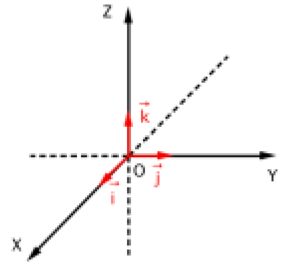
Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ y $\vec{v}\neq\vec{0}\Rightarrow|\vec{u}|>0$ y $|\vec{v}|>0$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=0\Leftrightarrow\cos\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=90^{o}\Leftrightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

3.4. Expresión analítica del producto escalar

Consideramos el **sistema de referencia canónico** en el espacio de dimensión tres: $R \equiv \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$.



Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Demostración:

Si multiplicamos los vectores de la base canónica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tenemos:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^{\circ} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot 1 = |\vec{i}|^2 = 1^2 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^{\circ} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 0^{\circ} = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot 1 = |\vec{j}|^2 = 1^2 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 90^{\circ} = |\vec{i}| \cdot |\vec{k}| \cdot 0 = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 0^{\circ} = |\vec{k}| \cdot |\vec{k}| \cdot 1 = |\vec{k}|^2 = 1^2 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 90^{\circ} = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cdot 0 = 0$$

De aquí tenemos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}\right) \cdot \left(v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}\right) =$$
$$= u_1 \cdot v_1 \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} + u_1 \cdot v_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + u_1 \cdot v_3 \cdot \vec{i} \cdot \vec{k} + u_2 \cdot v_1 \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} + u_2 \cdot v_2 \cdot \vec{j} \cdot \vec{j} + u_2 \cdot v_3 \cdot \vec{j} \cdot \vec{k} + u_3 \cdot v_1 \cdot \vec{k} \cdot \vec{i} +$$
$$+ u_3 \cdot v_2 \cdot \vec{k} \cdot \vec{j} + u_3 \cdot v_3 \cdot \vec{k} \cdot \vec{k} =$$
$$= u_1 \cdot v_1 \cdot 1 + u_1 \cdot v_2 \cdot 0 + u_1 \cdot v_3 \cdot 0 + u_2 \cdot v_1 \cdot 0 + u_2 \cdot v_2 \cdot 1 + u_2 \cdot v_3 \cdot 0 + u_3 \cdot v_1 \cdot 0 + u_3 \cdot v_2 \cdot 0 + u_3 \cdot v_3 \cdot 1 =$$
$$= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Ejemplo

- *Dados los vectores* $\vec{u} = (3, 2, -4)$ *y* $\vec{v} = (-1, 3, 7)$ *calcula su producto escalar.*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 2, -4) \cdot (-1, 3, 7) = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 7 = -3 + 6 - 28 = -25$$

Actividades propuestas

8. Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (0, 1, -3)$ *y* $\vec{v} = (-3, 4, 6)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

3.5. Aplicaciones del productos escalar

3.5.1. Ángulo entre dos vectores

A partir de la definición del producto escalar, tenemos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Si consideramos $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3\\ |\vec{u}|=\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\\ |\vec{v}|=\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\cdot\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}$$

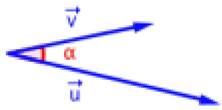
Y de aquí tenemos:

$$\alpha=\arccos\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\cdot\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}$$

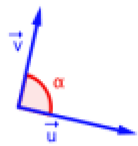
Para cada número real $0\le k\le 1$, existen dos ángulos cuyo coseno vale k. Tomaremos el menor de ellos.

Observando la expresión dada por el coseno del ángulo, y dado que los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son positivos, el signo del coseno vendrá determinado por el signo del producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Así:

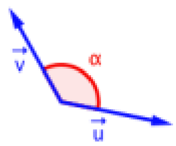
- Si el producto escalar es **positivo**, el ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ será agudo.



- Si el producto escalar es **cero**, los vectores formarán un ángulo de 90°, serán perpendiculares.



- Si el producto escalar es **negativo**, el ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ será obtuso.



Vectores ortogonales

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** cuando determinan un ángulo de noventa grados $\alpha=90^{\circ}$ (es decir, son perpendiculares) y por tanto, $\cos\alpha=0$.

De aquí se tiene que el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot 0=0$

Se obtiene, por tanto, la siguiente condición de perpendicularidad entre dos vectores:

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Esta condición será uno de los tres conceptos básicos para resolver casi cualquier problema de geometría en el espacio.

Ejemplo

- *Calcula un vector ortogonal al vector* $\vec{u} = (2, -3, 1)$.

Sea dicho vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Para que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se debe verificar que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2, -3, 1) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0 \Leftrightarrow 2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0 \Leftrightarrow v_3 = -2v_1 + 3v_2$$

Escribimos la solución en forma paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \lambda \\ v_2 &= \mu \\ v_3 &= -2\lambda + 3\mu \end{aligned}\right\} \text{ con } \lambda \text{ y } \mu \in \mathbb{R}$$

De aquí, podemos expresar la solución como:

$$(v_1, v_2, v_3) = (\lambda, \mu, -2\lambda + 3\mu) = (\lambda, 0, -2\lambda) + (0, \mu, 3\mu) = \lambda(1, 0, -2) + \mu(0, 1, 3)$$

Por tanto, todos los vectores ortogonales al vector $\vec{u}$ serán combinación lineal de los vectores $\{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}$.

3.5.2. Cosenos directores

En una base ortonormal, se llaman **cosenos directores** del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a los cosenos de los ángulos que forma el vector $\vec{u}$ con los vectores de la base:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \quad \cos\beta = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Ejemplo

- *Calcula los cosenos directores del vector* $\vec{u} = (2, -3, 1)$.

Expresando el vector como combinación lineal de los vectores de la base:

$$\vec{u} = (2, -3, 1) = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + \vec{k}$$

Podemos hallar los cosenos directores a partir de los productos escalares con los tres vectores de la base:

$$\left.\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{i} &= (2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + \vec{k}) \cdot \vec{i} = 2 \cdot \vec{i}\vec{i} - 3 \cdot \vec{j}\vec{i} + \vec{k}\vec{i} = 2 + 0 + 0 = 2 \\ \vec{u} \cdot \vec{i} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos\alpha = |\vec{u}| \cdot \cos\alpha = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \cdot \cos\alpha = \sqrt{14} \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 = \sqrt{14} \cdot \cos\alpha$$

Es decir:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

Del mismo modo podemos hallar:

$$\left.\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{j} &= -3 \\ \vec{u} \cdot \vec{j} &= \sqrt{14} \cdot \cos\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow -3 = \sqrt{14} \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{14}} \quad \text{y:}$$

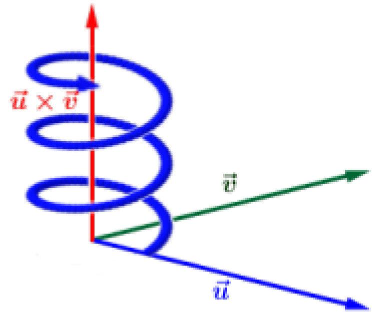
$$\left.\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{k} &= 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{k} &= \sqrt{14} \cdot \cos\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = \sqrt{14} \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

4. PRODUCTO VECTORIAL

4.1. Definición

Dados dos vectores del espacio de dimensión tres: $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto vectorial** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se denota por $\vec{u}\times\vec{v}$ o $\vec{u}\wedge\vec{v}$, a otro **vector** con las siguientes características:

- **Módulo**: $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\text{sen }\alpha$, siendo α el menor ángulo que determinan los dos vectores.
- **Dirección**: es la perpendicular de cualquier plano generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- **Sentido**: es el de avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (regla de *Maxwell*).



Ejemplo

- *Dados los vectores* $\vec{u}=(-3,3,0)$ *y* $\vec{v}=(0,4,4)$, *que forman un ángulo de* 60°, *calcula el producto vectorial.*

Dado que el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\vec{u}\times\vec{v}$, calculamos sus elementos:

Módulo:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}|=\sqrt{(-3)^2+3^2+0^2}=\sqrt{18} \\ |\vec{v}|=\sqrt{0^2+4^2+4^2}=\sqrt{32} \\ \text{sen } 60^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{18}\cdot\sqrt{32}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{576}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

Dirección:

Buscamos un vector, al que llamaremos $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Como vimos en el apartado anterior, eso implica que el producto escalar con ambos vectores debe ser nulo:

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0\Rightarrow-3w_1+3w_2+0w_3=0\Rightarrow-3w_1+3w_2=0\Rightarrow w_1=w_2$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w}=0\Rightarrow 0w_1+4w_2+4w_3=0\Rightarrow 4w_2+4w_3=0\Rightarrow w_3=-w_2$$

El vector es, por tanto, de la forma

$$\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)=(w_2,w_2,-w_2)$$

siendo el más sencillo:

$$\vec{w}=(1,1,-1)$$

Sentido:

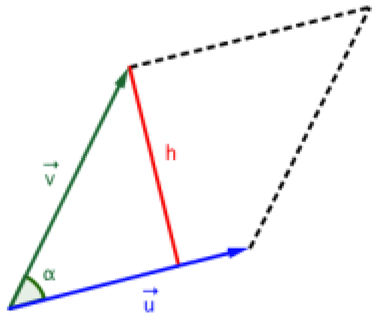
Será el sentido de avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

4.2. Interpretación geométrica del producto vectorial

Geométricamente, el módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados esos vectores.

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos:



Área del paralelogramo definido por $\vec{u}$ y $\vec{v} = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Demostración:

En la figura anterior podemos ver que

$$\text{Área} = |\vec{u}| \cdot h$$

Por otro lado, aplicando la definición de seno:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{|\vec{v}|} \Rightarrow h = |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

De aquí tenemos:

$$\text{Área} = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen} \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

4.3. Propiedades del producto vectorial

1. El producto vectorial de un vector por sí mismo es cero.

Demostración:

El ángulo que forma un vector consigo mismo es cero. De aquí:

$$|\vec{u} \times \vec{u}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \operatorname{sen} 0^{\circ} = |\vec{u}|^2 \cdot 0 = 0$$

2. Propiedad anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

Demostración:

Los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentido (el giro del sacacorchos) contrario, luego son opuestos.

3. Producto por un número real: $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$

Demostración:

Es evidente teniendo el cuenta que al multiplicar un vector por un escalar su módulo queda multiplicado por dicho escalar, es decir, $|\lambda\vec{u}| = \lambda|\vec{u}|$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

4. Propiedad distributiva respecto de la suma: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

5. El producto vectorial de dos vectores no nulos es el vector cero si y sólo si los vectores son paralelos. $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}\,//\,\vec{v}$

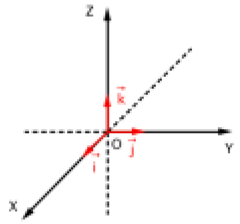
Demostración:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{u}\times\vec{v}|=0\Leftrightarrow|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}\alpha=0\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0^{\text{o}}\\\alpha=180^{\text{o}}\end{cases}$$

6. En general, el producto vectorial no cumple la propiedad asociativa. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\neq(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

4.4. Expresión analítica del producto vectorial

Consideramos el **sistema de referencia canónico** en el espacio, $R\equiv\{O,\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\}$.



Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede expresar mediante el siguiente determinante:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}+\begin{vmatrix}u_3&u_1\\v_3&v_1\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

Demostración:

Como los vectores de la base canónica $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ tienen módulo 1 y son perpendiculares entre sí:

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$ $\quad\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ $\quad\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$ $\quad\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ $\quad\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}$ $\quad\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ $\quad\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ $\quad\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$
$\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

De aquí tenemos, aplicando la propiedad distributiva respecto de la suma:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k})\times(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})=$$
$$=u_1\vec{i}\times(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})+u_2\vec{j}\times(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})+u_3\vec{k}\times(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})=$$
$$=(u_1\vec{i})\times(v_1\vec{i})+(u_1\vec{i})\times(v_2\vec{j})+(u_1\vec{i})\times(v_3\vec{k})+(u_2\vec{j})\times(v_1\vec{i})+(u_2\vec{j})\times(v_2\vec{j})+(u_2\vec{j})\times(v_3\vec{k})+$$
$$+(u_3\vec{k})\times(v_1\vec{i})+(u_3\vec{k})\times(v_2\vec{j})+(u_3\vec{k})\times(v_3\vec{k})=$$

Aplicando la propiedad del producto de números reales:

$$=u_1v_1(\vec{i}\times\vec{i})+u_1v_2(\vec{i}\times\vec{j})+u_1v_3(\vec{i}\times\vec{k})+u_2v_1(\vec{j}\times\vec{i})+u_2v_2(\vec{j}\times\vec{j})+u_2v_3(\vec{j}\times\vec{k})+$$
$$+u_3v_1(\vec{k}\times\vec{i})+u_3v_2(\vec{k}\times\vec{j})+u_3v_3(\vec{k}\times\vec{k})=$$
$$=u_1v_2\vec{k}+u_1v_3(-\vec{j})+u_2v_1(-\vec{k})+u_2v_3\vec{i}+u_3v_1\vec{j}+u_3v_2(-\vec{i})=u_1v_2\vec{k}-u_1v_3\vec{j}-u_2v_1\vec{k}+u_2v_3\vec{i}+u_3v_1\vec{j}-u_3v_2\vec{i}=$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ejemplo

- *Halla el producto vectorial de los vectores* $\vec{u} = (3, 1, 0)$ *y* $\vec{v} = (-1, 4, 2)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 13\vec{k} = (2, -6, 13)$$

4.5. Aplicaciones del producto vectorial

Vector perpendicular a otros dos vectores

Dados dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes, su producto vectorial será un vector perpendicular a ambos.

4.5.1. Base de vectores ortogonales

Dados dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes, podemos conseguir una base de vectores ortogonales $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ considerando:

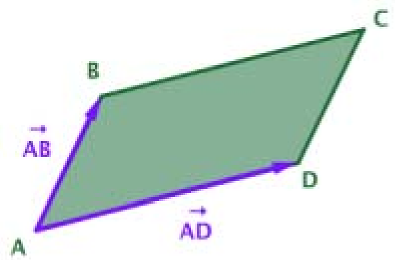
$$\left.\begin{array}{l} \vec{w}_1 = \vec{u} \\ \vec{w}_2 = \vec{u} \times \vec{v} \\ \vec{w}_3 = \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v}) \end{array}\right\} \Rightarrow B = \{\vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})\}$$

4.5.2. Área de figuras planas en el espacio

Área de un paralelogramo

Hemos visto que el módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados esos vectores. En el paralelogramo $ABCD$ podemos calcular su área:

$$\text{Área} = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right|$$



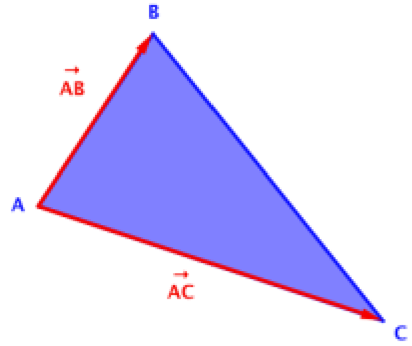
Evidentemente, el área no variará independientemente de los vectores elegidos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Área de un triángulo

Dado un triángulo ABC, el área viene dada por la siguiente expresión:

$$\text{Área} = \left|\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{2}\right|$$



Demostración:

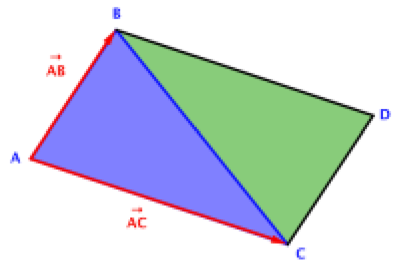
El triángulo ABC está formado por tres puntos no alineados. Añadimos un cuarto punto para construir el paralelogramo $ABCD$.

Este paralelogramo está formado por dos triángulos iguales: el triángulo ABC de partida, y el triángulo BCD.

El área del paralelogramo es igual a: $\text{Área} = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

Como el área del triángulo será la mitad del área del paralelogramo, tenemos:

$$\text{Área} = \left|\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{2}\right|$$



Ejemplo

- *Halla el área del triángulo de vértices* $A\,(-1, 2, 3)$, $B\,(1, -2, 1)$ *y* $C\,(2, 1, -4)$.

Consideramos dos vectores con origen A y extremos B y C respectivamente.

$$\overrightarrow{AB} = (2,-4,-2) \quad \overrightarrow{AC} = (3,-1,-7)$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

Calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = 26\vec{i} + 8\vec{j} + 10\vec{k} = (26, 8, 10)$$

Calculamos el módulo:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = |(26, 8, 10)| = \sqrt{26^2 + 8^2 + 10^2} = \sqrt{676+64+100} = \sqrt{840} = 2\sqrt{210}$$

De aquí: $$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{2\sqrt{210}}{2} = 210 \ \text{u}^2.$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

5. PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

5.1. Definición

Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se llama **producto mixto** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y se denota por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ al **número** que se obtiene al calcular el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

Ejemplo

- *Calcula el producto mixto de los vectores* $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (-1, 0, 4)$ *y* $\vec{w} = (2, 1, -5)$.

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (-4, 3, -1)$$

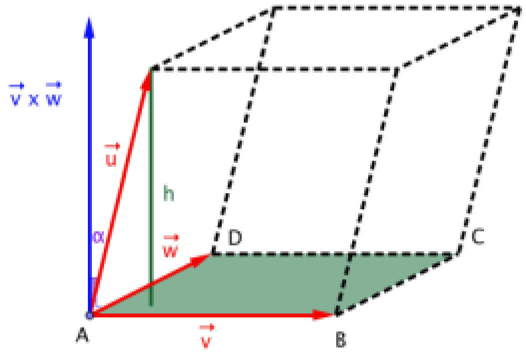
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (1, 3, -2)\cdot(-4, 3, -1) = -4 + 9 + 2 = 7$$

5.2. Interpretación geométrica del producto mixto

Geométricamente, el valor absoluto del producto mixto de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ coincide con el volumen del paralelepípedo definido por ellos.

Demostración:

Consideramos el paralelepípedo definido por tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no nulos y no coplanarios.



La fórmula del volumen es:

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base}\cdot\text{Altura} = \text{Área } ABCD\cdot h$$

La base es un paralelogramo, por tanto:

$$\text{Área } ABCD = |\vec{v}\times\vec{w}|$$

De aquí tenemos:

$$\text{Volumen} = |\vec{v}\times\vec{w}|\cdot h$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Por otro lado, aplicando las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(90^{\circ}-\alpha)=\frac{h}{|\vec{u}|}\Rightarrow h=|\vec{u}|\cdot\operatorname{sen}(90^{\circ}-\alpha)\Rightarrow h=|\vec{u}|\cdot\cos\alpha$$

Entonces:

$$\text{Volumen}=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot h=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\alpha=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot\cos\alpha=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$

5.3. Propiedades del producto mixto

1. El producto mixto no varía si se permutan circularmente sus factores.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]=[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]$$

2. El producto mixto cambia de signo si se trasponen dos de sus factores.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]=-[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]=-[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]$$

3. Propiedad respecto al producto por números reales.

$$[\lambda\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u},\lambda\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u},\vec{v},\lambda\vec{w}]=\lambda[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$

4. Propiedad distributiva respecto de la suma.

$$[\vec{u}_1+\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u}_1,\vec{v},\vec{w}]+[\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}]$$
$$[\vec{u},\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{w}]=[\vec{u},\vec{v}_1,\vec{w}]+[\vec{u},\vec{v}_2,\vec{w}]$$
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1+\vec{w}_2]=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1]+[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_2]$$

6. El producto mixto de tres vectores es nulo si y sólo si los vectores son linealmente dependientes (son coplanarios).

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0\Leftrightarrow\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp(\vec{v}\times\vec{w})\Leftrightarrow\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$

5.4. Expresión analítica del producto mixto

Consideramos el **sistema de referencia canónico** en el espacio, $R\equiv\{O,\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\}$.

Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$. El producto mixto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se puede expresar mediante el siguiente determinante:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

Demostración:

Los vectores de la base canónica $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ verifican:

$$[\vec{i},\vec{j},\vec{k}]=1\quad[\vec{j},\vec{k},\vec{i}]=1\quad[\vec{k},\vec{i},\vec{j}]=1\quad[\vec{j},\vec{i},\vec{k}]=-1\quad[\vec{k},\vec{j},\vec{i}]=-1\quad[\vec{i},\vec{k},\vec{j}]=-1$$

Y son nulas todas las ternas en las que alguno de ellos está repetido.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Hallamos el producto vectorial aplicando la propiedad distributiva y el producto por números reales:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\left[\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\right),\left(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}\right),\left(w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}\right)\right]=$$

$$=u_1v_2w_3\left[\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right]+u_1v_3w_2\left[\vec{i},\vec{k},\vec{j}\right]+u_2v_1w_3\left[\vec{j},\vec{i},\vec{k}\right]+u_2v_3w_1\left[\vec{j},\vec{k},\vec{i}\right]+u_3v_1w_2\left[\vec{k},\vec{i},\vec{j}\right]+u_3v_2w_1\left[\vec{k},\vec{j},\vec{i}\right]=$$

$$=u_1v_2w_3-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_3v_2w_1=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

- *Calcula el producto mixto de los vectores* $\vec{u}=(-1,2,-4)$, $\vec{v}=(2,0,-3)$ *y* $\vec{w}=(1,-1,5)$.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-6+8-(-3+20)=2-17=-15$$

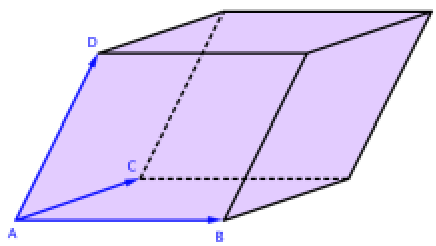
5.5. Aplicaciones del producto mixto

Volumen de un paralelepípedo

Hemos visto que el valor absoluto del producto mixto de tres vectores coincide con el volumen del paralelepípedo definido por ellos.

Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, entonces su volumen viene dado por:

$$\text{Volumen}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$$



Actividad resuelta

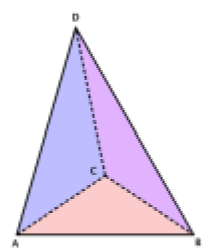
- *Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores* $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(0,1,2)$ *y* $\vec{c}=(2,1,0)$

$$V=\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=|0+4+0-(3+0+0)|=1\ \text{u}^3.$$

Volumen de un tetraedro

El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D es igual a un sexto del producto mixto, en valor absoluto.

$$\text{Volumen}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}$$



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividades resueltas

- *Calcula el volumen del tetraedro de vértices* $A\ (1,\ 0,\ -1)$, $B\ (-2,\ 3,\ 1)$, $C\ (0,\ -3,\ 1)$ *y* $D\ (0,\ 4,\ -1)$.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=(-3,3,2)\\ \overrightarrow{AC}&=(-1,-3,2)\\ \overrightarrow{AD}&=(-1,4,0)\end{aligned}\right\}\Rightarrow V=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-3&3&2\\-1&-3&2\\-1&4&0\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\left[-6-8-(6-24)\right]=\frac{1}{6}\cdot 4=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\ \text{u}^3$$

- *Calcula el volumen del tetraedro que tiene por vértices* $A\ (1,1,1)$, $B\ (3,\ 0,\ 0)$, $C\ (0,\ 2,\ 0)$ *y* $D\ (0,\ 0,\ 6)$*:*

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=(2,-1,-1)\\ \overrightarrow{AC}&=(-1,1,-1)\\ \overrightarrow{AD}&=(-1,-1,5)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&5\end{vmatrix}=10-1-1-(1+2+5)=8-8=0$$

$$V=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\frac{|0|}{6}=0\ \text{u}^3$$

Esto significa que los puntos que nos dan no forman ningún tetraedro, sino que todos pertenecen al mismo plano.

- *Calcula las aristas del tetraedro que tiene un volumen de 36 u*^{3} *y cuyos vértices son el origen cartesiano* $O\ (0,\ 0,\ 0)$ *y los puntos* $A\ (a,\ 0,\ 0)$, $B\ (0,\ a,\ 0)$ *y* $C\ (0,\ 0,\ a)$*:*

Hallamos el producto mixto en la forma habitual:

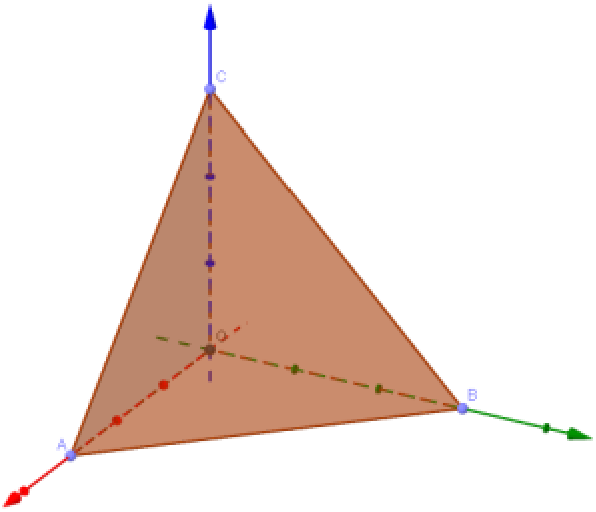
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OA}&=(a,0,0)\\ \overrightarrow{OB}&=(0,a,0)\\ \overrightarrow{OC}&=(0,0,a)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]=\begin{vmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{vmatrix}=a^3$$

Planteamos el volumen:

$$V=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|}{6}=\frac{a^3}{6}=36\ \text{u}^3$$

Y resolvemos la ecuación:

$$\frac{a^3}{6}=36\Rightarrow a^3=6\cdot 36=216\Rightarrow a=6\ \text{u}$$



Hemos obtenido que las aristas *OA*, *OB* y *OC* miden *a* unidades, mientras que para obtener las aristas *AB*, *AC* y *BC* debemos hallar el módulo de los correspondientes vectores:

$$\overrightarrow{AB}=(-a,a-0)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-a)^2+a^2+0}=\sqrt{2}\cdot a\ \text{u}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

CURIOSIDADES. REVISTA

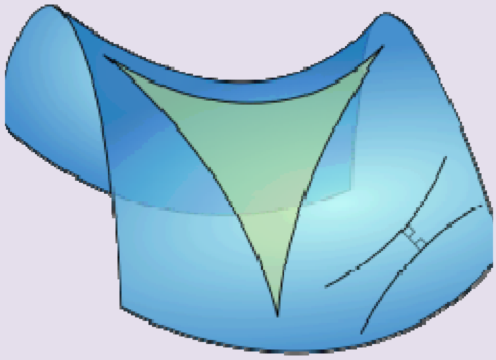
Otras Geometrías

Euclides (325 aC – 265 aC), en Los Elementos, partió de cinco postulados para construir la Geometría. Si alguno de esos postulados no se cumple, entonces tenemos lo que se denomina las **Geometrías No Euclídeas**.

El quinto postulado dice: "Dada una recta y un punto exterior a ella, hay **una única recta** que es paralela a la recta dada y que pasa por el punto".

Cuando a principios del siglo XIX se intentó demostrar el postulado por reducción al absurdo se encontró, con sorpresa, que no se llegaba a una contradicción, que se podían construir geometrías que podían no verificarlo.

De modo independiente, distintos matemáticos (Gauss, Lobachevsky, Bolyai…), en ese intento de demostrar el quinto postulado llegaron a la **Geometría Hiperbólica**.

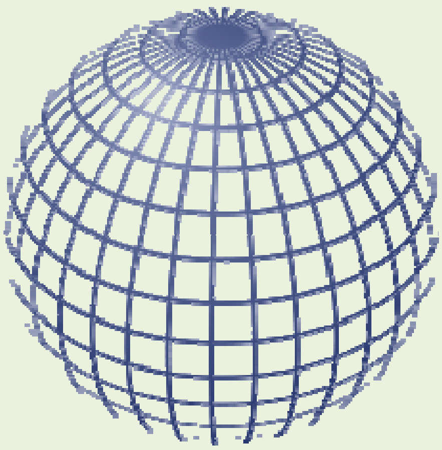


La Geometría Hiperbólica es tan consistente como la Geometría Euclídea, y "su" quinto postulado es: "*Dada una recta y un punto exterior a ella,* **existen al menos dos rectas paralelas** *a la dada que contienen al punto*". En la geometría hiperbólica la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que 180°. Puedes pensar en una geometría hiperbólica si te sitúas sobre una trompeta.

Si reescribimos el quinto postulado como: "*Dada una recta y un punto exterior a ella,* **no existe ninguna recta paralela** *a la dada que contenga al punto*", se obtiene la **Geometría Elíptica**.

Imagina que estás en una esfera. Tendrás que redefinir qué entiendes como "rectas". Si una recta es el camino más corto posible que une dos puntos, tendrás lo que se conoce como **líneas geodésicas** (los meridianos de un globo terráqueo). Entonces, por una de esas *nuevas* rectas y un punto exterior, **todas** las rectas que traces cortan a la primera.

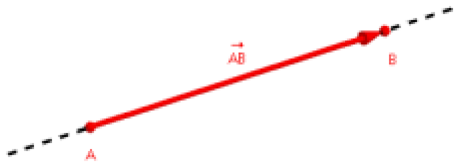
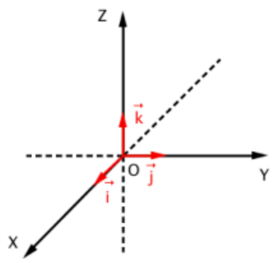
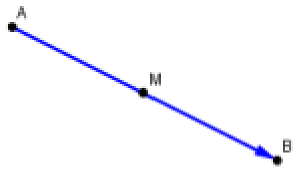
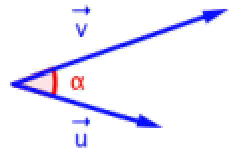
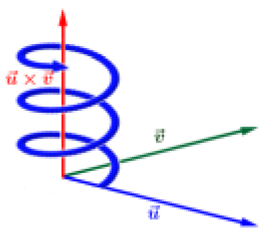
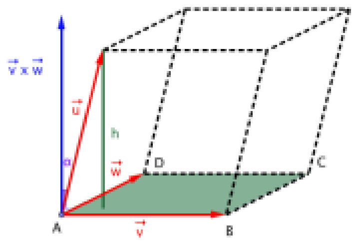
Si lo piensas, cada vez que miras un globo terráqueo estás viendo algo de Geometría Elíptica.



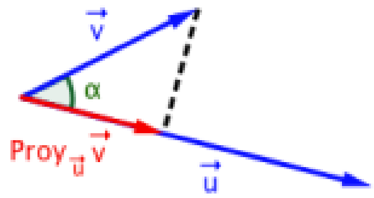
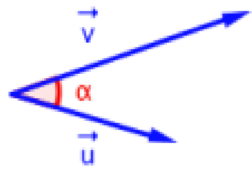
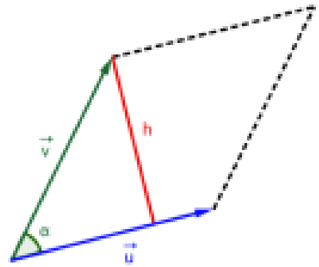
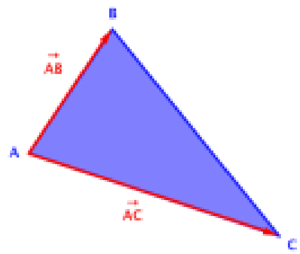
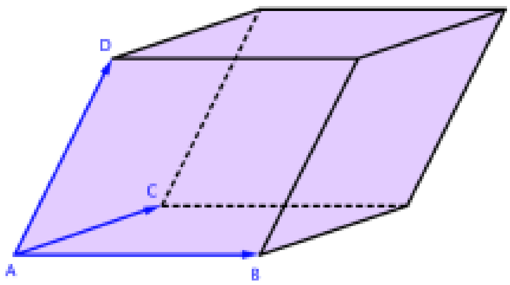
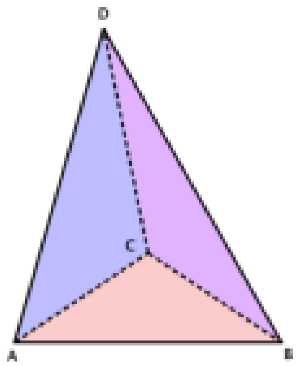
Actualmente las Geometrías No Euclídeas proporcionan otras formas de entender el mundo, siendo utilizadas, por ejemplo, en Teoría de la Relatividad, o en el estudio de fenómenos ópticos y propagación de ondas.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

RESUMEN

		Ejemplos
Punto	Posición en el espacio que no tiene dimensiones (no tiene largo, ancho ni profundidad). Se representa con letras mayúsculas, P, y se caracteriza por sus coordenadas (x,y,z).	
Vector	Segmento orientado que escribimos como $\vec{v}$ y gráficamente se representa por una flecha. Se caracteriza mediante una terna de valores llamados **componentes** (o coordenadas) del vector que escribimos como (v_1, v_2, v_3)	
Base de un sistema de vectores	Se dice que el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ forman una base del espacio, y se denota por $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ cuando verifican: - $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son linealmente independientes. - Cualquier otro vector se puede escribir como combinación lineal de ellos: $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.	
Punto medio de un segmento	Dados dos puntos $A\,(a_1, a_2, a_3)$ y $B\,(b_1, b_2, b_3)$, el **punto medio** del segmento AB será: $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$	
Producto escalar de vectores	Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto escalar**, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al **número real** que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \cos\alpha$	
Producto vectorial de vectores	Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto vectorial**, $\vec{u} \times \vec{v}$, al **vector**: - De módulo $\lvert\vec{u} \times \vec{v}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \operatorname{sen}\alpha$ - Dirección perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ - Sentido indicado por la **regla de Maxwell**	
Producto mixto de vectores	Se llama **producto mixto de tres vectores**, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, al **número real** que resulta de multiplicar escalarmente a $\vec{u}$ por el vector resultante del producto vectorial de $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Proyección de un vector sobre otro	El producto escalar de dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él: $$\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \lvert\vec{v}\rvert \cdot \cos\alpha$$	
Ángulo entre vectores	El ángulo entre dos vectores se calcula con la fórmula: $$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}$$	
Área de un paralelogramo	El área del paralelogramo definido por dos vectores se calcula con la fórmula: $$\text{Área} = \lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert$$	
Área de un triángulo	El área del triángulo definido por dos vectores se calcula con la fórmula: $$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert$$	
Volumen de un prisma	El volumen del paralelepípedo definido por tres vectores se calcula con la fórmula: $$\text{Volumen} = \left\lvert\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right\rvert$$	
Volumen de un tetraedro	El volumen del tetraedro definido por tres vectores se calcula con la fórmula: $$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\cdot\left\lvert\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right\rvert$$	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Dados los vectores libres:

a) Representa los vectores: $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{c} - 2\vec{b} + 3\vec{d}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{d}$ y $\vec{w} = -2\vec{a} - \vec{b} - \frac{5}{2}\vec{c}$.

b) Halla un vector $\vec{d}$ tal que $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

2. - Dados $\vec{a} = (2,-1)$ y $\vec{b} = (-3, m)$, halla el valor de m para que sean linealmente dependientes.

3. - Comprueba si son o no linealmente independientes los siguientes vectores:

a) $\vec{x} = (-2,3)$ e $\vec{y} = (6,-9)$

b) $\vec{x} = (-1,-2,3)$, $\vec{y} = (-2,0,1)$, $\vec{z} = (2,-4,5)$ y $\vec{t} = (3,2,-4)$

c) $\vec{x} = (2,1,0,-1)$, $\vec{y} = (1,-3,-1,0)$ y $\vec{z} = (3,-2,-1,1)$

4. - a) Dados los vectores $\vec{x} = (1,3,-2)$ e $\vec{y} = (3, m,-6)$, halla el valor de m para que los dos vectores sean linealmente independientes.

b) Si $m = -2$, ¿se puede expresar el vector $\vec{z} = (-1,8,1)$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$?

5. - Dados los vectores $\vec{u} = (-3,4,0)$, $\vec{v} = (1,-2,2)$ y $\vec{w} = (0,-m,1)$, calcula el valor de m para que el vector $\vec{u}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

6. - Dados los vectores $\vec{x} = (1,-2,0)$, $\vec{y} = (3,-1,2)$ y $\vec{z} = (-m,-1,-2)$, halla el valor de m para que los tres vectores sean linealmente dependientes.

En este caso, expresa $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

7. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,1,m)$, $\vec{v} = (0,m,-1)$ y $\vec{w} = (1,2m,0)$, determina el valor de m para que:

a) Sean linealmente independientes.

b) El vector $\vec{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$, y halla dicha combinación.

c) Sean coplanarios.

8. - Los vectores $\vec{x} = (1,0,0)$, $\vec{y} = (-1,0,1)$ y $\vec{z} = (2,1,1)$, ¿forman una base de V^3? En caso afirmativo:

a) Halla las componentes del vector $\vec{u} = (3,-2,5)$ respecto de dicha base.

b) Halla las componentes en la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ del vector $\vec{v}$, si sus coordenadas en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son 2, –3 y 2 respectivamente.

9. - Halla un punto C que esté alineado con A y B, y otro punto D que no lo esté.

10. - De un segmento $\overline{AB}$, el punto B tiene de coordenadas $(-2,0,6)$ y el punto medio del segmento tiene de coordenadas $M\ (-3,2,2)$. Halla las coordenadas del punto A y divide el segmento $\overline{AM}$ en cuatro partes iguales.

11. - De un segmento $\overline{AB}$, se sabe que $\overrightarrow{AB} = (3,-4,-2)$ y que el punto medio del segmento tiene de coordenadas $M\ (-1,0,3)$. Halla las coordenadas de A y B y dividir el segmento $\overline{AB}$ en 3 partes iguales.

12. - Dados los puntos $A\,(2,0,1)$ y $B\ (0,-2,3)$, halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado entre ambos y el otro (D) esté situado a la izquierda de A.

13. - De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se sabe que $|\vec{u}| = 3$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -12$ y los dos vectores forman un ángulo de 120°. Halla $|\vec{v}|$, $\text{proy}_{\vec{u}}\ \vec{v}$ y $\text{proy}_{2\vec{v}}\ \vec{u}$.

14. - ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$ siendo $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 2$?

15. - Dados los vectores $\vec{u} = (2,-3,6)$ y $\vec{v} = (3,-6,2)$, calcula:

a) El producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

b) El módulo de $\vec{u}$ y el módulo de $\vec{v}$.

c) El ángulo formado por ellos.

d) El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{u}-\vec{v}$.

e) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ que tenga módulo 3. ¿Cuántas soluciones hay?

16. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,-2,2)$ y $\vec{v} = (4,-4,-2)$, calcula:

a) El producto escalar $2\vec{u}\cdot 3\vec{v}$.

b) El módulo de $\vec{u}$ y el módulo de $\vec{v}-\vec{u}$.

c) El ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}+\vec{v}$

d) Los cosenos directores de $\vec{v}$.

e) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ que tenga módulo 6.

17. - Calcula las componentes de un vector $\vec{v}$ que tenga la misma dirección que el vector $\vec{u} = (4,-2,1)$ y su módulo sea 3 y las de otro vector $\vec{w}$ que sea unitario pero con sentido opuesto al vector $\vec{u}$. ¿Cuáles son los cosenos directores de $\vec{u}$?

18. - Los cosenos directores del vector $\vec{u}$ son: $\cos\alpha = 0{,}2$, $\cos\beta = 0{,}3$ y $\cos\gamma = 0{,}87$. Si $|\vec{u}| = 6$, ¿cuáles son sus componentes?

19. - Un vector $\vec{u}$ forma con los vectores $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ de la base ortonormal ángulos de 45° y 60°, y con el vector $\vec{u}_1$ un ángulo agudo. Si $|\vec{u}| = 4$, determina las componentes del vector $\vec{u}$.

20. - Determina, si es posible, el valor de m de modo que $\vec{u} = (m,-2,3)$ y $\vec{v} = (-1,m,1)$ sean:

a) Paralelos

b) Perpendiculares

21. - a) Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (-1,m,4)$ y $\vec{v} = (m,-3,2)$ sean perpendiculares.

b) ¿Qué ángulo formarán para $m = 0$ los vectores $(\vec{u} + 2\vec{v})$ y $(\vec{u} - \vec{v})$?

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa

22. - De dos vectores ortogonales se sabe que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=7$ y $|\vec{u}+\vec{v}|=5$. Halla $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$.

23. - Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tales que $|\vec{u}|=16$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=24$, calcula el módulo de $\vec{v}$.

24. - Dados los vectores $\vec{u}=(2,3,8)$ y $\vec{v}=(-1,2,0)$ calcula:

a) Las componentes de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{v}$.

b) Un vector de la misma dirección que $\vec{v}$ y cuyo módulo sea igual a la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

c) Un vector perpendicular a ambos y de módulo 2.

25. - Sea $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ una base de vectores tal que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$, $|\vec{w}|=1$ y además verifica que $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=3$ y $\vec{v}\cdot\vec{w}=12$. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{a}=11\vec{u}+m\vec{v}+3\vec{w}$ y $\vec{b}=\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ sean ortogonales.

26. - Dados los vectores $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(2,-1,-2)$ y $\vec{c}=(1,-3,2)$, determina un vector unitario (de módulo 1) que siendo coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sea ortogonal (perpendicular) a $\vec{c}$.

27. - Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son tales que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=5$ y $|\vec{u}+\vec{v}|=7$. ¿Qué ángulo forman?

28. - Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=\sqrt{3}$ y $|\vec{v}|=4$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 30°, halla:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$

b) $|\vec{u}-\vec{v}|$ y $|2\vec{u}-\vec{v}|$

c) El ángulo que forman los vectores $(\vec{u}-\vec{v})$ y $(2\vec{u}-\vec{v})$

29. - Determina, si es posible, el valor de α de modo que los vectores $\vec{u}=(1,\alpha,2)$ y $\vec{v}=(1,-2,-\alpha)$:

a) Sean paralelos.

b) Sean perpendiculares.

c) Formen un ángulo de 60°.

30. - Halla todos los vectores de módulo 3 que formen un ángulo de 30° con $\vec{u}=(1,-1,1)$ y de 135° con $\vec{v}=(-1,1,0)$.

31. - Halla todos los vectores de módulo 6 que formen un ángulo de 90° con $\vec{u}=(1,-1,0)$ y 45° con $\vec{v}=(-1,0,1)$.

32. - Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,-2)$, $\vec{v}=(-1,0,3)$ y $\vec{w}=(2,-1,-2)$, calcula:

a) $|\vec{u}|$, $|\vec{w}\times\vec{v}|$ y $|(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}|$

b) $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})$ y $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

33. - Dados los vectores $\vec{u}=(1,4,-8)$, $\vec{v}=(1,-1,0)$ y $\vec{w}=(2,1,-1)$ halla:

a) $|\vec{v}|$ y $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}\times\vec{w}|$ y $|(\vec{u}\times\vec{w})\times\vec{v}|$

34. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,-3,3)$, $\vec{v} = (4,0,-3)$ y $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$, calcula:

a) $|\vec{w}|$, $|\vec{w}\times\vec{v}|$ y $|\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})|$

b) $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})$, $\vec{v}\times(\vec{u}-\vec{w})$ y $|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$

35. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,-1,1)$ y $\vec{v} = (2,3,4)$ calcula:

a) El módulo de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$ y el ángulo que forman.

b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

c) Un vector unitario que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

36. - Dados los vectores $\vec{u} = (-1,m,2)$, $\vec{v} = (2,-1,-4)$ y $\vec{w} = (3,-1,-5)$, se pide:

a) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan distinta dirección.

b) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

c) Un vector que tenga módulo $3\sqrt{6}$ y que sea perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $2\vec{v}-\vec{w}$.

37. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,1,m)$, $\vec{v} = (0,m,-1)$ y $\vec{w} = (1,2m,0)$, determina el valor de m para que:

a) Sean linealmente independientes.

b) El vector $\vec{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

Halla dicha combinación.

c) Sean coplanarios.

d) El área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ valga 125 u^2.

38. - En un sistema de referencia ortogonal $R = \{O,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, donde $|\vec{u}_1| = 1$, $|\vec{u}_2| = 2$ y $|\vec{u}_3| = 2$, tenemos los vectores $\vec{a} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$ y $\vec{b} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$. Con estos datos se pide:

a) $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2$, $\vec{u}_3\cdot\vec{u}_2$, $\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2$, $\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

c) $\vec{u}_2\times\vec{u}_3$, $\vec{u}_3\times\vec{u}_1$, $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$, $\vec{b}\times\vec{a}$ y área del triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

d) Repite los apartados anteriores en el caso de ser un sistema de referencia ortonormal.

39. - Encuentra un vector $\vec{x}$ que tenga de módulo 3, y tal que si $\vec{y} = (3,-3,0)$ verifique: $\vec{x}\times\vec{y} = (6,6,3)$.

40. - Sean $A(m-2,m,-5)$, $B(m,1,-5)$ y $C(-1,3,m)$ los vértices de un triángulo ABC. ¿Cuánto vale m para que el triángulo sea rectángulo en B?

41. - Los vértices de un triángulo ABC son $A(\lambda,2,-1)$, $B(5,3,-4)$ y $C(7,\lambda,-2)$. ¿Cuánto vale λ para que el triángulo sea rectángulo en B?

42. - Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,1,1)$ y $B(0,2,0)$. Si $O(0,0,1)$ es el centro de dicho paralelogramo, halla las coordenadas de los otros dos vértices y el área del paralelogramo.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

43. - Dados los puntos $A(-4,2,-1)$, $B(-1,1,1)$ y $C(2,m,3)$, se pide hallar el valor de m para que los tres puntos:

a) estén alineados.

b) formen un triángulo rectángulo donde $\hat{B}=90^{\circ}$.

c) formen un triángulo isósceles, siendo $\hat{A}$ el ángulo desigual.

d) formen un triángulo de área $\sqrt{52}$ u^2.

44. - Dados los puntos $A(1,1,-1)$, $B(-1,-1,0)$ y $C(3,m,-2)$, se pide:

a) Hallar para qué valores del parámetro m están alineados.

b) Hallar si existen valores de m para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área $2\sqrt{5}$ u^2 y, en caso afirmativo, calcularlos.

c) Hallar para qué valor de m formarán un triángulo rectángulo en B, y calcular el área.

45. - Dados los puntos $A(0,0,-1)$, $B(1,0,-2)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,1,1)$ calcula:

a) El área y el perímetro del triángulo de vértices A, B y C.

b) El volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D.

c) El volumen del paralelepípedo determinado por esos cuatro puntos.

d) El área de una de las caras laterales.

46. - Sea la pirámide de vértices $A(0,1,-1)$, $B(1,1,0)$, $C(-1,1,0)$ y $D(1,-2,2)$, calcula:

a) El área del paralelogramo determinado por los puntos A, B y C.

b) El área de cada cara.

c) Su volumen.

AUTOEVALUACIÓN

1. Dados los vectores de componentes (1, 3, –2) y (3, x, –6), indica el valor de x para que los dos vectores sean linealmente dependientes.

a) 6 b) 9 c) –3 d) –6

2. El módulo del vector de origen A(–2, 3, –2) y extremos B(2, 0, –2) es:

a) $\sqrt{82}$ b) 25 c) $\sqrt{41}$ d) 5

3. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$ el vector $\vec{w}=3\vec{u}-2\vec{v}$ tiene de componentes:

a) (15, –15, 15) b) (9, –15, 15) c) (15, 15, 15) d) (15, –12, 15)

4. Dados los puntos $A(4,-1,5)$ y $B(2,7,-5)$, las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

a) (3, 3, 0) b) (6, –6, 10) c) (3, 4, 0) d) (6, –4, 10)

5. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$, su producto escalar es:

a) 15 b) –15 c) –3 d) –6

6. Dado el vector $\vec{v}=(-6,3,0)$ indica cuál del los vectores $\vec{u}$ es ortogonal a él:

a) $\vec{u}=(1,-3,5)$ b) $\vec{u}=(1,-2,5)$ c) $\vec{u}=(1,2,7)$ d) $\vec{u}=(2,5,5)$

7. Dados los puntos $A(4,-1,5)$, $B(2,7,-5)$ y C(6, –7, 16) el área del triángulo construido sobre ellos es:

a) 150 b) 0 c) 30 d) 6$\sqrt{41}$

8. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$, su producto vectorial es:

a) $\vec{u}\times\vec{v}=(-15,-30,-15)$ b) $\vec{u}\times\vec{v}=(15,15,15)$ c) $\vec{u}\times\vec{v}=(-15,30,-15)$ d) $\vec{u}\times\vec{v}=(15,-30,15)$

9. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$ y $\vec{w}=(1,1,1)$, su producto mixto es:

a) –60 b) 45 c) –15 d) 0

10. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$ y $\vec{w}=(1,1,1)$, el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos es:

a) 60 b) 45 c) 15 d) 0

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Apéndice: Problemas de vectores en las P.A.A.U.

(1) Busca el área del polígono de vértices $A(4,7,8)$, $B(2,3,4)$, $C(-1,-2,1)$ y $D(1,2,5)$.

(2) Las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo ABC son $M(1,0,0)$, $N(0,1,0)$ y $P(0,0,1)$.

a) Obtén las coordenadas de los vértices A, B y C del triángulo.

b) Halla el área del triángulo.

(3) Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(0,4,2)$ son dos vértices de un triángulo isósceles. Obtén las coordenadas del tercer vértice sabiendo que el punto es de la forma $R(x,0,20)$. ¿Es única la solución?

(4) Se considera el paralelepípedo cuyos vértices de la cara inferior son los puntos $A(-1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(3,0,0)$ y $D(2,0,-1)$ con A y C vértices opuestos. Sea $A'(-3,1,0)$ el vértice adyacente a A en la cara superior. Calcule:

a) Los vértices de la cara superior.

b) El volumen del paralelepípedo.

(5) Sean los puntos $A(x,4,3)$, $B(1,2,2)$ y $C(-1,0,1)$.

a) ¿Para qué valores de x los puntos no forman un triángulo?

b) Con $x=1$ calcula el área del triángulo que forman los puntos.

(6) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores del espacio, indica cuál o cuáles de las siguientes expresiones no tienen sentido:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) \qquad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c} \qquad (\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c} \qquad |\vec{a}|\cdot\vec{b} \qquad (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$

(7) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indica cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos vale cero:

$$[\vec{a}+\vec{c},\vec{a}-\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] \qquad [\vec{a}+\vec{c},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}] \qquad [\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a}]$$

(8) Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser ciertas, justifícalas; en caso contrario, pon ejemplos que lo confirmen.

a) El producto mixto de tres vectores cualesquiera no nulos es siempre distinto de cero.

b) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ no nulos que satisfacen la condición $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, entonces se verifica que $\vec{b}=\vec{c}$.

(9) Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, tales que $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$ y $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ calcula la siguiente suma de productos escalares: $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

(10) Dados los puntos $A(2,-2,1)$, $B(0,1,-2)$, $C(-2,0,4)$ y $D(2,-6,2)$:

a) Prueba que el cuatrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y halla la distancia entre los dos lados paralelos.

b) Halla el área del triángulo ABC.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

(11) ¿Es siempre cierto que $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$? En caso afirmativo, justifícalo; en caso contrario, pon un ejemplo que lo confirme.

(12) Dados los puntos $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(5,4,-3)$ y $D(0,1,4)$ calcula:

a) El área del triángulo de vértices A, B y C.

b) El volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D.

(13) a) Demuestra que si tres vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son perpendiculares entre sí entonces se verifica:

$$|\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3|^2=|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2+|\vec{v}_3|^2$$

donde $|\vec{w}|$ denota el módulo del vector $\vec{w}$.

b) Dados los vectores $\vec{v}_1=(1,1,-1)$, $\vec{v}_2=(1,0,1)$ halla un vector $\vec{v}_3$ tal que:

$$|\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3|^2=|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2+|\vec{v}_3|^2$$

c) Dado el vector $\vec{v}=(1,2,3)$, halla los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

a) $\vec{v}_1$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;

b) $\vec{v}_1$ es perpendicular a $\vec{v}_2$

c) $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$

(14) Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

a) Halla las coordenadas del cuarto vértice D y calcula el área de dicho paralelogramo.

b) Clasifica el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

(15) Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación $\overrightarrow{CB}=-3\cdot\overrightarrow{AB}$

a) Calcula el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

b) Si $A(1,2,-1)$ y $B(3,6,9)$, halla las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

(16) Se consideran los puntos $A(1,a,0)$, $B(1,1,a-2)$ y $C(1,-1,a)$.

a) Comprueba que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a.

b) Halla el área del triángulo que determinan los tres puntos.

(17) Resuelve la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{x}\times(2,1,-1)=(1,3,5)$$

sabiendo que $|\vec{x}|=\sqrt{6}$.

(18) Dados los vectores $\vec{u}=(a,1+a,2a)$, $\vec{v}=(a,1,a)$ y $\vec{w}=(1,a,1)$, se pide:

a) Determina los valores de a para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}=(3,3,0)$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a=2$.

c) Justifica razonadamente si para $a=0$ se cumple la igualdad $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Matemáticas II.
2º Bachillerato.
Capítulo 5: Rectas y planos en el espacio

LibrosMareaVerde.tk

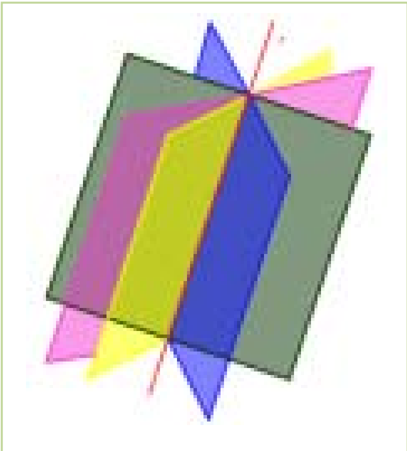
www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisora: Milagros Latasa

Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *sofware* libre (GeoGebra y GIMP)

Índice



Resumen

En este capítulo se inicia el estudio de la Geometría Analítica en el espacio de dimensión tres, con las ecuaciones de las rectas y de los planos que nos permiten conocer si una recta está contenida en un plano, lo corta o es paralela a él, cuáles son las posiciones relativas de dos rectas en el espacio, y lo mismo, de dos planos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

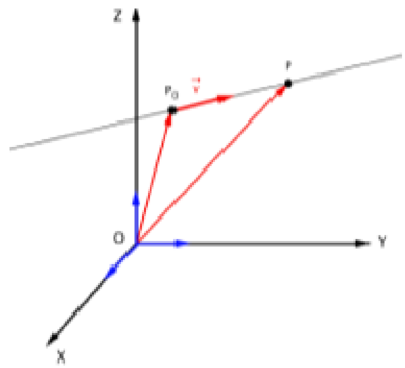
1. LA RECTA EN EL ESPACIO

1.1. Ecuación vectorial de la recta

Una recta *r* en el espacio viene determinada por un punto $P_0 \in r$ y un vector $\vec{v}$.

- El vector $\overrightarrow{OP_0}$ se denomina **vector de posición** del punto P_0.
- El vector $\vec{v}$ se denomina **vector director**, y su dirección es paralela a la de la recta.

El vector $\overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{v}$ es un vector que tiene su origen en O y cuyo extremo es un punto de la recta *r*. Es decir, para cada valor del parámetro *t* es el vector de posición de un punto P de la recta.



Se llama ecuación vectorial de la recta *r* a la expresión:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{v}$$

donde $P(x, y, z)$ es un punto genérico de la recta, $\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ es el vector de posición de un punto dado de la recta $P_0 \in r$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es un vector director de la recta y *t* es cualquier número real.

A partir de la ecuación anterior, para cada valor de *t* obtendremos un punto de la recta *r*.

1.2. Ecuaciones paramétricas de la recta

Si expresamos la ecuación anterior en coordenadas, tenemos:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

igualando coordenada a coordenada, obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot v_1 \\ y &= y_0 + t \cdot v_2 \\ z &= z_0 + t \cdot v_3 \end{aligned}\right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

1.3. Ecuación continua de la recta

A partir de las ecuaciones paramétricas, despejando *t* e igualando, obtenemos la ecuación continua:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + t\cdot v_1 \\ y = y_0 + t\cdot v_2 \\ z = z_0 + t\cdot v_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - x_0 = t\cdot v_1 \\ y - y_0 = t\cdot v_2 \\ z - z_0 = t\cdot v_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-x_0}{v_1} \\ t = \dfrac{y-y_0}{v_2} \\ t = \dfrac{z-z_0}{v_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Igualando:}$$

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

1.4. Ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta

A partir de la ecuación continua, separando las igualdades y agrupando todos los términos en un miembro, obtenemos las ecuaciones implícitas de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{v_1} = \dfrac{y-y_0}{v_2} \\ \dfrac{x-x_0}{v_1} = \dfrac{z-z_0}{v_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_2(x-x_0) = v_1(y-y_0) \\ v_3(x-x_0) = v_1(z-z_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_2x - v_2x_0 = v_1y - v_1y_0 \\ v_3x - v_3x_0 = v_1z - v_1z_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

De donde:

$$\left.\begin{array}{l} v_2x - v_1y + (v_1y_0 - v_2x_0) = 0 \\ v_3x - v_1z + (v_1z_0 - v_3x_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'z + C' = 0 \end{array}\right\}$$

con:

$$A = v_2 \quad , B = -v_1 , \; C = v_1y_0 - v_2x_0$$

$$A' = v_3 , \; B' = -v_1 , \; C' = v_1z_0 - v_3x_0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Calcula, en todas las formas estudiadas, las ecuaciones de la recta que pasa por el punto* $A\,(1,\,-2,\,3)$ *y tiene por vector director* $\vec{v} = (-5, 4, 2)$.

En coordenadas, la ecuación **vectorial** es:

$$(x, y, z) = (1,\, 2,\, -3) + t \cdot (-5,\, 4,\, 2)$$

Para obtener las ecuaciones **paramétricas** igualamos coordenada a coordenada:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - 5t \\ y &= 2 + 4t \\ z &= -3 + 2t \end{aligned}\right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Despejando t, hallamos la ecuación **continua**:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - 5t \\ y &= 2 + 4t \\ z &= -3 + 2t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x - 1 &= -5t \\ y - 2 &= 4t \\ z + 3 &= 2t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} t &= \frac{x-1}{-5} \\ t &= \frac{y-2}{4} \\ t &= \frac{z+3}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = \frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{2}$$

Operamos para eliminar las fracciones y hallamos las ecuaciones **implícitas**:

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-2}{4} \\ \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z+3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot (x-1) = (-5) \cdot (y-2) \\ 2 \cdot (y-2) = 4 \cdot (z+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = -5y + 10 \\ 2y - 4 = 4z + 12 \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 14 = 0 \\ 2y - 4z - 16 = 0 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones son realmente un sistema, y podemos sustituirlo por cualquier otro sistema equivalente a él, obtenido combinando linealmente las ecuaciones.

Actividades propuestas

1. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto $A\,(-1,\,-4,\,2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (-3, -1, 5)$

2. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto $A\,(4,\,-3,\,-2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (-1, 0, 6)$

3. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto $A\,(0,\,1,\,0)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (-2, 0, 0)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

1.5. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos A y B basta con hallar el vector $\overrightarrow{AB}$ y utilizarlo como vector director. Siendo $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, fácilmente podemos hallar:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

y utilizar A o B como punto para sustituir en cualquiera de las ecuaciones vistas antes, siendo la más frecuente la ecuación continua:

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \Rightarrow \frac{x-a_1}{a_1-b_1} = \frac{y-a_2}{a_2-b_2} = \frac{z-a_3}{a_3-b_3}$$

O bien:

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \Rightarrow \frac{x-b_1}{a_1-b_1} = \frac{y-b_2}{a_2-b_2} = \frac{z-b_3}{a_3-b_3}$$

Actividad resuelta

- *Determina la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos* $A\,(2, -3, 1)$ *y* $B\,(4, 5, -1)$.

Considerando el punto A y tomando como vector director $\overrightarrow{AB} = (2, 8, -2)$, la ecuación es:

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{8} = \frac{z-1}{-2}$$

A partir de la ecuación continua se obtienen las ecuaciones implícitas como vimos antes:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{8} \\ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{z-1}{-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x - 16 = 2y + 6 \\ -2x + 4 = 2z - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x - 2y - 22 = 0 \\ -2x - 2z + 6 = 0 \end{array}\right\}$$

Ya dijimos que las ecuaciones implícitas no son únicas, podemos combinarlas linealmente y seguirán siendo la ecuación de la misma recta. En primer lugar, podemos simplificarlas:

$$r: \begin{cases} 4x - y - 11 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

y ahora podemos sustituir cualquiera de las dos por una combinación lineal de ellas. Si, por ejemplo, operamos para eliminar la x en la segunda ecuación:

$$r: \begin{cases} 4x - y - 11 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \xrightarrow[4\times 2^{\circ}\,\text{ec} - 1^{\circ}\,\text{ec}]{} \end{cases} \begin{cases} 4x - y - 11 = 0 \\ y + 4z - 1 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

llegamos a las ecuaciones implícitas que obtendríamos si en la ecuación continua hubiéramos utilizado las fracciones segunda y tercera.

Si en la ecuación (1) operamos cualquier otra combinación lineal:

$$r: \begin{cases} 4x - y - 11 = 0 \xrightarrow[1^{\circ}\,\text{ec} - 2\times 2^{\circ}\,\text{ec}]{} \\ x + z - 3 = 0 \xrightarrow[3\times 2^{\circ}\,\text{ec} - 1^{\circ}\,\text{ec}]{} \end{cases} \begin{cases} 2x - y - 2z - 5 = 0 \\ -x + y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

las coordenadas de A y B siguen verificando ambas ecuaciones.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Halla el vector director de la recta dada por las siguientes ecuaciones implícitas:*

$$r:\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ -x+y+3z+2=0 \end{cases}$$

Para hallar el vector director de la recta, debemos llegar a las ecuaciones paramétricas. Basta resolver el sistema dejando a dos de las variables en función de la tercera que, en este caso, resulta más fácil si despejamos x e y en función de z:

$$\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ -x+y+3z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2-z \\ -x+y=-2-3z \end{cases}$$

Sumando y restando las ecuaciones miembro a miembro obtenemos:

$$\begin{cases} x+y=2-z \\ -x+y=-2-3z \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=2-z \\ -x+y=-2-3z \end{cases}$$

$$\text{Suma}: \quad 2y=-4z \qquad\qquad \text{Resta}: \quad 2x=4+2z$$

$$y=-2z \qquad\qquad x=2+z$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x=2+z \\ y=-2z \\ z=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=-2t \\ z=t \end{array}\right\} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Y el vector director es: $\vec{v}=(1,-2,1)$

Actividad resuelta

- *Determina las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos* $A\,(1,1,1)$ *y* $B\,(2,1,2)$.

Considerando el punto A y el vector director $\overrightarrow{AB}=(1,0,1)$, las ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+1\cdot t \\ y=1+0\cdot t \\ z=1+1\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=1 \\ z=1+t \end{array}\right\} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Observa que **NO** podemos despejar t en la segunda ecuación, por lo que no podemos llegar a la ecuación continua. Esto se debe a que una de las componentes del vector director es 0, y no podemos dividir por 0.

Sí podemos obtener las ecuaciones implícitas, eliminando t combinando la segunda y tercera ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+1\cdot t \\ y=1+0\cdot t \\ z=1+1\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1 \\ \left.\begin{array}{l} x=1+t \\ z=1+t \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1 \\ x=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$$

Actividades propuestas

4. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A\,(0,0,0)$ y $B\,(3,-4,1)$.

5. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A\,(3,-2,6)$ y $B\,(1,-5,7)$.

6. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A\,(2,-1,6)$ y $B\,(7,-2,-1)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

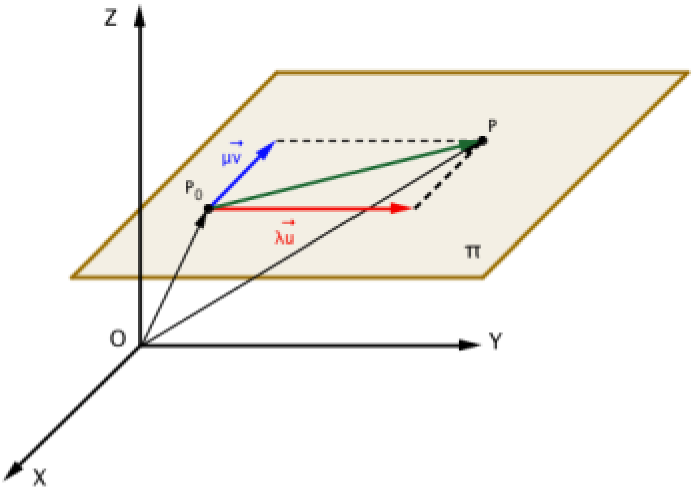
2. ECUACIONES DEL PLANO EN EL ESPACIO

2.1. Ecuación vectorial del plano

Un plano π en el espacio viene determinado por un punto $P_0 \in \pi$ y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de componentes no proporcionales paralelos al plano.

- El vector $\overrightarrow{OP_0}$ se denomina **vector de posición**.
- Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denominan **vectores directores** del plano.

El vector $\overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ es un vector que tiene su origen en O y cuyo extremo es un punto del plano π dado.



Se llama ecuación vectorial del plano π a la expresión:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

donde $P(x, y, z)$ es un punto genérico del plano, $\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ es el vector de posición de P_0, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son los vectores directores del plano y λ y μ son dos números reales cualesquiera.

A partir de la ecuación anterior para cada par de valores de λ y μ obtenemos un punto del plano π.

2.2. Ecuaciones paramétricas del plano

Si expresamos esta ecuación en coordenadas, tenemos:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Operando:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2, \lambda \cdot u_3) + (\mu \cdot v_1, \mu \cdot v_2, \mu \cdot v_3)$$
$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1, y_0 + \lambda \cdot u_2 +, \mu \cdot v_2, z_0 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3)$$

igualando coordenada a coordenada, obtenemos las ecuaciones paramétricas del plano:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y &= y_0 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z &= z_0 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{aligned}\right\}, \text{ con } \lambda \text{ y } \mu \in \mathbb{R}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

2.3. Ecuación general o implícita del plano

A partir de la ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

Como $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP} - \left(-\overrightarrow{P_0O}\right) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P_0O} = \overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_0P}$ tenemos: $\overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$

Lo que significa que, aunque tenemos tres vectores $\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, sólo dos son linealmente independientes. Si expresamos esta ecuación en coordenadas:

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

y, por tanto:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$

Si el rango de esta matriz es 2, no será posible encontrar un menor de orden 3 no nulo y el determinante de la matriz ha de ser 0.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante obtendremos la ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando los determinantes obtenemos cuatro valores reales, de modo que la ecuación final es de la forma:

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \quad \text{con } A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

Actividades resueltas

- *Calcula, en todas las formas estudiadas, las ecuaciones del plano que pasa por el punto* $A\,(1, -2, 3)$ *y tiene por vectores directores* $\vec{u} = (1, 2, 3)$ *y* $\vec{v} = (-5, 4, 2)$.

En primer lugar, comprobamos que los vectores que definen el plano no son paralelos, algo evidente al no ser proporcionales. Empezamos escribiendo la ecuación **vectorial**:

$$(x, y, z) = (1,-2,3) + \lambda \cdot (1,2,3) + \mu \cdot (-5,4,2)$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Igualamos coordenada a coordenada y obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda - 5\mu \\ y = -2 + 2\lambda + 4\mu \\ z = 3 + 4\lambda + 2\mu \end{array}\right\}, \text{ con } \lambda \text{ y } \mu \in \mathbb{R}$$

Reescribimos el sistema en λ y μ para llegar a la ecuación general:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda - 5\mu = x - 1 \\ 2\lambda + 4\mu = y + 2 \\ 4\lambda + 2\mu = z - 3 \end{array}\right\}$$

El sistema sólo tendrá solución cuando la matriz ampliada del sistema tenga rango dos, es decir, cuando el determinante sea nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & x-1 \\ 2 & 4 & y+2 \\ 4 & 2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$4\cdot(z-3) + 4\cdot(x-1) - 20\cdot(y+2) - 16\cdot(x-1) + 10\cdot(z-3) - 2\cdot(y+2) = 0$$

$$4z - 12 + 4x - 4 - 20y - 40 - 16x + 16 + 10z - 30 - 2y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow -12x - 22y + 14z - 74 = 0$$

Podemos simplificar la ecuación obtenida como:

$$6x + 11y - 7z + 37 = 0$$

- *Halla la ecuación del plano que pasa por el punto* $A\,(1,\,0,\,0)$ *y es paralelo a las rectas:*

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3} \quad \text{y} \quad s : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

Si el plano es paralelo a las rectas, los vectores directores de las mismas $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son paralelos al plano y pueden usarse como vectores directores del plano. Junto con el punto dado operamos:

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y \\ 3 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \pi : -5x + 7y - 3z + 5 = 0$$

- *Halla la ecuación del plano que pasa por el punto* $A\,(1,\,0,\,0)$ *y contiene a la recta*

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$$

Con esta recta conocemos un punto $B\,(1,\,0,\,-2)$ y su vector director $\vec{v} = (1,\,2,\,3)$. Si r está contenida en el plano, lo están todos sus puntos y su vector director. Así, tenemos dos puntos del plano (A y B) y un vector. Hallamos la ecuación del plano definido por el punto A y los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v} = (1,\,2,\,3) \\ \overrightarrow{AB} = (0,\,0,\,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : 2x - y - 2 = 0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

2.3.1. Vector normal del plano

Si en la ecuación general del plano:

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \quad \text{con } A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

recordamos los determinantes de los que proceden los valores de A, B y C:

$$x \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

observamos la forma característica del producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

Es decir, el vector de componentes (A, B, C) es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y, por ende, al propio plano.

Se llama **vector normal del plano** $\pi : A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ al vector:

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

que es perpendicular al plano.

Actividad resuelta

- *Determina el vector normal al plano* $\pi : 2x + y - z - 2 = 0$.

  Según lo explicado antes, basta con identificar las componentes del vector con los coeficientes:

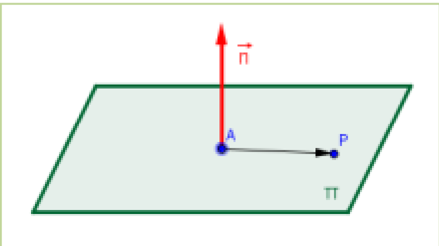
$$\left.\begin{array}{c} A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \\ 2\,x + y - z - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A = 2 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} = 2\vec{i} + 1\vec{j} - 1\vec{k} \Rightarrow \vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

2.3.2. Ecuación del plano dado su vector normal y un punto

Dado un punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (A, B, C)$, podemos hallar la ecuación general del plano aprovechando la condición de perpendicularidad vista en el capítulo anterior:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Si llamamos $P(x, y, z)$ a un punto genérico del plano, en la figura vemos que los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares. Por tanto:



$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Rightarrow (A, B, C) \cdot (x - a_1, y - a_2, z - a_3) = 0$$

Operando:

$$A \cdot (x - a_1) + B \cdot (y - a_2) + C \cdot (z - a_3) = 0$$

Que es la ecuación del plano dado un punto y su vector normal.

Actividades resueltas

- *Determina la ecuación del plano π cuyo vector normal es $\vec{n}=(-1,\,2,\,0)$ y pasa por el origen*

El origen es el punto de coordenadas $(0,\,0,\,0)$, por tanto:

$$\pi: A\cdot(x-a_1)+B\cdot(y-a_2)+C\cdot(z-a_3)=0 \Rightarrow \pi:(-1)\cdot(x-0)+2\cdot(y-0)+0\cdot(z-0)=0$$

Es decir:

$$\pi: -x+2y=0$$

- *Determina la ecuación del plano π que pasa por el origen y es perpendicular a la recta:*

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{3}$$

Si el plano es perpendicular a la recta, el vector director de ésta puede utilizarse como vector normal al plano, es decir:

$$\vec{v}=(1,\,2,\,3)=\vec{n} \Rightarrow \pi:1\cdot(x-0)+2\cdot(y-0)+3\cdot(z-0)=0 \Rightarrow \pi: x+2y+3z=0$$

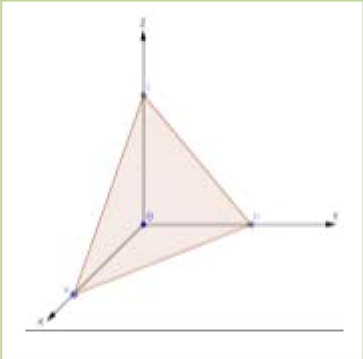
2.4. Ecuación segmentaria del plano

Si en la ecuación general del plano $D\neq 0$, podemos dividir ambos términos entre D y obtenemos:

$$\frac{A}{D}x+\frac{B}{D}y+\frac{C}{D}z+\frac{D}{D}=0 \Rightarrow A'x+B'y+C'z+1=0$$

Representando un plano genérico, que $D\neq 0$ nos garantiza que cortará a los tres ejes cartesianos:

Si denominamos los puntos de corte como $A\,(a,\,0,\,0)$, $B\,(0,\,b,\,0)$ y $C\,(0,\,0,\,c)$, como todos pertenecen al plano deben verificar la ecuación del mismo, es decir:



$$\pi: A'x+B'y+C'z+1=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Punto } A: A'\cdot a+B'\cdot 0+C'\cdot 0+1=0 \\ \text{Punto } B: A'\cdot 0+B'\cdot b+C'\cdot 0+1=0 \\ \text{Punto } C: A'\cdot 0+B'\cdot 0+C'\cdot c+1=0 \end{cases}$$

despejando:

$$\begin{cases} A'\cdot a+1=0 \Rightarrow A'=\dfrac{-1}{a} \\ B'\cdot b+1=0 \Rightarrow B'=\dfrac{-1}{b} \Rightarrow \pi:\dfrac{-1}{a}x+\dfrac{-1}{b}y+\dfrac{-1}{c}z+1=0 \\ C'\cdot c+1=0 \Rightarrow C'=\dfrac{-1}{c} \end{cases}$$

o, multiplicando por -1:

$$\pi: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$$

que es la ecuación **segmentaria** del plano.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Determina la ecuación segmentario del plano* $\pi : x + 2y - z + 2 = 0$

El término independiente de la ecuación segmentaria es (–2), así que dividiremos ambos términos de la ecuación del plano dado entre (–2):

$$\pi : x + 2y - z + 2 = 0 \Rightarrow \frac{x + 2y - z + 2}{-2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} - 1 = 0$$

Podemos deducir fácilmente que el plano pasa por los puntos:

$$A(-2, 0, 0), \quad B(0, -1, 0), \quad C(0, 0, 2)$$

2.5. Ecuación del plano que pasa por tres puntos

El apartado anterior nos muestra la forma en la que podemos hallar la ecuación del plano que pasa por tres puntos. Si $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$, pertenecen al plano de ecuación

$$A x + B y + C z + D = 0$$

Sus coordenadas deben verificar la ecuación simultáneamente, es decir, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} A x + B y + C z + D = 0 \\ A \cdot a_1 + B \cdot a_2 + C \cdot a_3 + D = 0 \\ A \cdot b_1 + B \cdot b_2 + C \cdot b_3 + D = 0 \\ A \cdot c_1 + B \cdot c_2 + C \cdot c_3 + D = 0 \end{cases}$$

Por extraño que parezca, en este sistema las incógnitas son los coeficientes A, B, C y D. Sin embargo, con la ecuación segmentaria vemos que realmente sólo necesitaríamos **tres** incógnitas. Para resolver un sistema en la que una incógnita *no es del todo necesaria*, podemos añadir una cuarta ecuación que *tampoco sea necesaria*, la propia ecuación del plano. Así, expresando el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que la solución sea única, el determinante de la matriz debe ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Que es la ecuación del plano que contiene a **tres puntos**.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividades resueltas

- *Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$ y $C(1,1,0)$.

Podríamos resolver el problema hallando la ecuación del plano que pasa por el punto A y tiene como vectores directores a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, siguiendo los pasos dados en el apartado 2.3:

$$(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda\cdot(-1,1,0)+\mu\cdot(0,1,-1)$$

Operando llegamos a:
$$\left.\begin{aligned}-\lambda \quad &= x-1\\ \lambda+\mu &= y\\ -\mu &= z-3\end{aligned}\right\}$$

Que se resuelve rápidamente sustituyendo λ y μ en la ecuación:

$$\left.\begin{aligned}-\lambda \quad &= x-1\\ \lambda+\mu &= y\\ -\mu &= z-3\end{aligned}\right\}\Rightarrow -(x-1)-(z-3)=y\Rightarrow x+y+z-4=0$$

En este ejemplo no fue muy difícil desarrollar la ecuación a partir de las ecuaciones paramétricas, sin embargo, en general es más rápido calcular un único determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\cdot x-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\cdot y+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\cdot z-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

Es decir: $(-1)\cdot x-1\cdot y+(-1)\cdot z-(-2)=0\Rightarrow -x-y-z+2=0$

- *Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(2,0,0)$, $B(0,-2,0)$ y $C(0,0,5)$.

Observando que los puntos A, B y C pertenecen cada uno a un eje coordenado podemos plantear directamente la ecuación segmentaria del plano:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0\Rightarrow\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{z}{5}-1=0$$

- *Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,0)$.

Si el punto C no fuera el origen, podríamos plantear la ecuación segmentaria del plano. Debemos, sin embargo, plantear el determinante:
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

Desarrollando por los elementos de la tercera columna obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow +z\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+0\cdot\ldots=0\Rightarrow z=0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

2.6. Condición para que cuatro puntos sean coplanarios

Los puntos $A\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $B\left(b_1,b_2,b_3\right)$, $C\left(c_1,c_2,c_3\right)$ y $D\left(d_1,d_2,d_3\right)$ son coplanarios cuando pertenecen a un mismo plano. Si la ecuación de dicho plano es:

$$A\,x+B\,y+C\,z+D=0 \quad \text{con } A, B, C, D\in\mathbb{R}$$

ya vimos que podemos dividir ambos términos entre D y dejar la ecuación con sólo tres coeficientes:

$$A'\,x+B'\,y+C'\,z+1=0$$

Si redefinimos A', B' y C' como $-A$, $-B$ y $-C$ obtenemos la ecuación reescrita como: $A\,x+B\,y+C\,z=1$

Si los cuatro puntos pertenecen al plano, sus coordenadas respectivas deben verificar la ecuación simultáneamente, es decir, tenemos el sistema: $\begin{cases} A\cdot a_1+B\cdot a_2+C\cdot a_3=1\\ A\cdot b_1+B\cdot b_2+C\cdot b_3=1\\ A\cdot c_1+B\cdot c_2+C\cdot c_3=1\\ A\cdot d_1+B\cdot d_2+C\cdot d_3=1\end{cases}$

Expresando el sistema en forma matricial, $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ d_1 & d_2 & d_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

Para que la solución sea única, el determinante de la **matriz ampliada** debe ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1\\ b_1 & b_2 & b_3 & 1\\ c_1 & c_2 & c_3 & 1\\ d_1 & d_2 & d_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

Esta condición es válida incluso cuando los puntos están alineados u otras condiciones que impliquen un rango más pequeño de la matriz.

Otra forma de resolverlo es comprobar que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes, es decir, comprobando si el determinante formado por sus componentes es nulo:

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{vmatrix}=0$$

Esta estrategia es el segundo concepto básico para resolver casi cualquier problema de geometría en el espacio:
"Si un punto pertenece a una recta o a un plano, debe verificar sus ecuaciones"

Actividades resueltas

- *Comprueba que los puntos* $A\left(1,1,1\right)$, $B\left(3,0,0\right)$, $C\left(0,2,0\right)$ *y* $D\left(0,0,6\right)$ *son coplanarios.*

Planteamos el determinante de orden 4, hacemos ceros y resolvemos por el adjunto del elemento a_{12}:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 1\end{vmatrix}\xrightarrow[f_3-2\cdot f_1]{}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 6 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1\\ -2 & -2 & -1\\ 0 & 6 & 1\end{vmatrix}=-\left(-6-12+18\right)=0$$

Por tanto, los puntos están alineados.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

3. POSICIONES RELATIVAS

Hablamos de posiciones relativas para indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común. Las situaciones básicas a reconocer son:

1. **Secantes**: Las figuras tienen uno o más puntos en común.
2. **No secantes**: Las figuras no tienen puntos en común.
3. **Coincidentes**: Todos los puntos son comunes, por tanto son la misma figura.
4. **Contenidas**: Todos los puntos de una figura pertenecen a la segunda, pero no a la inversa.

Además, podemos clasificarlas en función de su dirección como:

1. **Paralelas**: Todos los puntos de una figura están a la misma distancia de la otra.
2. **Perpendiculares**: Las figuras forman un ángulo de 90°.

La estrategia fundamental para abordar este apartado es:

El tercer concepto básico para resolver problemas de geometría en el espacio:

"Para determinar los puntos en común de dos figuras (si existen) se resolverá el sistema formado sus ecuaciones"

3.1. Posiciones relativas de dos planos en el espacio

Sean los planos π y π', dados por su ecuación general:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Consideramos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

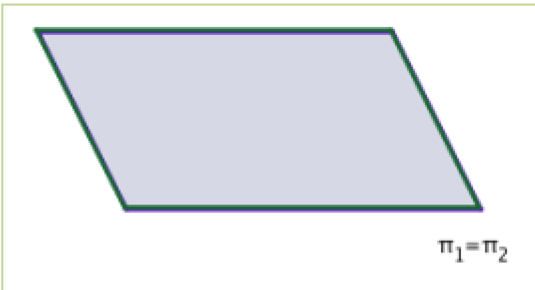
Sea M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de M y M^*. Se pueden dar los siguientes casos:

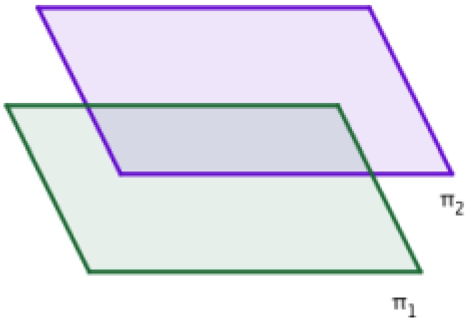
1. Si $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 1 < \text{n}^{\text{o}} \text{ incógnitas} \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones. Todos los puntos comunes (la intersección) es todo el plano, por tanto los planos son **coincidentes**.

   El rango es 1 sólo si las dos filas de M y M^* son proporcionales, lo que algebraicamente puede interpretarse como que simplificando una de las ecuaciones, puede obtenerse la otra.



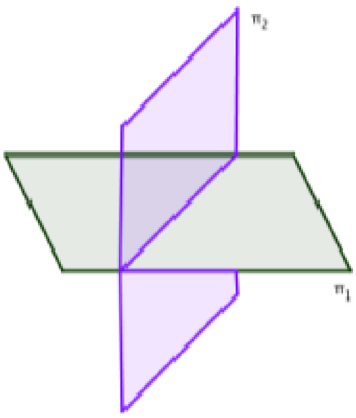
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa

2. Si $\text{rg}(M) = 1 \neq \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ El sistema no tiene solución. Los dos planos no tienen puntos en común, luego son **paralelos**.



El rango de M es 1 sólo si las filas son proporcionales, lo que geométricamente se interpreta como que los vectores normales son paralelos. Que D y D' no mantengan esa relación de proporcionalidad quiere decir que contienen distintos puntos.

3. Si $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 < \text{n}^{\text{o}}\ \text{incógnitas} \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones. En este caso los planos son **secantes** y su intersección es una recta.



Esta situación es equivalente a lo visto en el apartado 1.4. Dicho de otro modo, las ecuaciones implícitas de la recta representan geométricamente la intersección de dos planos.

Esta interpretación geométrica nos permite simplificar la obtención del vector director de la recta definida por sus ecuaciones implícitas: es trivial observar que $\vec{v}$ está contenido en ambos planos, π_1 y π_2. Por ese motivo, $\vec{v}$ es perpendicular a los dos vectores normales de dichos planos, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, lo que nos permite identificarlo con el producto vectorial:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividades resueltas

- *Halla el vector director de la recta dada por las siguientes ecuaciones implícitas:*

$$r:\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ -x+y+3z+2=0 \end{cases}$$

Los vectores normales de los planos son $\vec{n}_1=(1,\ 1,\ 1))$ y $\vec{n}_2=(-1,\ 1,3))$. Por tanto:

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=2\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$$

- *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{cases} \pi_1: x-y+2z-1=0 \\ \pi_2: x+y+3z+1=0 \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices del mismo:

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1: x-y+2z=1 \\ \pi_2: x+y+3z=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Es trivial observar que el rango de M es dos, ya que sus filas no son proporcionales. Por tanto, los planos no son paralelos sino secantes: **π_1 y π_2 se cortan definiendo una recta**.

- *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{cases} \pi_1: 6x+3y-3z-1=0 \\ \pi_2: 10x+5y-5z+1=0 \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices del mismo:

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1: 6x+3y-3z=1 \\ \pi_2: 10x+5y-5z=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}\Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 & 1 \\ 10 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora el rango de M es 1, ya que sus filas son proporcionales, y todos los determinantes que podemos construir a partir de ella son nulos:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \operatorname{rg}(M)=1$$

Sin embargo, el rango de M^* es dos, ya que D y D' no mantienen la relación de proporcionalidad de los demás coeficientes:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}=3-(-5)=8\neq 0\Rightarrow \operatorname{rg}(M^*)=2$$

Por tanto, **los planos π_1 y π_2 son paralelos**.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Halla el valor de A, B y C para que los siguientes planos sean coincidentes:

$$\begin{cases} \pi_1 : 2x + B\,y - 3z + 2 = 0 \\ \pi_2 : A\,x + 5y + C\,z + 3 = 0 \end{cases}$$

Para que sean coincidentes, los coeficientes A, B, C y D deben ser proporcionales, por tanto:

$$\frac{2}{A} = \frac{B}{5} = \frac{-3}{C} = \frac{2}{3}$$

Resolviendo las ecuaciones dos a dos:

$$A = 3 \quad , \quad B = \frac{10}{3} \quad , \quad C = \frac{-9}{2}$$

Por tanto:
$$\begin{cases} \pi_1 : 2x + \frac{10}{3}\,y - 3z + 2 = 0 \\ \pi_2 : 3\,x + 5y - \frac{9}{2}\,z + 3 = 0 \end{cases}$$

3.2. Posiciones relativas de tres planos en el espacio

Sean los planos π, π' y π'' dados por sus respectivas ecuaciones generales:

$$\pi : A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \qquad \pi' : A'\,x + B'\,y + C'\,z + D' = 0 \qquad \pi'' : A''\,x + B''\,y + C''\,z + D'' = 0$$

Consideramos el sistema formado por dichas ecuaciones:

$$\begin{cases} A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

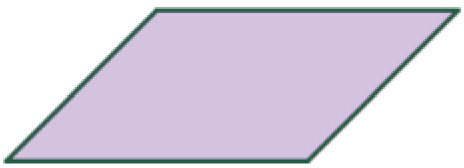
Sean M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de M y M^*.

Se pueden dar los siguientes casos:

1. Si $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 1 < \text{n}^{\text{o}}\ \text{incógnitas} \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ Las ecuaciones son proporcionales. El sistema tiene infinitas soluciones. Los tres planos son **coincidentes**.



Como en el caso de dos planos, el rango es igual a 1 sólo si las dos filas de M y M^* son proporcionales, y algebraicamente podemos simplificar las ecuaciones a una común.

Ejemplo

- *Los planos:*

$$\begin{cases} \pi_1 : 5x + 5y + 5z - 10 = 0 \\ \pi_2 : 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \\ \pi_3 : 6x + 6y + 6z - 12 = 0 \end{cases}$$

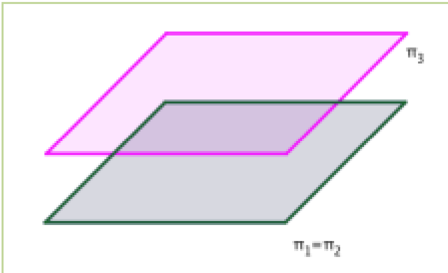
son coincidentes. Es trivial ver que podemos simplificarlas a una ecuación común:

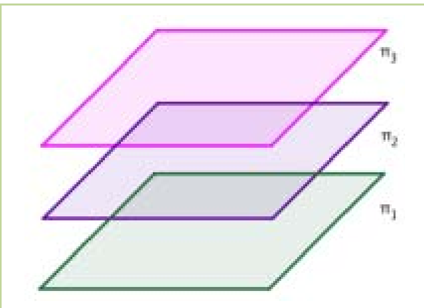
$$\begin{cases} \pi_1 : 5x + 5y + 5z - 10 = 0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 5}]{} \\ \pi_2 : 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 2}]{} \\ \pi_3 : 6x + 6y + 6z - 12 = 0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 6}]{} \end{cases} \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

2. Si $\operatorname{rg}(M) = 1 \neq \operatorname{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ Pueden darse dos casos:

   - Si dos ecuaciones son proporcionales y la otra no, tendremos **dos planos coincidentes** y **paralelos al tercero**.

     Que el rango de M sea uno indica que los planos tienen sus vectores ortogonales proporcionales y, por tanto, son planos paralelos. El plano no coincidente será aquél cuyo término D no sea proporcional a los otros dos, y su ecuación no sea simplificable a una equivalente.





   - Si ninguna de las ecuaciones es proporcional, tendremos **tres planos paralelos**.

Ejemplos

- *En la familia de planos:*

$$\begin{cases} \pi_1 : 5x + 5y + 5z - 10 = 0 \\ \pi_2 : 2x + 2y + 2z - 8 = 0 \\ \pi_3 : 6x + 6y + 6z - 12 = 0 \end{cases}$$

π_1 y π_3 son coincidentes, podemos simplificar sus ecuaciones a ecuación común, pero no así π_2. Sin embargo, los coeficientes A, B y C sí son proporcionales en los tres planos. El plano π_2 es paralelo a los otros dos.

$$\begin{cases} \pi_1 : 5x + 5y + 5z - 10 = 0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 5}]{} \\ \pi_2 : 2x + 2y + 2z - 8 = 0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 2}]{} \\ \pi_3 : 6x + 6y + 6z - 12 = 0 \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre 6}]{} \end{cases} \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

- *En la familia de planos:*

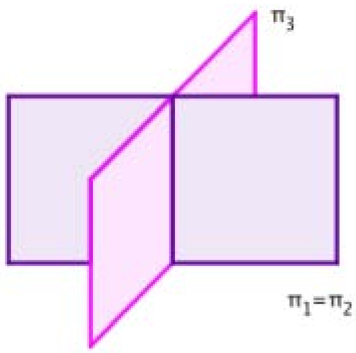
$$\begin{cases} \pi_1 : 5x + 5y + 5z - 3 = 0 \\ \pi_2 : 2x + 2y + 2z - 8 = 0 \\ \pi_3 : 6x + 6y + 6z - 12 = 0 \end{cases}$$

Los coeficientes A, B y C sí son proporcionales en los tres planos, pero no así el término independiente, D. Son, entonces, tres planos paralelos.

$$\begin{cases} \pi_1 : 5x + 5y + 5z - 3 = 0 & \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre } 5]{} \\ \pi_2 : 2x + 2y + 2z - 8 = 0 & \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre } 2]{} \\ \pi_3 : 6x + 6y + 6z - 12 = 0 & \xrightarrow[\text{dividiendo m.a m. entre } 6]{} \end{cases} \begin{cases} x + y + z - \frac{3}{5} = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

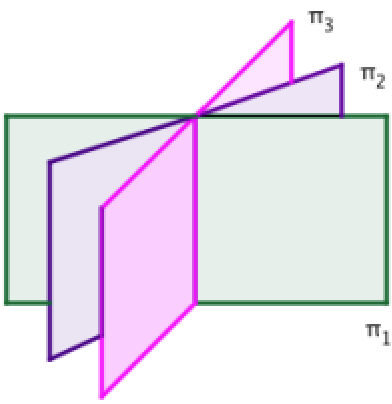
3. Si $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 < \text{n}^\text{o}\ \text{incógnitas} \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ Pueden darse dos casos:

- Si dos de las ecuaciones son proporcionales, tenemos **dos planos coincidentes** que **cortan al tercero**.



Los dos planos coincidentes son el caso conocido de ecuaciones proporcionales.

- Si no hay ecuaciones proporcionales, no hay planos coincidentes. Los tres planos se cortarán en una **recta**.



Geométricamente, esta situación se traduce en que los tres vectores normales a los planos son linealmente dependientes, pero los infinitos puntos comunes a los tres planos están alineados.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividades resueltas

- *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0 \\ \pi_3 : x - 3y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices M y M^*:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0 \\ \pi_3 : x - 3y + z - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos mediante determinantes que el rango de M es dos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) \geq 2$$

$$\text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 - 3 - 2 + 1 + 9 = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) < 3$$

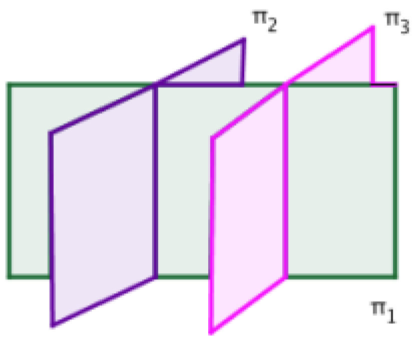
Si hallamos los otros tres menores que es posible construir a partir de M^*:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = \text{rg}(M) = 2$$

vemos que son todos nulos. Por tanto, **los planos son secantes y se cortan definiendo una recta**.

4. Si $\text{rg}(M) = 2 \neq \text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ En este caso puede ocurrir:

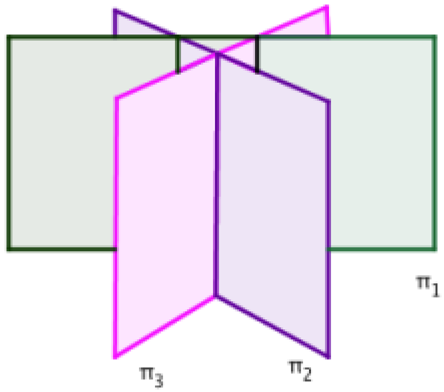
   - Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.



   Determinamos qué planos son paralelos analizando qué pareja de vectores normales son proporcionales, pero no hay puntos comunes a los tres planos.

   - Ninguno de los planos es paralelo al otro. Se cortan dos a dos y definen un prisma sin bases.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores



Esta situación se traduce en que los tres vectores normales son linealmente dependientes, pero no puede haber puntos comunes a los tres planos ya que el sistema es incompatible.

Actividades resueltas

- *Comprueba que los tres planos siguientes forman un prisma infinito sin bases:*

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0 \\ \pi_3 : x - 3y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

Excepto el término independiente de la tercera ecuación, son los tres planos del ejemplo anterior.

Ya vimos que el rango de M es dos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 - 3 - 2 + 1 + 9 = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(M) < 3$$

El primer menor que es posible construir a partir de M^* es diferente de cero:

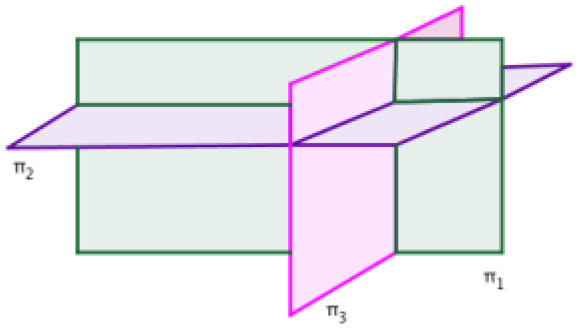
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 1 - 6 - 9 + 1 - 2 = -26 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(M^*) = 3 \neq \operatorname{rg}(M) = 2$$

y analizando los vectores normales, vemos que ninguno es proporcional a otro:

$$\vec{v}_1 \text{ y } \vec{v}_2 : \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{3} \quad , \quad \vec{v}_1 \text{ y } \vec{v}_3 : \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-3} \neq \frac{2}{1} \quad , \quad \vec{v}_2 \text{ y } \vec{v}_3 : \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{3}{1}$$

Por tanto, los tres planos definen un prisma infinito sin bases.

5. Si $rg(M) = rg(M^*) = 3 \Rightarrow S.C.D. \Rightarrow$ El sistema tiene una única solución. Los tres planos se cortan en un punto.



Actividades resueltas

- *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0 \\ \pi_3 : x - 3y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices M y M^*:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : x - y + 2z - 2 = 0 \\ \pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0 \\ \pi_3 : x - 3y - z - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el rango de M es tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 - 3 - 2 - 1 + 9 = -4 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(M) = 3$$

Por lo que el sistema es compatible y determinado, los tres planos se cortan en un punto.

Resolvemos con el método de *Cramer* y se obtiene el punto de intersección:

$$x = 1 \quad , \quad y = 1 \quad \text{y} \quad z = 1$$

Todo lo explicado anteriormente con las ecuaciones generales de los planos sirve también si alguno de ellos viene dado en ecuaciones paramétricas. Podemos plantear el sistema formado por sus ecuaciones y analizar su compatibilidad, o bien hallar los vectores normales y comprobar si son paralelos o no.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = -1 - \lambda + 2\mu \\ z = 2\lambda - \mu \end{cases} \end{cases}$$

Método 1:

Expresamos al plano π_2 en forma general y aplicamos el método explicado.

Método 2:

Hallamos los vectores normales de ambos planos:

$$\vec{n}_1 = (A, B, C) \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 2) \qquad \vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} \Rightarrow \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$$

Los vectores normales NO son paralelos, y por tanto tampoco lo son los planos:

$$\frac{1}{-3} \neq \frac{-1}{-5} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow \vec{n}_1 \ y \ \vec{n}_2 \text{ no son proporcionales}$$

Esto implica que **los planos son secantes**. Se cortan en una recta.

Si los vectores fueran proporcionales, determinamos si los planos son paralelos o coincidentes simplemente sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del otro plano. Si dicho punto pertenece a ambos planos, la única opción posible es que sean coincidentes.

Método 3:

Sustituimos las expresiones paramétricas de π_2 en π_1:

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = -1 - \lambda + 2\mu \\ z = 2\lambda - \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow (2 + \lambda - 3\mu) - (-1 - \lambda + 2\mu) + 2 \cdot (2\lambda - \mu) - 1 = 0$$

Operamos y obtenemos: $6\lambda - 7\mu + 2 = 0$

Tenemos una relación entre λ y μ, por tanto **los planos son secantes**.

Si los planos son paralelos, al sustituir las ecuaciones paramétricas en la general se cancelarán los términos en λ y μ. Dependiendo del término independiente resultante podremos deducir:

– Si obtenemos $0 = 0$, **los planos son coincidentes**.

– Si obtenemos $0 = k$, con $k \neq 0$, **los planos son paralelos**.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

3.3. Haces de planos en el espacio

3.3.1. Haz de planos secantes

Definimos el **haz de planos secantes** a una recta como el conjunto de todos los planos que contienen a dicha recta.

Para obtener el haz de planos secantes a una recta, expresamos la recta como intersección de dos planos:

$$r:\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

Cualquier otro plano del haz debe contener a la recta, por tanto, su ecuación debe ser combinación lineal de las dos anteriores y la ecuación del haz de planos secantes es:

$$\pi_r:\alpha\cdot(Ax+By+Cz+D)+\beta\cdot(A'x+B'y+C'z+D')=0 \text{ con } \alpha \text{ y } \beta\in\mathbb{R}.$$

Si α y β son no nulos, podemos reescribir la ecuación del haz de planos secantes como:

$$\pi_r:(Ax+By+Cz+D)+\lambda\cdot(A'x+B'y+C'z+D')=0 \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}$$

Ecuación que, *en ocasiones*, simplifica la resolución de muchos problemas de geometría.

Actividades resueltas

- *Halla el haz de planos secantes a la recta:*

$$r:\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{4}=z+3$$

Expresamos la recta como intersección de dos planos:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-1}{4}\\ \dfrac{x+2}{5}=z+3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4\cdot(x+2)=5\cdot(y-1)\\ x+2=5\cdot(z+3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4x+8=5y-5\\ x+2=5z+15\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4x-5y+13=0\\ x-5z-13=0\end{array}\right\}$$

La ecuación del haz de planos secantes es:

$$\pi_r:x-5y+13+\lambda(x-5z-13)=0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Halla el plano del haz de planos anterior que pasa por el punto $P\ (3, 2, -2)$.

Para que el plano pase por dicho punto, las coordenadas de P deben verificar su ecuación:

$$\pi_r : x - 5y + 13 + \lambda(x - 5z - 13) = 0 \Rightarrow 3 + 5 \cdot 2 + 13 + \lambda \cdot (3 - 5 \cdot (-2) - 13) = 0$$

Operamos y obtenemos:

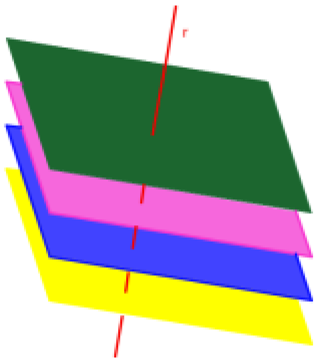
$$26 + \lambda \cdot 0 = 0$$

que no tiene solución. Este es uno de los casos a los que nos referíamos cuando dijimos "*en ocasiones*". Lo que ocurre es que P pertenece al segundo plano, por lo que la ecuación pedida es directamente la de ese plano:

$$\pi_r : x - 5z - 13 = 0 .$$

3.3.2. Haz de planos perpendiculares

Definimos el **haz de planos perpendiculares** a una recta como el conjunto de todos los planos perpendiculares a dicha recta.



Es simple ver que el vector director de la recta es un vector normal de cualquiera de los planos del haz. Siendo la ecuación de la recta:

$$r : \frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3}$$

La ecuación del haz de planos perpendiculares es:

$$v_1\, x + v_2\, y + v_3\, z + D = 0 \text{ con } D \in \mathbb{R}.$$

Actividades resueltas

Halla el haz de planos perpendiculares a la recta:

$$r : \frac{x-4}{2} = y + 7 = \frac{z-1}{3}$$

El vector director de la recta es $\vec{v} = (2, 1, 3)$, de modo que la ecuación del haz de planos perpendiculares es:

$$2x + y + 3z + D = 0 \text{ con } D \in \mathbb{R}.$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

- *Halla el haz de planos perpendiculares a la recta:*

$$\left.\begin{array}{l} 4x - y + 2z + 1 = 0 \\ x + y - 5z - 3 = 0 \end{array}\right\}$$

Necesitamos hallar el vector director de la recta, para lo que procedemos del mismo modo que en la sección 3.1, el vector director de la recta será el producto vectorial de los vectores normales:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 22\vec{j} + 5\vec{k}$$

Por tanto, el haz de planos paralelos tiene por ecuación:

$$3x + 22y + 5z + D = 0$$

3.4. Posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio

Consideramos la recta r, dada por las ecuaciones implícitas, y un plano π, dado por su ecuación general:

$$r: \left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\} \qquad \pi: A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

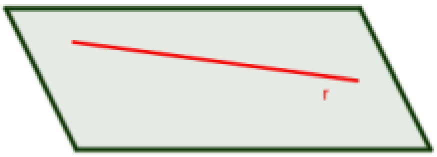
Consideramos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

Sean M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de M y M^*. Se pueden dar los siguientes casos:

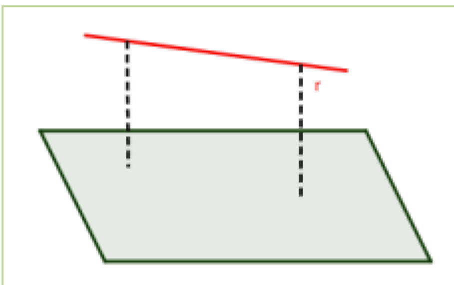
1. Si $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones. La **recta** está **contenida en el plano**.



La interpretación geométrica es simple, los tres planos (los dos que definen la recta y el plano π) pertenecen a un mismo haz.

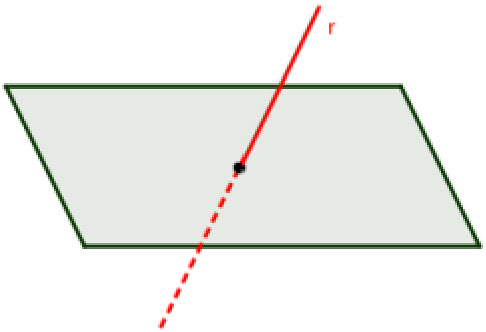
2. Si $\operatorname{rg}(M) = 2 \neq \operatorname{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ El sistema no tiene solución. La recta y el plano no se cortan, por tanto son **paralelos**.

Geométricamente se interpreta que el vector de la recta es combinación lineal de los vectores del plano, pero no tienen ningún punto en común.



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

3. Si $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow S.C.D. \Rightarrow$ El sistema tiene una única solución. La recta y el plano son **secantes** y se cortan en un punto.



Actividad resuelta

- *Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π:*

$$\begin{cases} \pi : x - y + z - 3 = 0 \\ r : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 5 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices M y M^*:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z - 3 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Hallamos el rango de M:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 - 1 + 1 - 1 = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$$

Como el rango de M es tres, también lo es el rango de M^*. Por tanto, el sistema es compatible determinado y la recta y el plano son secantes, tienen un punto en común que hallamos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \pi : x - y + z - 3 = 0 \\ r : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 5 = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow P\,(2, -2, -1)$$

Si la recta r viene dada por su ecuación continua la mejor opción es convertirla en sus ecuaciones paramétricas y sustituir en la ecuación del plano π.

Entonces, tendremos una ecuación de una variable que simplifica el razonamiento:

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π:*

$$\begin{cases} \pi: x+2y-3z-5=0 \\ r: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi: x+2y-3z-5=0 \\ r: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \\ z=1-t \end{cases} \end{cases}$$

Sustituimos las expresiones paramétricas de x, y y z en la ecuación del plano:

$$(2+t)+2(-1+2t)-3(1-t)-5=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 8t-8=0 \Rightarrow t=1$$

La ecuación resultante tiene una única solución, por tanto la recta y el plano son secantes, se cortan en un punto que podemos determinar sustituyendo el valor de t en las ecuaciones de r:

$$r: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \\ z=1-t \end{cases} \quad \text{con } t=1 \Rightarrow P \begin{cases} x=2+1 \\ y=-1+2 \\ z=1-1 \end{cases} \Rightarrow P(3,1,0)$$

Las otras dos situaciones posibles son:

– Si obtenemos $0 \cdot t = 0$, **la recta está incluida en el plano**.

– Si obtenemos $0 \cdot t = k$, con $k \neq 0$, **la recta y el plano son paralelos**.

3.5. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Para estudiar la posición relativa de dos rectas en el espacio a partir de sus ecuaciones implícitas:

$$r: \left.\begin{array}{r} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\} \text{ y } s: \left.\begin{array}{r} A''x+B''y+C''z+D''=0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0 \end{array}\right\}$$

planteamos una vez más el sistema formado por las cuatro ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0 \end{array}\right\}$$

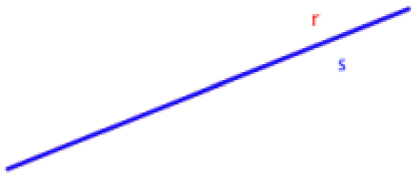
Sean M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de M y M^*. Se pueden dar los siguientes casos:

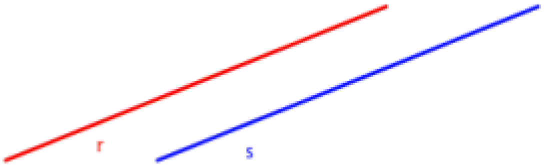
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

- Si $\text{rg}\left(M\right)=\text{rg}\left(M^{*}\right)=2\Rightarrow S.C.I.\Rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones, lo que implica que las rectas son **coincidentes**.

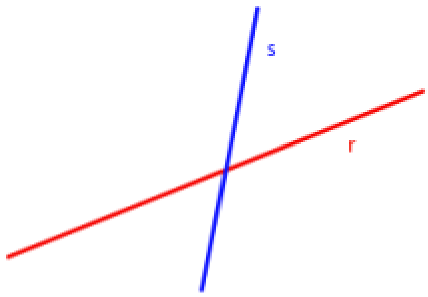


Que el rango de ambas matrices sea dos implica que sólo dos de las ecuaciones son linealmente independientes o, geométricamente, que los cuatro planos pertenecen al mismo haz.

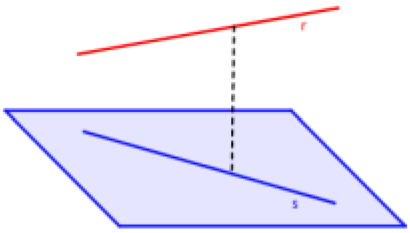
- Si $\text{rg}\left(M\right)=2\neq\text{rg}\left(M^{*}\right)=3\Rightarrow S.I.\Rightarrow$ El sistema no tiene solución y sus vectores directores son proporcionales. Las dos rectas son **paralelas**.



- Si $\text{rg}\left(M\right)=\text{rg}\left(M^{*}\right)=3\Rightarrow S.C.D.\Rightarrow$ El sistema tiene una única solución. Las dos rectas son **secantes** y su intersección es un punto.



- Si $\text{rg}\left(M\right)=3\neq\text{rg}\left(M^{*}\right)=4\Rightarrow S.I.\Rightarrow$ El sistema no tiene solución. Sus vectores directores no son proporcionales. Las dos rectas **se cruzan**.



Si las rectas no vienen dadas en su forma implícita, debemos realizar el estudio analizando sus vectores directores y puntos por los que pasan (vectores de posición).

Consideramos las rectas r y s, que vendrán determinadas por un punto y un vector director:

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

$$r:\begin{cases} P\left(p_1,p_2,p_3\right) \\ \vec{u}=\left(u_1,u_2,u_3\right) \end{cases} \qquad s:\begin{cases} Q\left(q_1,q_2,q_3\right) \\ \vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right) \end{cases}$$

Las situaciones antes estudiadas se determinan del siguiente modo:

- Si las rectas r y s son **coincidentes** (r y s son la misma recta)

  Esto significa que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ serán proporcionales, y por tanto:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \end{pmatrix}=1$$

- Las rectas r y s son **secantes**

  Esto significa que r y s se cortan en un único punto. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, pero el vector $\overrightarrow{PQ}$ es combinación lineal de ellos. Por tanto, tenemos:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=2 \quad \text{y} \quad \text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \end{pmatrix}=2$$

- Las rectas r y s son **paralelas**

  En este caso las rectas no tienen ningún punto en común, pero están contenidas en el mismo plano. Por tanto, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales, pero no serán proporcionales al vector $\overrightarrow{PQ}$. Tenemos:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=1 \quad \text{y} \quad \text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \end{pmatrix}=2$$

- Las rectas r y s se cruzan

  Esto significa que las rectas no tienen ningún punto en común ni están contenidas en el mismo plano. En este caso, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes. Por tanto:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \end{pmatrix}=3$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Estudia la posición relativa de las rectas:*

$$r:\begin{cases}x+2y-3=0\\ y+z+4=0\end{cases} \quad \text{y} \quad s: x+2=-2y=z-1$$

Método 1:

Hallamos el vector director de r con el producto vectorial:

$$\vec{v}_r=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

Y el vector director de s reescribiendo la ecuación continua:

$$s: x+2=-2y=z-1 \Rightarrow s:\frac{x+2}{1}=\frac{y}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{1}\Rightarrow \vec{v}_s=\vec{i}-\tfrac{1}{2}\vec{j}+\vec{k}$$

Hallamos ahora el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo P un punto de r y Q un punto de s:

$$r:\begin{cases}x+2y-3=0\\ y+z+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x=3\\ z=-4\end{cases}\Rightarrow P\,(3,0,-4) \quad \text{y} \quad Q\,(-2,0,1) \quad \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-5,0,5)$$

Planteamos la matriz y calculamos el determinante para hallar el rango:

$$\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ -5 & 0 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ -5 & 0 & 5\end{vmatrix}=\frac{35}{2}\neq 0$$

El rango de la matriz es tres, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes, por tanto **las rectas se cruzan**.

Método 2:

Obtenemos las ecuaciones implícitas de s:

$$s: x+2=-2y=z-1\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+2=-2y\\ x+2=z-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+2y+2=0\\ x-z+3=0\end{matrix}\right\}$$

Consideramos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas. Sea M la matriz de los coeficientes y M^* la matriz ampliada:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de M^*:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -1 & -3\end{vmatrix}\underset{\substack{F_3=F_3-F_1\\ F_4=F_4-F_1}}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -5\\ 0 & -2 & -1 & -6\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -5\\ -2 & -1 & -6\end{vmatrix}=10-5=5\neq 0$$

Tenemos que el $\operatorname{rg}(M^*)=4$, pero el rango de M es como mucho 3. **Las dos rectas se cruzan.**

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

CURIOSIDADES. REVISTA

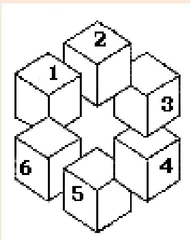
Objetos imposibles

A lo largo del capítulo hemos ido viendo dibujos de las figuras en el espacio. Muchas veces nos han servido de ayuda, pero en otras (por ejemplo, rectas que se cruzan) en el esquema no está tan claro qué está pasando en realidad.

Esto es consecuencia de que **proyectar** una imagen tridimensional en el plano implica una cierta pérdida de información, algo que ciertos artistas aprovechan para realizar dibujos de **figuras imposibles**.

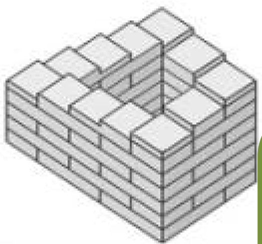
Perspectiva absurda – William Hogarth

Se considera a *Oscar Reutersvard* el creador de las figuras imposibles tal y como las conocemos. En 1934, siendo estudiante, se encontraba aburrido en una clase de latín y se puso a dibujar estrellas de varias puntas.



Un día dibujó una estrella de 6 puntas rodeada de cubos y comprobó algo extraño. Colocó 3 nuevos cubos en las esquinas y apareció una figura imposible.

Las figuras sobre estas líneas se denominan triángulos de *Penrose*, y en 1982 apareció uno de ellos en sellos de correo suecos.

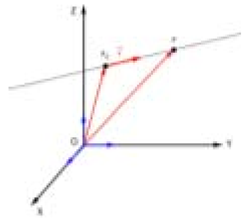
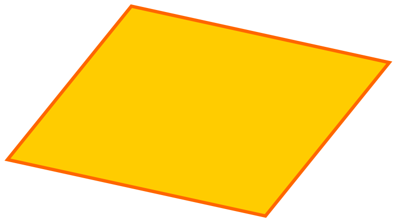
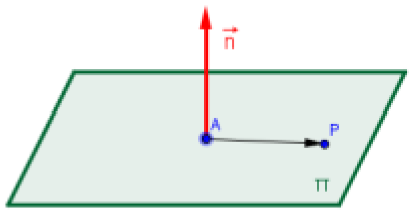
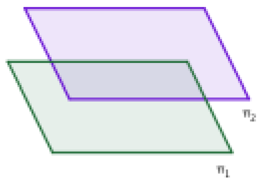
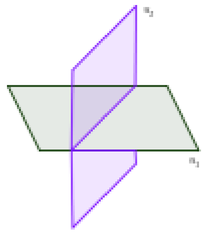


En 1956 *Roger Penrose* publicó un artículo en el que aparecen otras figuras imposibles.

Parece ser que *Penrose* se inspiró en dibujos de *Escher*, que todavía no había pintado figuras imposibles, quien a su vez se inspiró en los artículos de *Reutersvard*.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

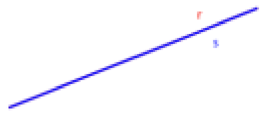
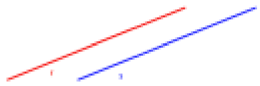
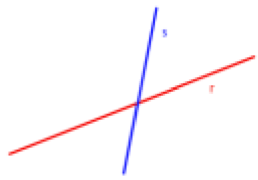
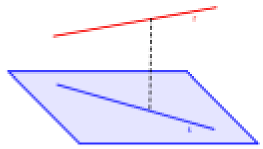
RESUMEN

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Recta</td><td>Figura en el espacio que únicamente tiene longitud, no anchura ni profundidad. Se suele representar con una letra minúscula, habitualmente r, y se define a partir de un punto $P\ (p_1,p_2,p_3)$ y un vector $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Plano</td><td>Figura en el espacio tiene longitud y anchura, pero no profundidad. Se suele representar con una letra griega, habitualmente π, y se define a partir de un punto $P\ (p_1, p_2, p_3)$ y dos vectores $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Vector normal del plano</td><td>Se llama vector normal del plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ al vector $\vec{n}=(A,B,C)$ que es perpendicular al plano.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Posiciones relativas de dos planos
Planteado el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los dos planos
$\begin{cases} \pi: Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi': A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$
Sean M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes.
$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ $\quad M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Planos coincidentes</td><td>$\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(M^*)=1<\text{nº incógnitas} \Rightarrow S.C.I.$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Planos paralelos</td><td>$\mathrm{rg}(M)=1\neq \mathrm{rg}(M^*)=2 \Rightarrow S.I.$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Planos secantes</td><td>$\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(M^*)=2<\text{nº incógnitas} \Rightarrow S.C.I.$</td><td></td></tr>
</table>

Posiciones relativas de dos rectas

Consideramos las rectas *r* y *s*, que vendrán determinadas por un punto y un vector director:

$$r:\begin{cases} P\left(p_1,p_2,p_3\right) \\ \vec{u}=\left(u_1,u_2,u_3\right)\end{cases} \qquad s:\begin{cases} Q\left(q_1,q_2,q_3\right) \\ \vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right)\end{cases}$$

Rectas coincidentes	$\text{Rango}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=1$	
Rectas paralelas	$\text{Rango}\left(\vec{u},\vec{v}\right)=1$ y $\text{Rango}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=2$	
Rectas secantes	$\text{Rango}\left(\vec{u},\vec{v}\right)=2$ y $\text{Rango}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=2$	
Rectas que se cruzan	$\text{Rango}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=3$	

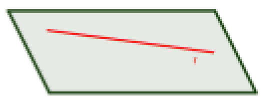
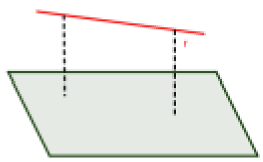
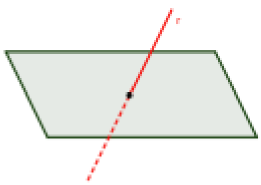
Posiciones relativas de una recta y un plano

Consideramos la recta *r*, dada por las ecuaciones implícitas, y un plano π, dado por su ecuación general:

$$r:\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0\end{array}\right\} \qquad \pi: A''x+B''y+C''z+D''=0$$

Sean M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada del sistema formado por sus ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C''\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D''\end{pmatrix}$$

Recta contenida en el plano	$\text{rg}\left(M\right)=\text{rg}\left(M^*\right)=2 \Rightarrow S.C.I.$	
Recta y plano paralelos	$\text{rg}\left(M\right)=2\neq\text{rg}\left(M^*\right)=3 \Rightarrow S.I.$	
Recta y plano secantes	$\text{rg}\left(M\right)=\text{rg}\left(M^*\right)=3 \Rightarrow S.C.D.$	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-1,-2)$ y tiene como vector director $\vec{u}=(1,-2,3)$. Expresa dicha recta de todas las formas posibles.

 b) ¿Pertenece el punto $B(3,-5,4)$ a dicha recta? ¿Y el punto $C(-2,5,-7)$?

 c) Halla el valor de m y n para que el punto $D(m,-7,2n)$ pertenezca a dicha recta.

2. - Expresa de todas las formas posibles la recta que pasa por los puntos $A(0,-1,0)$ y $B(1,1,0)$. Hallar un punto C que esté alineado con A y B, y otro punto D que no lo esté.

3. - Dados los puntos $A(2,0,1)$ y $B(0,-2,3)$, se pide:

 a) Expresa de todas las formas posibles la recta que pasa por ambos puntos.

 b) Halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado entre ambos y el otro (D) esté situado a la izquierda de A.

4. - Expresa de todas las formas posibles las siguientes rectas:

 a) $r:\begin{cases} x-2z=2 \\ y+z=-1 \end{cases}$ b) $s:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$ c) $r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ d) $s:\begin{cases} x+2y=-2 \\ y-2z=1 \end{cases}$

5. - Expresa de todas las formas posibles la recta $r:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=z-2$ y además halla:

 a) Un punto de dicha recta tal que su segunda coordenada sea - 4.

 b) Un punto de dicha recta tal que la suma de sus coordenadas valga 2.

6. - Expresa de todas las formas posibles la recta de ecuación $r\equiv\dfrac{2x-1}{5}=\dfrac{3-y}{2}=\dfrac{3z}{1}$ y halla un punto de la misma cuya primera coordenada sea -4.

7. - Halla las ecuaciones de los ejes OX, OY, OZ y exprésala de todas las formas posibles.

8. - Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,1,-1)$ y es paralela:

 a) Al eje OY.

 b) A la recta de ecuación $r:\begin{cases} x+2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$

 Exprésala de todas las formas posibles.

9. - Dada la recta $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$ se pide:

 a) Expresa dicha recta de todas las formas posibles.

 b) Halla un punto de dicha recta tal que la suma de sus coordenadas valga 4.

 c) Halla la ecuación de una recta s que sea paralela a la recta r y que pase por el punto $B(1,-2,0)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

10. - Expresa de todas las formas posibles la recta $r:\begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ y halla la ecuación de una recta s que pasando por el punto $B\,(1,-2,-1)$ tenga como vector director el de la recta *r*.

11. - Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano $\pi: 2x-y+3z-6=0$ y halla 3 puntos de ese plano que estén alineados.

12. - Halla la ecuación del plano (expresarlo de todas las formas posibles) en los siguientes casos:

a) Pasa por el punto $A\,(3,2,-1)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}=(-1,1,0)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$.

b) Pasa por los puntos $A\,(1,2,0)$ y $B\,(-1,1,2)$ y uno de sus vectores directores es $\vec{u}=(1,-2,-1)$.

c) Pasa por los puntos $A\,(0,-2,1)$, $B\,(-2,0,-1)$ y $C\,(1,-2,0)$.

13. - Halla las ecuaciones de los planos OXY, OXZ, OYZ y exprésalos de todas las formas posibles.

14. - Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $P\,(8,9,1)$ y es paralelo a las rectas:

$$r:\frac{x}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \qquad \text{y} \qquad s:\left.\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{array}\right\}$$

15. - Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A\,(-2,0,1)$ y contiene a la recta *r* de ecuación

$$r:\frac{x}{2}=y-1=2-z\,.$$

16. - Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta $r\equiv\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

17. - Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta $r:-x+2=3y=1-z$.

18. - Halla la ecuación del plano que contiene al punto $M\,(-1,2,1)$ y a la recta

$$r:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$$

19. - Calcula para qué valor de m los puntos $A\,(1,m,2)$, $B\,(2,3,m)$ y $C\,(-1,-9,8)$ están alineados. En el caso de que $m=0$, halla la ecuación del plano que contiene a dichos puntos. ¿Pertenece el punto $M\,(2,1,-2)$ a dicho plano?

20. - Halla el plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} y=1+x \\ z=-1-2x \end{cases}$ y es paralelo a $s:\dfrac{x+1}{3}=1-y=\dfrac{z}{3}$.

21. - Calcula m y n para que la recta $r:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ esté contenida en el plano π, cuya ecuación es $\pi: m\,x+2\,y-4\,z-2n=0$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

22. - Estudia la posición relativa de las rectas $r:\begin{cases}x+2y-3=0\\ y+z+4=0\end{cases}$ y $s: x+2=-2y=z-1$, y halla la ecuación del plano que las contiene.

23. - Halla la posición relativa, según los valores de m y n, de las rectas:

$$r:\frac{x+m}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{n} \qquad s:\begin{cases}-x+y-z=-2\\ 2x+4y-3z=5\end{cases}$$

24. - Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y planos:

a) $\begin{cases}r:\dfrac{x-1}{2}=-y+2=\dfrac{z}{2}\\ \pi: x+4y+z+2=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}r:\begin{cases}-x+3y-z+2=0\\ x+y+2z-4=0\end{cases}\\ \pi: 2x+y-z-2=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}r:\begin{cases}-x+2y+z-4=0\\ x-y+2z+2=0\end{cases}\\ \pi: 2x+y+z-2=0\end{cases}$ d) $\begin{cases}r:\dfrac{x-1}{2}=y+1=\dfrac{z}{-2}\\ \pi: x-4y-z-4=0\end{cases}$

25. - Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases}\pi_1: -2x+4y-6z=-4\\ \pi_2: x-2y+3z=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\pi_1: 2x-y+z=1\\ \pi_2: -6x+3y-3z=3\end{cases}$

c) $\begin{cases}\pi_1: x-y+3z=4\\ \pi_2: -2x+3y-z=3\\ \pi_3: 3x-4y+4z=-1\end{cases}$ d) $\begin{cases}\pi_1: 3x-y+z=-1\\ \pi_2: x+y-5z=1\\ \pi_3: 2x-3y-z=-1\end{cases}$

26. - Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases}\pi_1: -2x+2\lambda y-4z=2\\ \pi_2: x-2y+\lambda z=-1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\pi_1: -x+2y+z=2\\ \pi_2: x+\lambda y-2z=1\\ \pi_3: \lambda x-y-4z=-3\end{cases}$

c) $\begin{cases}\pi_1: x-y+2z=4\\ \pi_2: 2x+y+z=3\\ \pi_3: 3x+\lambda y+6z=-8\end{cases}$ d) $\begin{cases}\pi_1: x+\lambda y-z=2\\ \pi_2: 2x-y+\lambda z=5\\ \pi_3: x+10y-6z=1\end{cases}$

27. - Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de las siguientes rectas y planos, calculando (cuando sea posible), el punto de intersección.

a) $\begin{cases}r: x+1=-y-2=\dfrac{z}{2}\\ \pi: x-3y+\lambda z+2=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}r:\begin{cases}2x+y-2z+4=0\\ x-y+z-4=0\end{cases}\\ \pi: x+4y+\lambda z-2=0\end{cases}$

28. - Dadas las rectas $r:\dfrac{x}{2}=y-3=\dfrac{z+3}{-1}$ y $s: x+1=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ se pide:

a) Posición relativa de ambas rectas.

b) Ecuación del plano que contiene a dichas rectas.

29. - Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r: x=y=z$ y $s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Halla la recta que corta a r y s y es paralela a la recta $t:(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,2,-1)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

30. - Dados los planos $\pi_1 : 3x + 2y - z = 6$ y $\pi_2 : -2x + y + 3z - 6 = 0$, halla la ecuación de una recta r que pasando por el punto $M\,(1,0,-1)$ es paralela a los dos planos.

31. - Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{m}$, $s : x + 1 = -y = z - 2$, hallar:

a) El valor de m para que ambas rectas se corten.

b) Para ese valor de m, el plano π que contiene a r y s.

c) La ecuación de la recta que pasa por el punto $M\,(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

32. - Dada la recta $r : \begin{cases} x - y + 3z + 4 = 0 \\ -2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : 4x - my + 5z - n = 0$ calcula:

a) Valores de m y n para que la recta y el plano sean:

i) paralelos ii) perpendiculares iii) la recta esté contenida en el plano.

b) Para $m = -1$ y $n = 2$, el punto de intersección de la recta y el plano.

c) Punto de intersección de la recta r, con el plano OYZ.

33. - Dadas las rectas $r : \dfrac{x}{2} = y - 3 = \dfrac{z+3}{-1}$ y $s : x + 1 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$, calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $M\,(-1,1,1)$ y es perpendicular a ambas rectas.

34. - Dadas las rectas $r : \begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - 3x \end{cases}$ y $s : \dfrac{x-2}{2} = y - 1 = \dfrac{z+1}{2}$, se pide:

a) Posición relativa de ambas rectas.

b) Ecuación de la recta que pasa por $M\,(-1,-1,0)$ y es perpendicular a ambas rectas.

35. - Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A\,(1,0,-1)$, $B\,(1,1,0)$ y el tercer vértice es el punto de corte del plano OXZ con la recta $r : x = 2y + 2 = z - 1$.

36. - Dados los puntos $A\,(-1,2,0)$, $B\,(-3,3,-1)$ y $C\,(1,a,1)$, se pide:

a) Calcula el valor de a para que los tres puntos estén alineados.

b) Para $a = -1$, calcula el perímetro del triángulo que tenga de vértices dichos puntos, así como su área y el valor de la altura correspondiente al vértice A.

c) Halla la ecuación de una mediana.

37. - Los puntos $P\,(0,1,0)$ y $Q\,(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercer vértice S pertenece a la recta $r : \{x = 4, z = 1\}$. Además, la recta que contiene a los puntos P y S es perpendicular a la recta r.

a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.

38. - Los puntos $A\,(0,-2,0)$ y $B\,(-1,0,1)$ son dos vértices de un triángulo isósceles.

a) Obtén las coordenadas del otro vértice C, sabiendo que pertenece a la recta $r : \{y = -5, z = 0\}$

b) Halla el valor del ángulo desigual.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

AUTOEVALUACIÓN

1. Una ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, 1, 2)$ y tiene por vector director $\vec{v}=(1,1,1)$ es:

a) $(x,y,z)=(1,1,1)+t\cdot(0,1,2)$; b) $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$; c) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$; d) $2x-3y+1=0$

2. Una ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, 1, 2)$ y $B(2, 4, 7)$ es:

a) $(x,y,z)=(3,1,2)+t\cdot(2,4,7)$; b) $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$; c) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-7}{5}$; d) $\left.\begin{array}{l} x=3+5t \\ y=1+5t \\ z=2+9t \end{array}\right\}$

3. El vector director de la recta $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ es:

a) $(1,-1,0)$; b) $(1,0,1)$; c) $(-1,1,1)$; d) $(1,1,1)$

4. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3, 1, 2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(0,1,0)$ es:

a) $(x,y,z)=(3,1,2)+\lambda(2,4,7)+\mu(0,1,0)$; b) $3x-z=11$; c) $\left.\begin{array}{l} x=3+2\lambda \\ y=1+4\lambda+\mu \\ z=2+7\lambda \end{array}\right\}$

5. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3, 1, 2)$ y contiene a la recta $(x,y,z)=(1,1,1)+t(0,0,1)$ es:

a) $(x,y,z)=(3,1,2)+\lambda(2,1,1)+\mu(0,0,1)$; b) $x=3$; c) $y=1$; d) $\left.\begin{array}{l} x=3+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda+\mu \end{array}\right\}$

6. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3, 1, 2)$ y de vector normal $\vec{n}=(0,0,1)$ es:

a) $(x,y,z)=(3,1,2)+\lambda(1,0,0)+\mu(0,0,1)$; b) $z=2$; c) $y=1$; d) $\left.\begin{array}{l} x=3+\lambda \\ y=1 \\ z=2+\mu \end{array}\right\}$

7. Una ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, 5, 0)$, $C(0, 0, 7)$ es:

a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=1$; b) $x-z=3$; c) $x+z=7$; d) $\left.\begin{array}{l} x=3+2\lambda \\ y=5\lambda \\ z=7\mu \end{array}\right\}$

8. Los planos $x-z=3$ y $x+z=7$ son:

a) coincidentes; b) paralelos; c) secantes; d) ortogonales

9. Las rectas $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$ y $\left.\begin{array}{l} x=3+4t \\ y=1+6t \\ z=2+10t \end{array}\right\}$ son:

a) coincidentes; b) paralelas; c) secantes; d) se cruzan

10. El plano $x-z=3$ y la recta $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$ son:

a) la recta está contenida en el plano; b) paralelos; c) secantes; d) ortogonales

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Apéndice: Problemas de rectas y planos en las P.A.A.U.

(1) Los puntos $P\,(1,1,0)$ y $Q\,(0,2,1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo. Un tercer vértice pertenece a la recta $r:\{y=0\,,z=1\}$.

a) Determina los vértices de un rectángulo que verifique las condiciones anteriores.

b) ¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene al segmento $\overline{PQ}$ para que la solución fuese única? Razona la respuesta.

(2) Los puntos $P\,(1,-1,1)$ y $Q\,(3,-3,3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x+y=0$.

a) Determina los vértices restantes.

b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los vértices calculados.

c) Calcula el perímetro del cuadrado construido.

(3) Se considera el paralelepípedo cuyos vértices de la cara inferior son los puntos $A\,(-1,1,0)$, $B\,(0,1,1)$, $C\,(3,0,0)$ y $D\,(2,0,-1)$ con A y C vértices opuestos. Sea $A'\,(-3,1,0)$ el vértice adyacente a A en la cara superior. Calcula:

a) Las ecuaciones de los planos que contienen a las caras inferior y superior.

b) Los vértices de la cara superior.

c) El volumen del paralelepípedo.

(4) Los puntos $A\,(1,1,0)$, $B\,(1,1,1)$, $C\,(2,3,0)$ y D forman un paralelogramo. Calcula:

a) Las coordenadas del vértice D opuesto a B.

b) El área del paralelogramo.

c) La ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

(5) Sea el plano $\pi:\{x=2+t\,,y=s\,,z=1-2s+2t\}$ y la recta $s:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}=z$.

a) Encuentra la posición relativa de los mismos.

b) Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P\,(-1,0,2)$, es paralela al plano π y es perpendicular a la recta *s*.

(6) Dados los puntos $A\,(1,1,0)$ y $B\,(0,0,2)$ y la recta $r:\{x=1,\,y=1+\lambda\,,z=1+\lambda\}$, halla:

a) Un punto $C\in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en C.

b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r.

(7) Considere las rectas $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=z$ y $s:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z$.

a) Da su posición relativa.

b) Obtén, si es posible, un plano paralelo a *s* que contenga a *r*.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

(8) Dado el punto $A\left(1,1,1\right)$ y la recta $r:\left.\begin{matrix} x-y=-1 \\ y-z=1 \end{matrix}\right\}$, calcula:

a) Un vector $\vec{u}$ director de la recta r.

b) El plano π que contiene a la recta r y al punto A.

c) La recta s que pasa por el punto A, está contenida en el plano π anterior, y su dirección es perpendicular a la de la recta r.

(9) Sean el plano $\pi: a\,x+2y-4z=b$ y la recta $r:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$.

a) Con $a=1$, estudia la posición relativa de la recta y el plano.

b) Siguiendo con $a=1$, calcula b para que el punto $\left(3,1,-3\right)$ pertenezca a la recta y al plano.

c) Determina los valore de a y b para que la recta r esté contenida en el plano π.

(10) Un plano π determina sobre la parte positiva de los ejes OX, OY y OZ tres segmentos de longitudes 2, 3 y 4 metros respectivamente.

a) Halla la ecuación del plano π.

b) Halla la ecuación de la recta r que contiene a los puntos $A\left(2,0,3\right)$y $B\left(0,6,a\right)$ y estudie la posición relativa de π y r según los valores de a.

c) Para el caso $a=2$, halla el punto donde se cortan π y r.

(11) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $P\left(1,2,3\right)$ y $Q\left(1,-1,3\right)$, y el plano π que contiene a los puntos $A\left(1,0,1\right)$, $B\left(2,-1,3\right)$ y $C\left(4,1,0\right)$. Calcula:

a) Las ecuaciones implícitas de r y π.

b) La posición relativa de r y π.

(12) Se considera la recta $r:\left.\begin{matrix} 2x-y-5=0 \\ x+z-2=0 \end{matrix}\right\}$.

a) Determina el plano π que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $\left(1,0,1\right)$.

(13) Se consideran las rectas $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=z+1$ y $s:\left\{x=1+t\,,y=m+3t\,,z=-1+3t\right\}$.

a) Calcule m para que las rectas se corten en un punto.

b) Para ese m halle el punto de corte.

(14) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P\left(1,1,2\right)$ y es paralelo a las rectas:

$$r:\left.\begin{matrix} x=-t \\ y=3t \\ z=t \end{matrix}\right\} \qquad \text{y} \qquad s:\left.\begin{matrix} 2x-2y=4 \\ y-z=-3 \end{matrix}\right\}$$

(15) Encuentra una ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas, es paralelo al plano determinado por el punto $P\left(1,-1,0\right)$ y la recta que pasa por el punto $Q\left(2,2,2\right)$ y tiene vector director $\vec{v}=\left(1,2,3\right)$.

(16) Considera los planos $\pi_1 : 2x - y + z = 0$ y $\pi_2 : z - 3 = 0$.

a) Estudia la posición relativa de π_1 y π_2.

b) Encuentra, si es posible, una recta paralela a π_1 y a π_2 que pase por el punto $(2,2,-1)$.

(17) Halla los planos que pasando por $A(0,2,0)$ y $B(0,0,2)$, corten al eje OX en un punto C tal que el área del triángulo de vértices A, B y C sea 6.

(18) Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $x + y - 2z - 1 = 0$ con los ejes coordenados.

(19) Dado el plano de ecuación $\pi : x - 2y + 2z + 7 = 0$, los puntos $A(0,1,2)$, $C(-1, m, 2)$ y sea *B* el pie de la perpendicular trazada desde el punto *A* al plano.

a) Determina el valor de m para que el triángulo ABC sea rectángulo en B y calcula su área.

b) Halla los dos ángulos restantes de dicho triángulo.

(20) Dado el punto $A(1,-1,1)$ y los planos $\pi_1 : 2x + y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 : x - 2y + z - 2 = 0$, halla:

a) La ecuación de la recta que pasa por el punto A y es paralela a los planos π_1 y π_2.

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos donde el plano π_2 corta a los ejes.

c) El volumen del tetraedro de vértice el punto A y de base el triángulo del apartado anterior.

(21) Halla el volumen del tetraedro que tiene como vértices el punto $A(1,1,1)$ y los puntos en que el plano $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$ corta a los ejes coordenados.

(22) Dada la recta $r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = z - 1$ y el plano $\pi : x + ay - z + 2 = 0$, hallar el valor de *a* para que:

a) La recta sea paralela al plano.

b) La recta corte al plano.

c) La recta sea perpendicular al plano.

d) El volumen del tetraedro que tiene como vértices el origen de coordenadas y los puntos donde el plano corta a los ejes valga $\frac{1}{2}$ u^3.

(23) Dados los planos

$$\pi_1 : 2x + z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : x + z + 2 = 0 \qquad \pi_3 : x + 3y + 2z - 3 = 0$$

se pide:

a) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2.

b) Calcula el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

(24) Dados el plano $\pi_1 : 2x - y = 2$, y la recta $r : \left.\begin{matrix} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{matrix}\right\}$

a) Estudia la posición relativa de r y π.

b) Determina el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) Determina la recta que pasa por $A(-2,1,0)$, corta a r, y es paralela a π.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa

(25) Sean las rectas:

$$r: x-2=\frac{y-1}{k}=z+1 \qquad \text{y} \qquad s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$$

a) Halla k para que r y s sean coplanarias.

b) Para el valor anterior de k, halla la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) Para el valor anterior de k, halla la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

(26) Halla una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$r:\{x=1+t\,,\,y=-1+2t\,,\,z=t\}$$

y es perpendicular al plano π:

$$\pi: 2x+y-z=2$$

(27) Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1: x+y+a\,z=2 \qquad \pi_2: x+a\,y+z=-1 \qquad \pi_3: a\,x+y+z=3$$

Se pide:

a) Calcula los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) Para los valores de a calculados, halla unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

(28) Dados el plano $\pi: x+3y-z=1$ y la recta $s:\frac{x+2}{6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$

a) Halla la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

b) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π'.

(29) Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi: x-2y-z-7=0$, determina el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

(30) Dadas las rectas:

$$r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1} \qquad \text{y} \qquad s:\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x \quad +z=1 \end{cases}$$

a) Halla el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determina la ecuación general del plano que las contiene.

(31) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$s:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=5+3\lambda \end{cases}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Matemáticas II. 2º Bachillerato. Capítulo 6: Geometría métrica en el espacio

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

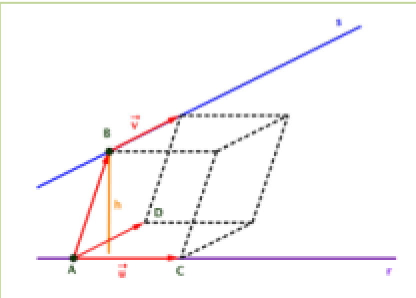
Revisora: Milagros Latasa

Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *sofware* libre (GeoGebra y GIMP)

Índice

Resumen

En este último capítulo de geometría en dimensión tres vamos a ser capaces de resolver problemas de cálculo de distancias, de ángulos, de proyecciones… utilizando todo lo aprendido en los anteriores capítulos de geometría.



1. ÁNGULOS EN EL ESPACIO

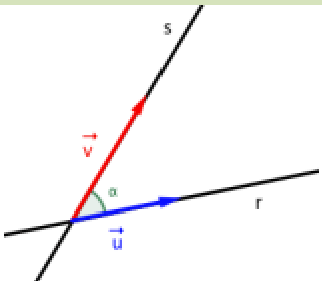
1.1. Ángulo entre dos rectas

Sabemos que la dirección de una recta viene dada por su vector director. Con ello, podemos deducir:

El ángulo que forman dos rectas es el ángulo agudo determinado por los vectores directores de dichas rectas.

Sean las rectas r y s, con vectores directores respectivos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \Rightarrow \alpha(r,s) = \arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$



Actividad resuelta

- *Halla el ángulo determinado por las rectas*

$$r:\left.\begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad s: \frac{x+3}{5} = y-1 = \frac{z+2}{-1}.$$

De las ecuaciones deducimos fácilmente que los vectores directores de r y s son, respectivamente:

$$\vec{u} = (-1, 3, 2) \quad \text{y} \quad \vec{v} = (5, 1, -1)$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2+3^2+2^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{v}| = \sqrt{5^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{27} \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = (-1,3,2)\cdot(5,1,-1) = -5+3-2 = -4 \Rightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}| = |-4| = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \frac{4}{\sqrt{378}}$$

De aquí: $$\alpha(r,s) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{378}}\right) = 78^\circ$$

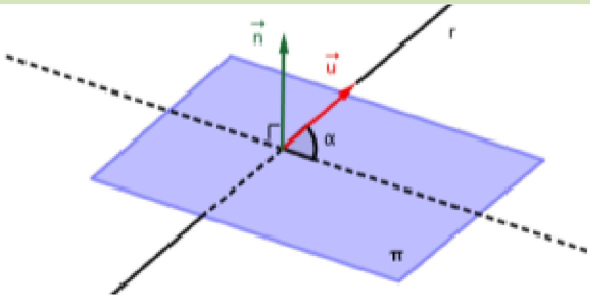
1.2. Ángulo entre una recta y un plano

Al contrario que en el apartado anterior, la dirección del vector asociado al plano (su vector normal) es perpendicular al propio plano. Por tanto, en este caso debemos razonar que:

El ángulo que forman una recta y un plano es **el complementario** del ángulo agudo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.

Sea la recta r, con vector director $\vec{u}$ y el plano π, con vector normal $\vec{n}$, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} \Rightarrow \alpha(r,\pi) = 90^\circ - \arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$$



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Halla el ángulo determinado por la recta* $r: \dfrac{x+3}{-2} = y-4 = \dfrac{z+1}{2}$ *y el plano* $\pi: 5x - y + 3z - 1 = 0$.

Sea $\vec{u} = (-2, 1, 2)$ un vector director de r y $\vec{n} = (5, -1, 3)$ un vector normal de π.

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \\ |\vec{n}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{35} \\ \vec{u}\cdot\vec{n} = (-2,1,2)\cdot(5,-1,3) = -10 - 1 + 6 = -5 \Rightarrow |\vec{u}\cdot\vec{n}| = |-5| = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\beta = \frac{5}{3\cdot\sqrt{35}} = \frac{5}{3\sqrt{35}}$$

De aquí: $$\alpha(r,\pi) = 90^{\circ} - \text{arc cos}\left(\frac{5}{3\sqrt{35}}\right) = 90^{\circ} - 74^{\circ} = 16^{\circ}$$

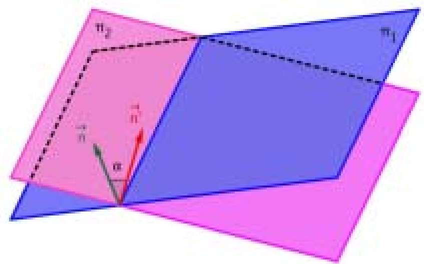
1.3. Ángulo entre dos planos

En este caso los dos vectores normales son perpendiculares a los respectivos planos, de modo que:

El ángulo formado por dos planos es el ángulo agudo determinado por los vectores normales de dichos planos.

Sean los planos π y π', con vectores normales respectivos $\vec{n}$ y $\vec{n}'$, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|} \Rightarrow \alpha(\pi,\pi') = \text{arc cos}\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|}$$



Actividad resuelta

- *Halla el ángulo formado por los planos*

$$\pi: 2x - y + z - 4 = 0 \quad \text{y} \quad \pi': \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda - 2\mu \\ y = 2 - 2\lambda - \mu \\ z = -\lambda + 2\mu \end{array}\right\}.$$

Sea $\vec{n} = (2, -1, 1)$ un vector normal de π, y hallamos el vector normal de π' con el producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{n}' = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 0\vec{j} - 5\vec{k}$$

Calculamos:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \\ |\vec{n}'| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + (-5)^2} = 5\cdot\sqrt{2} \\ \vec{n}\cdot\vec{n}' = (2,-1,1)\cdot(-5,0,-5) = -10 + 0 - 5 = -5 \Rightarrow |\vec{n}\cdot\vec{n}'| = |-15| = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto: $$\alpha(\pi,\pi') = \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^{\circ}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

1.4. Paralelismo, perpendicularidad y posiciones relativas

En el capítulo anterior analizamos las posiciones relativas de rectas, planos y entre rectas y planos a partir de sus ecuaciones, pero en cada apartado dimos su interpretación geométrica. Podemos realizar el mismo estudio a partir de sus vectores aprovechando lo aprendido hasta ahora y teniendo en cuenta la orientación relativa de los vectores directores y normales asociados a dichas rectas y planos.

Sean las rectas r y s, y consideremos los planos π y π'. Para definirlos precisamos de los siguientes vectores directores, normales y de posición:

	Recta r	Recta s	Plano π	Plano π'
Vector de posición	punto A	punto B	punto P	punto Q
Vector…	…director $\vec{u}$	…director $\vec{v}$	…normal $\vec{n}$	…normal $\vec{n}'$

Entonces, el estudio de las posiciones relativas entre ellos se reduce a los siguientes casos:

	Coincidentes	Paralelos/as	Secantes	Perpendiculares	Se cruzan
r y s	$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]=0$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\neq 0$
r y π	$\vec{u}\cdot\vec{n}=\vec{0}$ y $\vec{n}\times\overrightarrow{AP}=\vec{0}$	$\vec{u}\cdot\vec{n}=\vec{0}$ y $\vec{n}\times\overrightarrow{AP}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\cdot\vec{n}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}$	———
π y π'	$\vec{n}\times\vec{n}'=\vec{0}$ y $\vec{n}\times\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$	$\vec{n}\times\vec{n}'=\vec{0}$ y $\vec{n}\times\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$	$\vec{n}\times\vec{n}'\neq\vec{0}$	$\vec{n}\cdot\vec{n}'=\vec{0}$	———

Actividad propuesta

1. Realiza en tu cuaderno los doce dibujos y comprueba las relaciones vectoriales descritas en la tabla anterior:

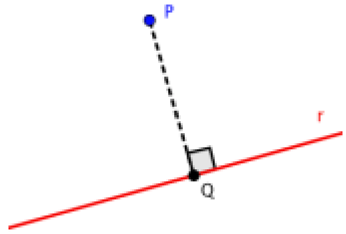
r y s coincidentes	*r y s paralelas*	*r y s secantes*	*r y s se cruzan*
r y π coincidentes	*r y π paralelos*	*r y π secantes*	*r y π perpendiculares*
π y π' coincidentes	*π y π' paralelos*	*π y π' secantes*	*π y π' perpendiculares*

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

2. PROYECCIONES ORTOGONALES

2.1. Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r será otro punto Q perteneciente a la recta, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al vector director de la recta.



Para hallar la proyección ortogonal de un punto sobre una recta dada por la ecuación:

$$r: \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

debemos seguir los siguientes pasos:

Método 1:

1. Determinar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.
   Para ello, utilizamos el vector director de la recta como vector normal del plano y utilizamos la ecuación del plano dado su vector normal y un punto:
   $$v_1 \cdot (x - p_1) + v_2 \cdot (y - p_2) + v_3 \cdot (z - p_3) = 0$$
2. El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) es el punto de intersección de la recta con el plano.

   Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.
   $$v_1 \cdot (a_1 + v_1 t - p_1) + v_2 \cdot (a_2 + v_2 t - p_2) + v_3 \cdot (a_3 + v_3 t - p_3) = 0$$
   de donde hallamos el valor de t que nos permitirá calcular las coordenadas del punto Q:
   $$t = \frac{v_1(p_1 - a_1) + v_2(p_2 - a_2) + v_3(p_3 - a_3)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Método 2:

1. Como Q pertenece a la recta, sus coordenadas deben verificar la ecuación de la recta:
   $$q_1 = a_1 + v_1 t \quad , \quad q_2 = a_2 + v_2 t \quad , \quad q_3 = a_3 + v_3 t$$
2. El vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta, por tanto, el producto escalar de dicho vector con el vector director de la recta es cero:
   $$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow v_1 \cdot (q_1 - p_1) + v_2 \cdot (q_2 - p_2) + v_3 \cdot (q_3 - p_3) = 0$$
3. Resolvemos la ecuación resultante:
   $$v_1 \cdot (a_1 + v_1 t - p_1) + v_2 \cdot (a_2 + v_2 t - p_2) + v_3 \cdot (a_3 + v_3 t - p_3) = 0$$
   de donde hallamos el valor de t que nos permitirá calcular las coordenadas del punto Q:
   $$t = \frac{v_1(p_1 - a_1) + v_2(p_2 - a_2) + v_3(p_3 - a_3)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Halla la proyección ortogonal del punto* $P\ (1,2,-1)$ *sobre la recta* $r:\dfrac{x+2}{3}=y-1=\dfrac{z+1}{2}$.

En primer lugar, hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P:

El vector normal de dicho plano será el vector director de la recta: $\vec{n}=(3,1,2)$, y la ecuación del plano es de la forma:

$$3x+y+2z+D=0$$

Como debe pasar por el punto $P\ (1,\ 2,\ -1)$: $3\cdot 1+2+2\cdot(-1)+D=0 \Rightarrow 3+2-2+D=0 \Rightarrow D=-3$

Tenemos: $\pi: 3x+y+2z-3=0$

Resolvemos el sistema, pasando primero la ecuación de la recta a su forma paramétrica:

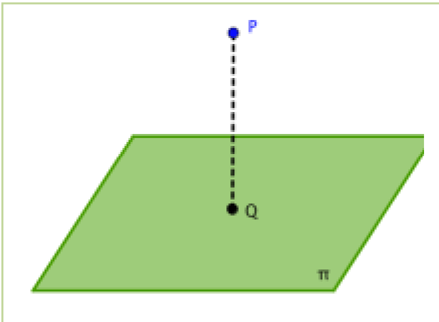
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{3}=y-1=\dfrac{z+1}{2}\\ 3x+y+2z-3=0\end{array}\right\}\Rightarrow 3(-2+3t)+(1+t)+2(-1+2t)-3=0 \Rightarrow 14t-10=0 \Rightarrow t=\frac{5}{7}$$

Sustituyendo el valor de *t*, obtenemos: $\left\{x=\frac{1}{7}, y=\frac{12}{7}, z=\frac{3}{7}\right\}$

Así, la proyección ortogonal del punto P sobre la recta *r* será el punto $Q\left(\frac{1}{7},\frac{12}{7},\frac{3}{7}\right)$.

2.2. Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π es otro punto Q perteneciente al plano, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al plano.



Para hallar la proyección ortogonal de un punto sobre un plano dado por la ecuación:

$$\pi: Ax+By+Cz+D=0$$

debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinar la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.
   Para ello, utilizamos el vector normal del plano como vector director de la recta:
   $$r:\{\ x=p_1+At\ ,\ y=p_2+Bt\ ,\ z=p_3+Ct\ \}$$
2. El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) es el punto de intersección de la recta con el plano.

   Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.
   $$A\cdot(p_1+At)+B\cdot(p_2+Bt)+C\cdot(p_3+Ct)+D=0$$
   $$\Rightarrow t=-\frac{D+A\,p_1+B\,p_2+C\,p_3}{A^2+B^2+C^2}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Halla la proyección ortogonal del punto* $P\,(-1, 3, 2)$ *sobre el plano* $\pi: x-2y+3z-1=0$.

Buscamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que contiene al punto P:

El vector director de dicha recta es el vector normal del plano: $\vec{v} = (1, -2, 3)$

La ecuación de la recta que pasa por P y con vector director $\vec{v}$ es:

$$r: \{\ x=-1+t\ ,\ y=3-2t\ ,\ z=2+3t\ \}$$

Determinamos el punto de intersección del plano con la recta:

$$\pi: x-2y+3z-1=0 \Rightarrow (-1+t)-2(3-2t)+3(2+3t)-1=0$$

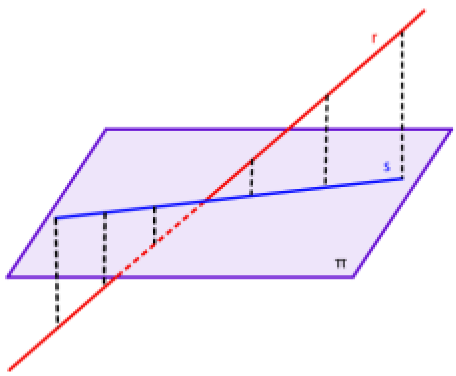
$$14t-1=0 \Rightarrow t=\tfrac{1}{14}$$

Sustituyendo el valor de t, tenemos: $\left\{x=-\tfrac{9}{14}, y=\tfrac{16}{7}, z=\tfrac{29}{14}\right\}$

Así, la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π es el punto $Q\left(-\dfrac{9}{14}, \dfrac{16}{7}, \dfrac{29}{14}\right)$

2.3. Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano π es otra recta s que está contenida en el plano, y tal que el plano π' que contiene a las dos rectas es perpendicular al plano π.



Para hallar la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, hallamos la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular al plano dado. La ecuación de la recta vendrá dada en forma implícita como intersección de los dos planos π y π'.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Halla la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π, siendo:*

$$r:\left.\begin{array}{l} x=-2+3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-3-\lambda \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \pi: x+y-z+1=0$$

Método 1:

Obtenemos un vector director y un punto de la recta: $\vec{v}=(3,1,-1)$ y $P\,(-2,1,-3)$, y obtenemos un vector normal del plano: $\vec{n}=(1,1,-1)$.

A continuación, podemos determinar el plano π' que pasa por el punto P y tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z+3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow -2x+11y+5z-2=0$$

Tenemos el plano $\pi':-2x+11y+5z-2=0$, que contiene a la recta *r* y es perpendicular a π.

La recta que estamos buscando (la proyección ortogonal) es, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z+1=0 \\ -2x+11y+5z-2=0 \end{array}\right\}$$

Método 2:

Otra forma de calcular la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, que puede resultar interesante dependiendo del problema al que nos enfrentemos, sería:

- Obtener la intersección de la recta *r* con el plano π, que es un punto que llamaremos P.
- Calculamos la proyección ortogonal de un punto cualquiera de *r* sobre el plano π, llamémoslo Q.
- Obtenemos la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos, P y Q.

Dicha recta será la proyección ortogonal buscada.

Actividad propuesta

2. Halla la proyección ortogonal del punto $P\,(0,3,1)$ sobre la recta $r:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+1}{2}$.

3. Halla la proyección ortogonal del punto $P\,(4,0,3)$ sobre el plano $\pi:3x-2y+z-2=0$.

4. Halla la proyección ortogonal de la recta *r* sobre el plano π, siendo:

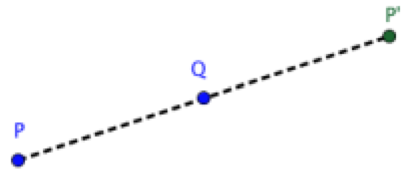
$$r:\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z11}{2} \quad \text{y} \quad \pi:2x+3y-z+1=0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

3. PUNTOS SIMÉTRICOS

3.1. Simétrico de un punto respecto de otro punto

El simétrico de un punto P respecto de otro punto Q es otro punto P' de manera que el punto Q es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.



Ya vimos en el capítulo 4 cómo determinar el punto medio del segmento definido por los puntos A y B:

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Ahora se trata de ir "a la inversa", dados un extremo y el punto medio, obtener el otro extremo. Si los puntos tienen por coordenadas $P(p_1,p_2,p_3)$ y $Q(q_1,q_2,q_3)$, y representamos a P' por $P'(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP'}\Rightarrow(q_1-p_1,p_2-q_2,p_3-q_3)=(x-q_1,y-q_2,z-q_3)$$

Igualando componentes:

$$\left.\begin{array}{r}q_1-p_1=x-q_1\\ q_2-p_2=x-q_2\\ q_3-p_3=x-q_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=2q_1+p_1\\ y=2q_2+p_2\\ z=2q_3+p_3\end{array}\right\}\Rightarrow P'(2q_1+p_1,2q_2+p_2,2q_3+p_3)$$

Actividad resuelta

- *Calcula el simétrico del punto* $P(2,-1,4)$ *respecto del punto* $Q(5,-1,8)$.

Sea $P'(p_1,p_2,p_3)$ dicho punto simétrico.

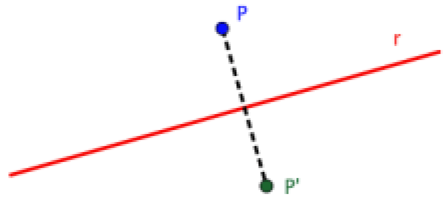
El punto Q es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

El punto medio de $\overline{PP'}$ es $\left(\frac{2+p_1}{2},\frac{-1+p_2}{2},\frac{4+p_3}{2}\right)$, luego igualando tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2+p_1}{2}=5\\ \frac{-1+p_2}{2}=-1\\ \frac{4+p_3}{2}=8\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2+p_1=10\\ -1+p_2=-2\\ 4+p_3=16\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}p_1=8\\ p_2=-1\\ p_3=12\end{array}\right\}\Rightarrow P'(8,-1,12)$$

3.2. Simétrico de un punto respecto de una recta

El simétrico de un punto P respecto de una recta r es otro punto P' de manera que la recta r pasa por el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular a la recta r.



Para hallar el simétrico de un punto respecto de una recta dada por la ecuación:

$$r: \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinar la proyección del punto sobre la recta r, para lo que procedemos como se indicó en el apartado 2.1. Llamaremos a ese punto Q.
2. Determinamos el punto simétrico de P respecto de Q, como hicimos en el apartado anterior.

Actividad resuelta

- *Calcula el simétrico del punto* $P\,(3, 1, -2)$ *respecto de la recta* $r: \dfrac{x+2}{-1} = y-1 = \dfrac{z+1}{2}$.

En primer lugar, hallamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r; expresamos la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$r: \{\ x = -1+2t\ ,\ y = 1+t\ ,\ z = -1+2t\ \}$$

Ahora buscamos el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P. El vector normal de dicho plano será el vector director de la recta: $\vec{n} = (-1, 1, 2)$ y la ecuación del plano es:

$$-(x-3) + (y-1) + 2(z+2) = 0 \Rightarrow -x + y + 2z + 6 = 0$$

La proyección ortogonal es el punto de intersección de la recta con el plano:

$$-(-2-t)+(1+t)+2(-1+2t)=0 \Rightarrow 6t+1=0 \Rightarrow t=\tfrac{1}{6}$$

Sustituyendo el valor de t en las ecuaciones de r, obtenemos: $\left\{x=-\tfrac{5}{6}, y=-\tfrac{1}{6}, z=-\tfrac{10}{3}\right\}$

Así, la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r será el punto $Q\left(-\dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{6}, -\dfrac{10}{3}\right)$

Ahora calculamos el punto simétrico de $P\,(3, 1, -2)$ respecto de la proyección Q. Sea dicho punto $P'\,(p_1, p_2, p_3)$. Tenemos:

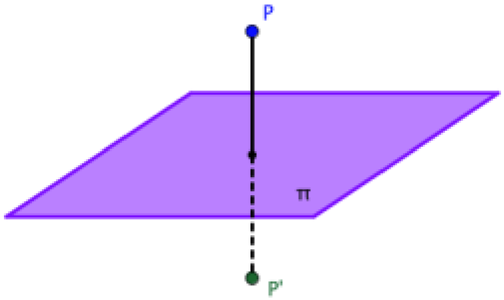
$$\left(\frac{3+p_1}{2}, \frac{1+p_2}{2}, \frac{-2+p_3}{2}\right) = \left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{10}{3}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{3+p_1}{2} = -\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1+p_2}{2} = -\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{-2+p_3}{2} = -\dfrac{10}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9+3p_1 = -5 \\ 3+3p_2 = -1 \\ -6+3p_3 = -20 \end{array}\right\}$$

De aquí, el simétrico de P respecto de la recta r será: $P'\left(-\dfrac{14}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{14}{3}\right)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

3.3. Simétrico de un punto respecto de un plano

El simétrico de un punto P respecto de un plano π es otro punto P' de manera que el plano π pasa por el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular al plano π.



Para hallar el simétrico de un punto respecto de un plano dado por la ecuación:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinar la proyección del punto sobre el plano π, para lo que procedemos como se indicó en el apartado 2.2. Llamaremos a ese punto Q.
2. Determinamos el punto simétrico de P respecto de Q, como hicimos en el apartado 3.1.

Actividad resuelta

- *Calcula el simétrico del punto* $P\,(2, 1, -1)$ *respecto del plano* $\pi : x + 3y - z + 4 = 0$.

Hallamos la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π, para ello buscamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P. El vector director de dicha recta es el vector normal del plano: $\vec{n} = \vec{v} = (1, 3, -1)$, y la ecuación de la recta es:

$$r : \{\ x = 2 + t\ ,\ y = 1 + 3t\ ,\ z = -1 - t\ \}$$

Buscamos el punto de intersección del plano con la recta:

$$(2+t) + 3(1+3t) - (-1-t) = 0 \Rightarrow 11t + 6 = 0 \Rightarrow t = -\tfrac{6}{11}$$

Sustituyendo el valor de t en las ecuaciones de r, obtenemos: $\left\{x = \tfrac{12}{11}, y = -\tfrac{19}{11}, z = -\tfrac{1}{11}\right\}$ y la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π será el punto $Q\left(\dfrac{12}{11}, -\dfrac{19}{11}, -\dfrac{1}{11}\right)$.

Ahora calculamos el punto simétrico de $P\,(2, 1, -1)$ respecto de la proyección Q. Sea dicho punto $P'\,(p_1, p_2, p_3)$. Tenemos:

$$\left(\frac{2+p_1}{2}, \frac{1+p_2}{2}, \frac{-1+p_3}{2}\right) = \left(\frac{12}{11}, -\frac{19}{11}, -\frac{1}{11}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2+p_1}{2} = \dfrac{12}{11} \\ \dfrac{1+p_2}{2} = -\dfrac{19}{11} \\ \dfrac{-1+p_3}{2} = -\dfrac{1}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 22 + 11p_1 = 24 \\ 11 + 11p_2 = -38 \\ -11 + 11p_3 = -2 \end{array}\right\}$$

De aquí, el simétrico de P respecto de la recta r es: $P'\left(\dfrac{2}{11}, -\dfrac{49}{11}, \dfrac{9}{11}\right)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

4. DISTANCIAS EN EL ESPACIO

4.1. Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A y B en el espacio es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(a_1, a_2, a_3\right) \\ B\left(b_1, b_2, b_3\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3\right)$$

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(b_1 - a_1\right)^2 + \left(b_2 - a_2\right)^2 + \left(b_3 - a_3\right)^2}$$

Actividad resuelta

- *Calcula la distancia del punto* $A\left(2, 1, -1\right)$ *al punto* $B\left(-1, -2, 2\right)$.

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo:

$$\overrightarrow{AB} = \left(-1-2, -2-1, 2-(-1)\right) = \left(-3, -3, 3\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ u}$$

Por tanto:

$$d(A,B) = 3\sqrt{3} \text{ u}$$

- *Determina las coordenadas de los puntos que equidistan de los puntos* $A\left(2, 1, -1\right)$ *y* $B\left(-1, -2, 2\right)$.

Si los puntos son de la forma $P\left(x, y, z\right)$, nos dicen que:

$$d\left(P, a\right) = d\left(P, B\right) \Rightarrow \sqrt{\left(x-2\right)^2 + \left(y-1\right)^2 + \left(z+1\right)^2} = \sqrt{\left(x+1\right)^2 + \left(y+2\right)^2 + \left(z-2\right)^2}$$

Elevamos al cuadrado, operamos y simplificamos, con lo que obtenemos:

$$6x + 6y - 6z + 1 = 0 \text{ u}$$

Que es la ecuación de un plano, que es el lugar geométrico pedido de los puntos que equidistan de dos puntos dados.

Actividad propuesta

5. Calcula la distancia del punto $A\left(0, 3, -4\right)$ al punto $B\left(-2, 0, 5\right)$.

6. Determina las coordenadas de los puntos que distan 4 del punto $C\left(2, -1, 1\right)$.

7. Determina las coordenadas de los puntos que distan R del punto $C\left(0, 0, 0\right)$.

8. Determina las coordenadas de los puntos que equidistan de los puntos $A\left(0, 0, 0\right)$ y $B\left(0, 0, 2\right)$.

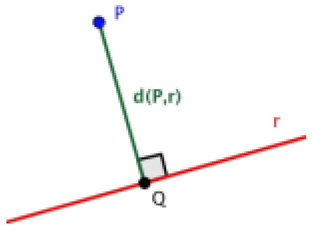
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

4.2. Distancia de un punto a una recta

Definición:

La distancia de un punto P a una recta r se ***define*** como la menor de las distancias $d(P, Q)$ siendo Q un punto de la recta r.

La distancia de un punto P a una recta r es la distancia del punto P a su proyección ortogonal sobre dicha recta.



Método 1:

La primera opción es aplicar directamente la definición:

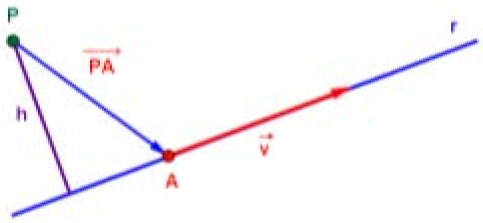
1. Hallamos la proyección del punto sobre la recta, el punto Q.
    a. Determinamos el plano π perpendicular a r que contiene a P.
    b. Obtenemos el punto Q, intersección de π y r.

    O bien,

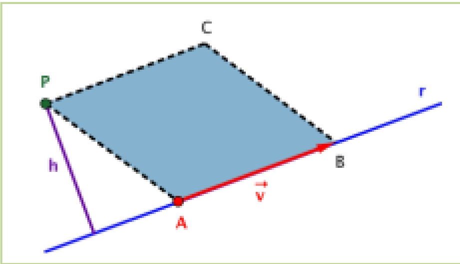
    a. Planteamos el punto Q (x, y, z) que pertenece a r.
    b. Exigimos que el vector $\overrightarrow{PQ} = (x - p_1, y - p_2, z - p_3)$ sea perpendicular al vector director de la recta, $\vec{v}$, es decir, su producto escalar debe ser nulo $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$.
2. Calculamos la distancia de P a Q, el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Método 2:

La segunda opción es aprovechar lo que sabemos de vectores. De la ecuación de la recta podemos obtener un punto de la misma, A, y su vector director, $\vec{v}$:



De la figura, deducimos que la distancia d es la proyección del vector $\overrightarrow{PA}$ sobre el vector $\overrightarrow{PQ}$. **PERO** no conocemos el vector $\overrightarrow{PQ}$, así que no podemos utilizar el producto escalar, pero sí el vectorial de acuerdo a la siguiente figura:



Usando los puntos P y A y el vector $\vec{v}$ construimos el paralelogramo $PABC$, y la altura h de dicho paralelogramo es precisamente la distancia que estamos intentando determinar.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Usando la fórmula del área de un paralelogramo:

$$\text{Área} = \text{Base} \cdot \text{Altura} = |\vec{v}| \cdot h$$

Sabemos que la interpretación geométrica del producto vectorial es, precisamente, el área:

$$\text{Área} = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|$$

Igualando ambas expresiones:

$$|\vec{v}| \cdot h = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right| \Rightarrow h = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|}$$

Como la altura *h* coincide con la distancia del punto *P* a la recta *r*, tenemos:

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|}$$

Por tanto, el procedimiento a seguir es:

1. Determinamos un punto de la recta, A, y su vector director, $\vec{v}$.
2. Hallamos el vector $\overrightarrow{PA}$ (o $\overrightarrow{AP}$)
3. Calculamos la distancia con la fórmula:

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|}$$

Actividad resuelta

- *Calcula la distancia del punto* $P\ (2, -1, 0)$ *a la recta* $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

A partir de la ecuación de la recta obtengamos un punto y un vector director. Es simple ver que son $A\,(1, -1, 1)$ y $\vec{v} = (1,\ 2, 3)$. Entonces, el vector $\overrightarrow{AP}$ es $\overrightarrow{AP} = (1, 0, -1)$, y hallamos el producto vectorial:

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} = (-2, 4, -2)$$

Como:

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|} \Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right| = |(-4{,}8{,}-4)| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+64+16} = \sqrt{96} \\ |\vec{v}| = |(2{,}4{,}6)| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} \end{cases}$$

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{56}} = \sqrt{\frac{96}{56}} = \sqrt{\frac{12}{7}} \text{ u}$$

Actividad propuesta

9. Calcula la distancia del punto $P\ (0, -1, 0)$ a la recta $r: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

4.3. Distancia de un punto a un plano

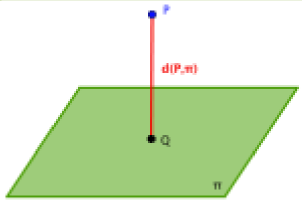
Definición:

La distancia de un punto P a un plano π se ***define*** como la menor de las distancias $d(P, Q)$ siendo Q un punto del plano π.

La distancia de un punto P a un plano π es la distancia del punto P a su proyección ortogonal sobre dicho plano.

Sea el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia de P a π viene dada por la siguiente expresión:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Demostración

Hallamos la proyección del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre el plano de ecuación:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

1. Determinamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P con el vector normal del plano:

$$r : \{\ x = x_0 + At\ ,\ y = y_0 + Bt\ ,\ z = z_0 + Ct\ \}$$

2. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.

$$A \cdot (x_0 + At) + B \cdot (y_0 + Bt) + C \cdot (z_0 + Ct) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{D + Ax_0 + By_0 + Cz_0}{A^2 + B^2 + C^2}$$

3. La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = (x_0 - (x_0 + At), y_0 - (y_0 + Bt), z_0 - (z_0 + Ct)) = (-At, -Bt, -Ct) = -t(A, B, C)$$

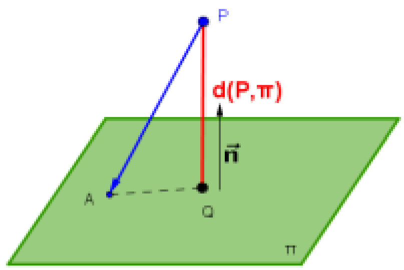
entonces:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = t \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Y sustituyendo t por su valor:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left| -\frac{D + Ax_0 + By_0 + Cz_0}{A^2 + B^2 + C^2} \right| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \Rightarrow d(P,\pi) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Alternativamente, podemos hallar la distancia con la proyección del vector $\overrightarrow{PA}$ sobre el vector normal del plano, siendo A un punto cualquiera del plano π:



$$d(P,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - a_1) + B(y_0 - a_2) + C(z_0 - a_3)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Calcula la distancia del punto* $P\,(2,-1,0)$ *al plano* $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$.

Aplicando la fórmula:

$$d(P,\pi)=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \Rightarrow d(P,\pi)=\left|\frac{2\cdot 2+1\cdot(-1)-0+3}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\ \text{u}$$

Ahora probemos con la proyección:

- Hallamos un punto del plano dando valores a dos de las variables:

$$\pi : 2x+y-z+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ 0+0-z+3=0 \Rightarrow z=3 \end{cases} \Rightarrow A\,(0,0,3)$$

- Obtenemos los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{PA}=(0-2,\cdots 0-(-1),3-0)=(-2,+1,+3) \quad \text{y} \quad \vec{n}=(2,1,-1)$$

- Finalmente:

$$d(P,\pi)=\left|\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \Rightarrow d(P,\pi)=\left|\frac{(-2)\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot 3}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{-6}{\sqrt{6}}\right|=\sqrt{6}\ \text{u}$$

Actividad propuesta

10. Calcula la distancia del punto $P\,(0,-3,-2)$ al plano $\pi : 3x-2y-4z+1=0$.

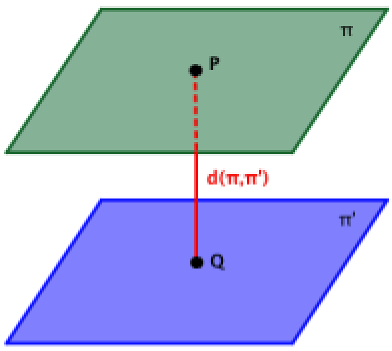
4.4. Distancia entre dos planos

Definición:

La distancia entre dos planos π y π' se define como la menor de las distancias $d(A, B)$, siendo $A \in \pi$ y $B \in \pi'$.

Dados dos planos π y π', se pueden presentar los siguientes casos:

- **Si los planos son coincidentes o secantes:** la distancia es cero.
- **Si los planos son paralelos:** la distancia entre ellos será la distancia entre cualquier punto de uno de los planos al otro plano.



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Actividades resueltas

- *Calcula la distancia entre los planos* $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$ *y* $\pi' : x + 2y - z + 1 = 0$

Analizamos los dos vectores normales:

$$\vec{n} = (2,1,-1) \quad \text{y} \quad \vec{n}' = (1,2,-1)$$

Es rápido ver que **NO** son paralelos:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-1}$$

por tanto los planos tampoco son paralelos, son secantes y la distancia entre ellos es cero.

- *Calcula la distancia entre los planos* $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$ *y* $\pi' : 4x + 2y - 2z + 6 = 0$

En este caso vemos que las ecuaciones son proporcionales:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6}$$

por tanto los planos son coincidentes y la distancia entre ellos es cero.

- *Calcula la distancia entre los planos* $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$ *y* $\pi' : 4x + 2y - 2z + 5 = 0$

A diferencia del ejemplo anterior, los coeficientes A, B y C son proporcionales, pero no así los términos independientes D:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{3}{5}$$

De modo que los planos son paralelos. Hallamos un punto de uno cualquiera de los planos:

$$\pi : 2x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ 0 + 0 - z + 3 = 0 \Rightarrow z = 3 \end{cases} \Rightarrow P\,(0,\,0,\,3)$$

y usamos la fórmula de la distancia del punto P al plano π'.

$$d(P,\pi') = \left| \frac{A x_0 + B y_0 + C z_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \Rightarrow d(P,\pi) = \left| \frac{4\cdot 0 + 2\cdot 0 - 2\cdot 3 + 5}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{24}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{12} \text{ u.}$$

Actividad propuesta

11. Calcula la distancia entre los planos: $\pi : x - y - 3z = 2$ y $\pi' : -x + 2y - z = 1$.

12. Calcula la distancia entre los planos: $\pi : x - y - 3z = 2$ y $\pi' : x - y - 3z = 5$

13. Calcula la distancia entre los planos: $\pi : x - y - 3z = 2$ y $\pi' : 2x - 2y - 6z = 4$

14. Calcula la distancia entre los planos: $\pi : -2x + 4y - 2z = 7$ y $\pi' : -x + 2y - z = 1$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

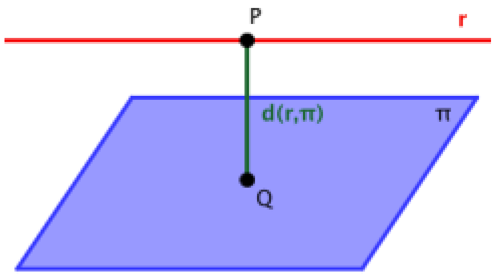
4.5. Distancia entre una recta y un plano

Definición:

La distancia entre una recta r y un plano π, se define como la menor de las distancias $d(A, B)$, siendo A un punto de r y $B \in \pi$.

Dada una recta r y un plano π, se pueden presentar los siguientes casos:

- **Si la recta y el plano tienen algún punto en común:** la distancia es cero.
- **Si la recta y el plano son paralelos:** la distancia entre ellos será la distancia entre cualquier punto de la recta y el plano.



Actividades resueltas

- *Calcula la distancia entre la recta y el plano* $\pi: 2x + y - z + 3 = 0$ *y la recta* $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}$.

La forma más rápida de analizar el paralelismo entre plano y recta es estudiar la posición relativa del vector normal del plano respecto al vector director de la recta:

Si r y π son paralelos, $\vec{n}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares

Entonces:

$$\vec{n} = (2, 1, -1) \text{ y } \vec{v} = (1, -1, 3), \text{ por tanto: } \vec{n} \cdot \vec{v} = (2,\ 1, -1) \cdot (1, -1,\ 3) = 2 - 1 - 3 = -2 \neq 0$$

El producto escalar **NO** es nulo, r y π **NO** son paralelos, la distancia entre ellos es nula.

- *Calcula la distancia entre la recta y el plano* $\pi: 2x + y - z + 3 = 0$ *y la recta* $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{3}$.

Procedemos como en el ejemplo anterior:

$$\vec{n} = (2, 1, -1) \text{ y } \vec{v} = (1,\ 1, 3), \text{ por tanto: } \vec{n} \cdot \vec{v} = (2,\ 1, -1) \cdot (1, 1,\ 3) = 2 + 1 - 3 = 0$$

El producto escalar es nulo, r y π son paralelos o coincidentes. Utilizamos el punto P que podemos obtener de ecuación de la recta, $P\,(1, -2, 0)$ para hallar la distancia:

$$d(P, \pi) = \left| \frac{A x_0 + B y_0 + C z_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \Rightarrow d(P, \pi) = \left| \frac{2 \cdot 1 + (-2) - 0 + 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{6}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ u}$$

Si el valor de la distancia hubiera salido cero, diríamos que la recta y el plano son coincidentes.

Actividad propuesta

15. Calcula la distancia entre la recta $r: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{4}$ y el plano $\pi: 2x + y + 5 = 0$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

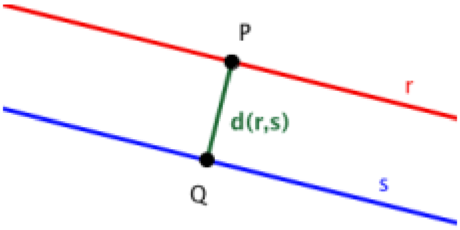
4.6. Distancia entre dos rectas

Definición:

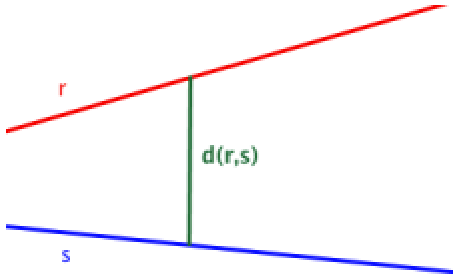
La distancia entre dos rectas r y s se define como la menor de las distancias $d(A, B)$, siendo $A \in r$, $B \in s$.

Dadas dos rectas r y s, se pueden presentar los siguientes casos:

- **Si las rectas son coincidentes o secantes:** la distancia es cero.
- **Si las rectas son paralelas:** la distancia entre ellas será la distancia de un punto de cualquiera de las rectas a la otra recta.



- **Si las rectas se cruzan:** la distancia entre ellas será la distancia de una de ellas al plano paralelo a ella que contiene a la otra recta.



En principio, deberíamos hacer un análisis de las posiciones relativas de las rectas antes de calcular la distancia entre ellas. Sin embargo, existe un razonamiento más simple que puede realizarse analizando los vectores directores y los vectores de posición de ambas rectas.

Dadas dos rectas r y s, sean los puntos $A \in r$ y $B \in s$, y sean, además, $\vec{u}$ un vector director de r y $\vec{v}$ un vector director de s. Entonces, hallando el vector $\overrightarrow{AB}$:

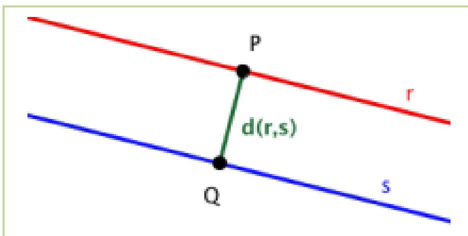
- Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{u} \times \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ las rectas r y s son coincidentes
- Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{u} \times \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ las rectas r y s son paralelas
- Si $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0$ $\Rightarrow$ las rectas r y s se cortan
- Si $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] \neq 0$ $\Rightarrow$ las rectas r y s se cruzan

Entonces, una vez que hemos comprobado las posiciones relativas de las rectas, procedemos según lo explicado:

- **Si las rectas son paralelas:**

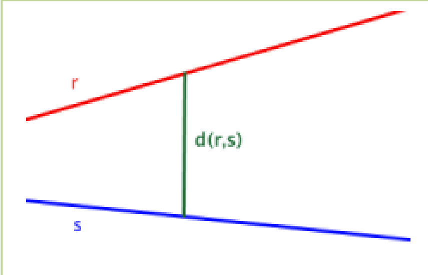
  Como ya hemos obtenido los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$, hallamos la distancia con la fórmula:

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{v}|} \quad \text{o} \quad d(P,r) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{u}|}$$



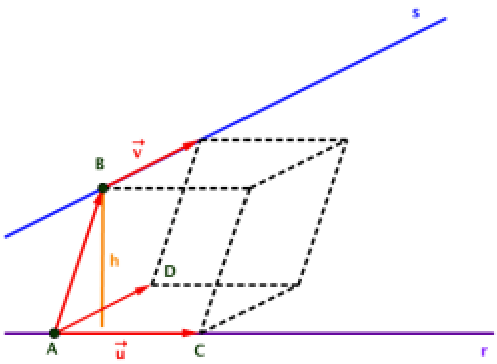
- **Si las rectas se cruzan:**
  En este caso podemos calcular la distancia entre ellas mediante la expresión:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$



Demostración

Consideramos el paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



Aplicando la fórmula del volumen de un paralelepípedo:

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base}\cdot\text{Altura} = |\vec{u}\times\vec{v}|\cdot h$$

Con la interpretación geométrica del producto mixto tenemos:

$$\text{Volumen} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$$

Igualando ambas expresiones:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|\cdot h=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|\Rightarrow h=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

La altura del paralelepípedo coincide con la distancia entre las rectas *r* y *s*, luego tenemos:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

Actividades resueltas

- *Halla la distancia entre las rectas* $r:\left.\begin{matrix}x+2y-3=0\\ y+z+4=0\end{matrix}\right\}$ *y* $s: x+2=-2y=z-1$.

Necesitamos un punto y un vector director de cada una de las rectas. Como *r* viene dada como intersección de dos planos, obtenemos los vectores normales de ambos planos: $\vec{n}=(1,2,0)$ y $\vec{n}'=(0,1,1)$, para obtener el vector director de *r* como:

$$\vec{u}=\vec{n}\times\vec{n}'=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(2,-1,1)$$

Obtengamos un punto de *r*, para lo que damos un valor a una variable:

$$r:\left.\begin{matrix}x+2y-3=0\\ y+z+4=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x+0-3=0\Rightarrow x=3\\ 0+z+4=0\Rightarrow z=-4\end{cases}\Rightarrow A(3,0,-4)$$

Por otro lado, tenemos la recta

$$s: x+2=-2y=z-1\Rightarrow s:\frac{x+2}{1}=\frac{y}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{1}$$

de la que obtenemos el punto $B(-2,0,1)$ y el vector director $\vec{v}=\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$, o mejor consideramos el vector $\vec{v}'=(2,-1,2)$ para simplificar los cálculos.

Empezamos hallando el producto vectorial para ver si son paralelas o no:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}-2\,\vec{j}+0\,\vec{k}=(-1,-2,0)$$

No obtenemos el vector nulo, así que r y s se cortan o se cruzan.

Sea el vector $\overrightarrow{AB}=(-5,0,5)$, hallamos su producto mixto con $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]=\begin{vmatrix}5 & 0 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=-10-10+0-(-10-5+0)=-20+15=-5$$

El resultado es distinto de cero, así que r y s se cruzan. Utilizamos la expresión para la distancia:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

Hallamos el módulo del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{5}$$

y sustituimos:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{|-5|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\text{ u.}$$

Actividad propuesta

16. Halla la distancia entre las rectas $r:\left.\begin{matrix}x+2y-3z=1\\ 2x-y+z+4=0\end{matrix}\right\}$ y $s:\begin{cases}x=2-3t\\ y=1+t\\ z=-3-2t\end{cases}$.

17. Halla la distancia entre las rectas $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ y $s:\begin{cases}x=2-3t\\ y=1+t\\ z=-3-2t\end{cases}$.

18. Halla la distancia entre las rectas $r:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ y $s:\begin{cases}x=2-t\\ y=1+t\\ z=-3-t\end{cases}$.

19. Halla la distancia entre las rectas $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ y $s:\begin{cases}x=1-4t\\ y=-3-2t\\ z=2+2t\end{cases}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

CURIOSIDADES. REVISTA

Geometría y arquitectura

En los libros de Secundaria que acostumbras a usar siempre aparecen edificios clásicos de la antigua Grecia, Roma y otras culturas antiguas.

Hoy en día estamos rodeados de edificios con líneas muy diferentes y sorprendentes, algunas de las cuales exploran aspectos de la geometría que hasta hace poco no se conocían. Esto no quiere decir que sólo hablemos de los edificios modernos. Los mocárabes de la *Alhambra*, en Granada, son un claro ejemplo de cómo jugar con las tres dimensiones y la repetición de motivos.

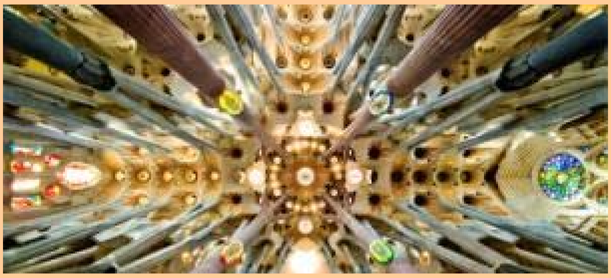
Mocárabes en la *Alhambra* – Granada

El Centro *Niemeyer* de Avilés

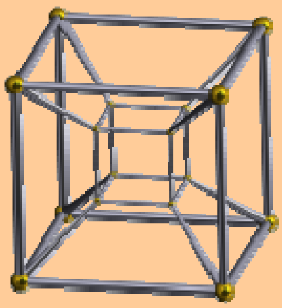
En otros casos se utilizan volúmenes de revolución, y se consiguen formas suaves de aspecto natural.

Aunque si se trata de imitar a la naturaleza, nada mejor que ver cómo *Gaudí* imitó la forma de los troncos y las ramas en las columnas de la Sagrada Familia.

***Sagrada Familia* de Barcelona**



Monumento a la *Constitución* – Madrid



Se exploran, incluso, dimensiones superiores a tres. El Monumento a la Constitución de Madrid es el modelo tridimensional de lo que se denomina hipercubo, una figura de cuatro dimensiones, y recibe el nombre de ***Tesseract***.

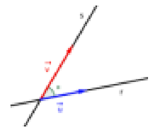
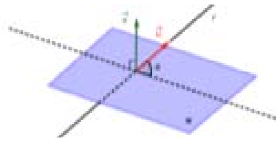
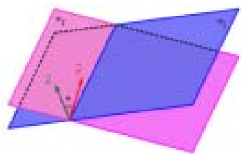
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

RESUMEN

Dadas las rectas r y s, y los planos π y π' definidos por los siguientes vectores directores, normales y de posición:

	Recta r	Recta s	Plano π	Plano π'
Vector de posición	punto A	punto B	punto P	punto Q
Vector…	…director $\vec{u}$	…director $\vec{v}$	…normal $\vec{n}$	…normal $\vec{n}'$

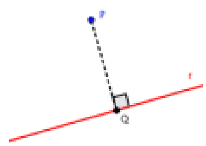
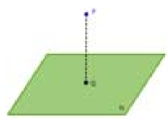
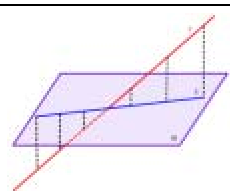
Ángulos en el espacio

Ángulo entre dos rectas	$\alpha(r,s) = \text{arc cos} \dfrac{\lvert \vec{u}\cdot\vec{v} \rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}$	
Ángulo entre recta y plano	$\alpha(r,\pi) = \text{arc sen} \dfrac{\lvert \vec{u}\cdot\vec{n} \rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$	
Ángulo entre dos planos	$\alpha(\pi,\pi') = \text{arc cos} \dfrac{\lvert \vec{n}\cdot\vec{n}' \rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{n}'\rvert}$	

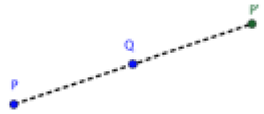
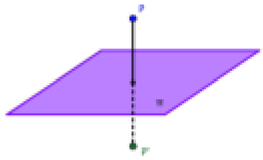
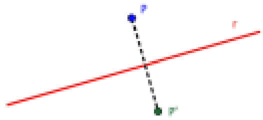
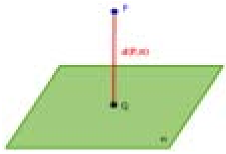
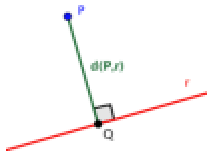
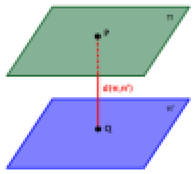
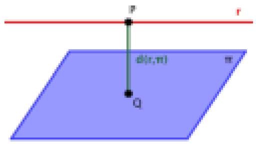
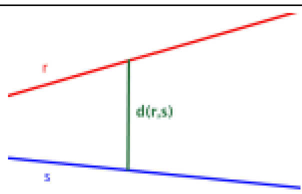
Paralelismo, perpendicularidad y posiciones relativas

	Coincidentes	Paralelos/as	Secantes	Perpendiculares	Se cruzan
r y s	$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]=0$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\neq 0$
r y π	$\vec{u}\cdot\vec{n}=\vec{0}$ y $\vec{n}\times\overrightarrow{AP}=\vec{0}$	$\vec{u}\cdot\vec{n}=\vec{0}$ y $\vec{n}\times\overrightarrow{AP}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\cdot\vec{n}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}$	———
π y π'	$\vec{n}\times\vec{n}'=\vec{0}$ y $\vec{n}\times\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$	$\vec{n}\times\vec{n}'=\vec{0}$ y $\vec{n}\times\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$	$\vec{n}\times\vec{n}'\neq\vec{0}$	$\vec{n}\cdot\vec{n}'=\vec{0}$	———

Proyecciones ortogonales

De un punto sobre una recta	$\text{Proy}(P,r)=Q\ ,\ \overrightarrow{PQ}\perp r$	
De un punto sobre un plano	$\text{Proy}(P,\pi)=Q\ ,\ \overrightarrow{PQ}\perp \pi$	
De una recta sobre un plano	$\text{Proy}(r,\pi)=s\ ,\ \begin{cases} s\subset\pi \\ \pi_{rs}\perp\pi \end{cases}$	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Puntos simétricos		
De un punto respecto de otro punto	$P' \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$	
De un punto respecto de un plano	$P' \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$, $Q = \mathrm{Proy}(P, \pi)$	
De un punto respecto de un plano	$P' \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$, $Q = \mathrm{Proy}(P, r)$	
Distancias		
Entre dos puntos	$d(A,B) = \left\lvert \overrightarrow{AB} \right\rvert = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$	
De un punto a un plano	$d(P,\pi) = \dfrac{\lvert A x_0 + B y_0 + C z_0 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	
De un punto a una recta	$d(P,r) = \dfrac{\left\lvert \vec{v} \times \overrightarrow{AP} \right\rvert}{\lvert \vec{v} \rvert}$	
Entre dos planos	$d(\pi,\pi') = d(P,\pi') \text{ si } \begin{cases} \pi \parallel \pi' \\ P \in \pi \end{cases}$	
De una recta a un plano	$d(r,\pi) = d(P,\pi) \text{ si } \begin{cases} r \parallel \pi \\ P \in r \end{cases}$	
Entre dos rectas	$d(r,s) = \dfrac{\left\lvert \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] \right\rvert}{\lvert \vec{u} \times \vec{v} \rvert}$	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Estudia la posición relativa de las rectas $r:\dfrac{x}{2}=y+2=\dfrac{z+2}{1}$ y $s: x=-y+1=-2z$ y calcula:

a) El punto de intersección.

b) La ecuación del plano que las contiene.

c) El ángulo que forman las rectas.

2. - Dados los planos $\pi_1: 3x+2y-z=6$ y $\pi_2: -2x+y+3z-6=0$, se pide:

a) Estudiar su posición relativa.

b) Hallar el ángulo que forman esos dos planos.

c) Hallar la ecuación de una recta s que pasando por el punto $N(-2,1,3)$ es perpendicular a π_2.

3. - Halla la proyección vertical del punto $A(5,-2,-3)$ sobre el plano $\pi: 2x+y-2z+4=0$.

4. - Halla la proyección de la recta $r\equiv -x+2=\dfrac{y-3}{2}=3z+1$ sobre el plano $\pi: x+y+2z-2=0$, así como el ángulo que forman la recta y el plano.

5. - Obtener las coordenadas del punto simétrico de $A(0,-2,2)$ respecto de la recta $r: 1-x=y+1=z$

6. - Obtén las coordenadas del punto simétrico de $A(3,1,2)$ respecto del plano $\pi: x+y-z+4=0$.

7. - Obtén las coordenadas del punto simétrico de $A(0,2,-1)$ respecto de:

a) La recta $r: 1+x=y+2=1-z$

b) El plano $\pi: x-y+z+1=0$

8. - a) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,-3,3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $B(3,0,-1)$ y $C(1,-1,0)$.

b) Obtén las coordenadas del punto simétrico de C respecto del plano.

9. - Dado el punto $A(-1,2,0)$ y la recta $r: x+1=-\dfrac{y}{2}=2-z$, se pide hallar:

a) La ecuación de la recta s que pasa por el punto A y corta perpendicularmente a la recta r.

b) El punto de intersección de ambas rectas r y s.

c) Las coordenadas del punto simétrico de A respecto de la recta r.

10. - Calcula la distancia del punto $M(-1,1,3)$:

a) Al punto $N(1,-1,2)$

b) Al plano $\pi: 2x-y-z-3=0$

c) A la recta $r: x-1=2y+1=2-z$

11. - Dados los planos $\pi_1: 3x-2y+z=4$ y $\pi_2: \{x=2-\lambda+3\mu, y=-\lambda+4\mu, z=-1+\lambda-\mu\}$, estudia su posición relativa y calcular la distancia entre ellos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

12. - Hallar la posición relativa de las rectas $\begin{cases} r: -2x = y-3 = 2z+2 \\ s: \begin{cases} 2x-y+4z=0 \\ -x+y-3z=4 \end{cases} \end{cases}$ y calcular la distancia entre ellas.

13. - Dadas los pares de rectas,

a) $\begin{cases} r: \begin{cases} 2x-z=4 \\ y+2z=0 \end{cases} \\ s: \dfrac{x}{3} = y+1 = \dfrac{-z+1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: x = 2y = z+1 \\ s: \dfrac{x-3}{2} = y+1 = \dfrac{z}{2} \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa.

b) Calcula la distancia entre ellas.

14.- Halla la proyección de la recta $r \equiv -x+2 = \dfrac{y-3}{2} = 3z+1$ sobre el plano $\pi: -x+3y+3z-3=0$, así como la distancia que hay entre la recta y el plano.

15. - Dada la recta $r: \begin{cases} y = x+2 \\ z = 1-3x \end{cases}$, se pide:

a) Halla la ecuación de la recta *s* que pasando por el punto $A(-1,0,1)$ es paralela a la recta *r*.

b) Calcula la distancia que hay entre ellas.

c) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $M\,(-2,0,1)$ y contiene a la recta *r*.

16. - Halla la ecuación de un plano π que contiene a la recta $r: \begin{cases} x-4y+z+3=0 \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$ y dista 2 unidades del origen de coordenadas.

17. - Dados el plano y la recta:

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad r: \left.\begin{matrix} x-y+2=0 \\ 2y+z=0 \end{matrix}\right\}$$

a) El punto de intersección de la recta *r* con el plano π.

b) El ángulo que forman la recta *r* y el plano π.

c) La ecuación de un plano π ' perpendicular al plano π y que contenga a la recta *r*.

18. - Dados los planos $\pi_1: x-y=2$ y $\pi_2: x+y-2z-4=0$, se pide:

a) Ecuación de una recta que pase por el punto $A(0,1,1)$ y sea paralela a los planos π_1 y π_2.

b) Valor de m y n sabiendo que el punto $C(m,0,n) \in \pi_2$ y dista $\sqrt{2}$ unidades del plano π_1.

19. - Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-1,0,1)$, $B\,(0,1,1)$ y el tercer vértice es el punto de corte del plano *OYZ* con la recta $r: \dfrac{x+2}{2} = y-2 = \dfrac{z+2}{-1}$.

20. - Halla la proyección de la recta $r: \dfrac{x+2}{2} = y-2 = \dfrac{z+2}{-1}$ sobre el plano determinado por el origen de coordenadas y los puntos $A(-1,0,1)$ y $B\,(0,1,1)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

AUTOEVALUACIÓN

1) El ángulo formado por las rectas $r:\left.\begin{array}{l} x=4-t \\ y=-3+t \\ z=2 \end{array}\right\}$ y $s:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$ es:

a) $\cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{50}}$; b) $\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}$; c) $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{28}}$; d) $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}}$

2) El ángulo formado por los planos $\pi: 3x-y+2z-1=0$ y $\pi': x+2y-z-5=0$ es:

a) $\cos\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}$; b) $\cos\alpha=\dfrac{7}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{4}}$; c) $\cos\alpha=\dfrac{-3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}$; d) $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{11}}$

3) La proyección ortogonal del punto $P\,(0,0,-1)$ sobre la recta $r:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ es:

a) $\left(\frac{1}{7},\frac{12}{7},\frac{3}{7}\right)$; b) $\left(\frac{-2}{7},\frac{10}{7},\frac{1}{7}\right)$; c) $\left(\frac{11}{14},\frac{9}{14},\frac{13}{14}\right)$; d) Ninguno de los anteriores

4) La proyección ortogonal del punto $P\,(0,0,-1)$ sobre el plano $\pi: x-2y+3z-1=0$ es:

a) $\left(\frac{2}{7},\frac{-4}{7},\frac{-4}{7}\right)$; b) $(1,-2,-2)$; c) $\left(\frac{4}{14},\frac{-8}{14},\frac{20}{14}\right)$; d) Ninguno de los anteriores

5) El simétrico del punto $P\,(1,-1,1)$ respecto del punto $Q\,(0,-1,2)$ es:

a) $(1,-3,5)$; b) $(-1,-1,3)$; c) $(-3,-3,4)$; d) Ninguno de los anteriores

6) El simétrico del punto $P\,(1,-1,1)$ respecto de la recta $r:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ es:

a) $\left(\frac{29}{7},\frac{19}{7},\frac{17}{7}\right)$; b) $\left(\frac{15}{7},\frac{-5}{7},\frac{10}{7}\right)$; c) $\left(\frac{1}{7},\frac{9}{7},\frac{3}{7}\right)$; d) Ninguno de los anteriores

7) La distancia del punto $A\,(0,1,0)$ al punto $B\,(-1,0,2)$ es:

a) 6; b) $\sqrt{6}$; c) $\sqrt{2}$; d) Ninguno de los anteriores

8) La distancia del punto $A\,(0,1,0)$ a la recta $r:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ es:

a) $\dfrac{\sqrt{98}}{14}$; b) $\dfrac{\sqrt{89}}{14}$; c) $\sqrt{37}$; d) Ninguno de los anteriores

9) La distancia del punto $A\,(0,1,0)$ al plano $\pi: x-2y+3z-1=0$ es:

a) $\dfrac{1}{14}$; b) $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$; c) $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$; d) Ninguno de los anteriores

10) La distancia entre los planos $\pi: x-2y+3z-1=0$ y $\pi': 5x-y+2z-3=0$ es:

a) 0; b) $\dfrac{2}{\sqrt{30}}$; c) $\dfrac{5}{\sqrt{14}}$; d) Ninguno de los anteriores

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Apéndice: Problemas de geometría métrica en las P.A.A.U.

(1) Considera las rectas $r_1 : \left.\begin{matrix} x-z=2 \\ 2x-y=1 \end{matrix}\right\}$ y $r_2 : \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 2y-z=-1 \end{matrix}\right\}$

a) Estudia la posición relativa de r_1 y r_2.

b) Encuentra, si es posible, un plano paralelo a r_1 que contenga a r_2.

c) Encuentra la distancia entre r_1 y r_2.

(2) Considera el punto $P(-1,0,1)$ y el plano $\pi : x-y+z+2=0$. Calcula:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano π.

b) La distancia *d* del punto P al plano π.

(3) Considera los puntos $A(1,2,-3)$ y $O(0,0,0)$.

a) Da la ecuación de un plano π_1 que pase por A y O, y sea perpendicular a $\pi_2 : 3x-5y+2z=11$.

b) Encuentra la distancia del punto medio de A y O a π_2.

(4) Considere el plano $\pi : x-y+z=-1$ y el punto $P(1,0,1)$.

a) Obtén el punto P' simétrico de P respecto de π.

b) Halla el punto de corte del plano π con la recta que pasa por P y P'.

(5) Sea *s* la recta que pasa por los puntos $A(1,1,0)$ y $B(0,1,0)$. Considera la recta $r : \left.\begin{matrix} y=0 \\ z=2 \end{matrix}\right\}$.

a) Escribe unas ecuaciones cartesianas de la recta *s*.

b) Da la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

c) Obtén la distancia entre *r* y *s*.

(6) Considera un movimiento en el espacio tal que a cada punto de coordenadas (a,b,c) lo mueve al punto de coordenadas $(a+b, a+b+c, a+b)$.

a) Busca el conjunto de puntos que se mueven al origen de coordenadas.

b) Da una ecuación del plano π que determinan los puntos del apartado (a) y el punto $(1,1,1)$.

c) Busca la distancia del origen de coordenadas al plano π.

(7) Sean el punto $P(-1,2,0)$ y el plano $\pi : 2x-3y+z=8$. Calcula:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano π.

b) La distancia *d* del punto P al plano π.

c) La ecuación de otro plano, paralelo a π y distinto de él, que diste de P la misma distancia d.

(8) Se consideran los puntos en el espacio $A(1,-1,1)$ y $B(2,2,2)$.

a) Halla el punto medio de A y B.

b) Da la ecuación del plano respecto al cual A y B son puntos simétricos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

(9) Considere el plano $\pi : x + y - z = 0$ y la recta $r : \left. \begin{matrix} x = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix} \right\}$.

a) Halla la posición relativa de la recta y el plano.

b) Encuentra una recta perpendicular a ambos.

c) Busca la mínima distancia entre la recta y el plano dados.

(10) a) Determina el valor de k para que los puntos $A(0,2,1)$, $B(1,-2,0)$, $C(2,0,3)$ y $D(1,1,k)$ se encuentren en el mismo plano.

b) Halla la distancia del origen de coordenadas al plano determinado por los puntos A, B y C.

(11) Dado el punto $O(0,0,0)$, busca un punto O' del espacio tal que la recta que pasa por O y O' sea perpendicular al plano π de ecuación $x + y + z = 3$ y las distancias de O a π y de O' a π coincidan.

(12) Se consideran la recta y plano siguientes:

$$r : \left. \begin{matrix} x = 1 + 2t \\ y = -5 - 5t \\ z = -3 + 2t \end{matrix} \right\} \qquad \pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : x + 2y + 4z - 2 = 0$$

a) Determina la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.

b) Determina la posición relativa de los dos planos.

c) Calcula la distancia de r al plano π_2.

(13) a) Obtén la posición relativa de los planos π_1, que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,-1)$, y π_2, que pasa por $A'(3,0,0)$, $B'(0,6,0)$ y $C'(0,0,-3)$.

b) Busca la mínima distancia entre los planos anteriores.

(14) Sean el punto $P(-1,2,0)$ y el plano $\pi : x + y - z + 2 = 0$. Calcula:

a) La ecuación de una recta que pase por el punto P y corte al plano π.

b) La distancia del punto P al plano π.

(15) Se consideran el plano π_1 que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,-1)$, y el plano π_2 que pasa por los puntos $P(3,0,0)$, $Q(0,6,0)$ y $R(0,0,-3)$. Calcula:

a) Las ecuaciones generales o implícitas de π_1 y π_2.

b) La posición relativa de π_1 y π_2.

c) La distancia entre π_1 y π_2.

(16) Considere los puntos $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$ y $C(0,0,-1)$.

a) Da las ecuaciones de la recta r que pasa por B y C.
b) Calcula el plano π que pasa por A y es perpendicular a r.
c) Halla el punto de corte entre r y π.
c) Obtén el punto simétrico de A respecto de r.

(17) Sean el punto $P(-1,2,0)$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$. Calcula:

a) La ecuación del plano π perpendicular a *r* pasando por *P*.

b) El punto de intersección entre *r* y π.

c) La distancia del punto *P* a la recta *r*.

(18) Dado el punto $A(0,1,2)$ y el plano $\pi: x - y + z - 4 = 0$.

a) Calcule la recta *r* perpendicular al plano π que pasa por el punto *A*.

b) Halle el punto de intersección entre *r* y π.

c) Halle el punto simétrico de *A* respecto de π.

(19) Se consideran los puntos $A(2,-1,1)$ y $B(-2,3,1)$.

a) Halla los puntos *C* y *D* que dividen al segmento $\overline{AB}$ en tres partes de igual longitud.

b) Halla el plano respecto al cual los puntos *A* y *B* son simétricos.

(20) Se denota por *r* la recta $x - 6 = y - 7 = \frac{z-4}{-2}$ y por *P* el punto de coordenadas $(1,0,1)$.

a) Halle la ecuación del plano que pasa por *P* y es perpendicular a *r*.

b) Halle el punto de *r* más próximo a *P* y halla la distancia de *P* a *r*.

(21) Se denota por *rs* la recta $x-1=1-y=z-\frac{1}{2}$ y sea *s* la recta que pasa por $A(1,0,1)$ y $B(1,2,0)$.

a) Estudia si las rectas *r* y *s* se cortan y, si se cortan, halle el punto de intersección.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*.

c) Halla el punto de *r r* que equidista de *A* y *B*.

(22) Sean las rectas

$$r: \left.\begin{matrix} 3x + y = 1 \\ x - kz = 2 \end{matrix}\right\} \quad \text{y} \quad s: \left.\begin{matrix} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{matrix}\right\}.$$

a) Estudia si para algún valor de *k* las rectas son paralelas.

b) Estudia si para algún valor de *k* las rectas son perpendiculares.

c) Halla la distancia del punto $A(1,1,1)$ a la recta *s*.

(23) Dados los puntos $A(2,2,0)$, $B(0,0,2)$ y $C(0,1,2)$.

a) Halla el plano π que contiene a los tres puntos.

b) Calcula un punto *P* que esté a distancia de $2\sqrt{2}$ unidades del plano π y del punto medio del segmento $\overline{AB}$.

c) Considerando $D(2,1,1)$ calcula el volumen del tetraedro limitado por los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.

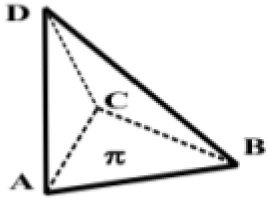
(24) Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,6)$ y $D(\alpha,3,1)$. Calcula:

a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C.

b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.

c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π.

d) Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π.



(25) Sea el punto $A(1,0,0)$ y el plano $\pi: 2x + y - z = 1$. Halla:

a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a π.

b) La ecuación del plano π' que pasa por A y no corta a π.

c) La distancia entre los dos planos.

(26) Sean los puntos $A(-1,1,0)$ y $B(0,1,1)$. Determina:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta *r* que une los puntos.

b) La ecuación del plano π que pasa por A y es perpendicular a la recta *r*.

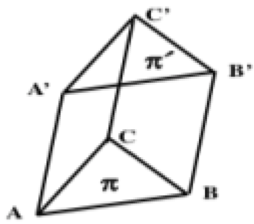
c) La distancia del punto B al plano π.

(27) Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,-1,0)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-1)$ y $A'(1,-1,\alpha)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.

b) El valor de α para que el plano π', que contiene los puntos A', B' y C', diste una unidad del plano π.

c) Para $\alpha = 1$, el plano π' y el volumen del prisma.



(28) Los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,1,1)$, $C(2,3,0)$ y D forman un paralelogramo. Calcule:

a) Las coordenadas del vértice D opuesto a B.

b) El área del paralelogramo.

c) La ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

(29) Se considera el paralelepípedo cuyos vértices de la cara inferior son los puntos $A(-1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(3,0,0)$ y $D(2,0,-1)$ con A y C vértices opuestos. Sea $A'(-3,1,0)$ el vértice adyacente a A en la cara superior. Calcula:

a) Las ecuaciones de los planos que contienen a las caras inferior y superior.

b) Los vértices de la cara superior.

c) El volumen del paralelepípedo.

(30) Dada la recta *r* de ecuación $x + 1 = y - 2 = \dfrac{z-3}{4}$ y el punto $P(1,2,1)$. Calcula:

a) La ecuación de la recta que pasa por P, es perpendicular a *r* y se apoya en *r*.

b) Las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto a *r*.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

(31) Sea el punto $A(1,2,0)$ perteneciente a un plano π. Calcula:

a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0,0,-2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A.

b) La ecuación de un plano cuya distancia a π sea de 3 unidades.

c) Un punto B perteneciente a π y al plano π': $2x - y = 0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A.

(32) Sea la recta $r:\left.\begin{matrix} x - y + z = -1 \\ 6x - 3y + 10z = 6 \end{matrix}\right\}$.

a) Calcula las coordenadas de los puntos P y Q que pertenecen a la recta y distan 5 unidades del origen de coordenadas.

b) Sea M el punto medio del segmento de extremos P y Q. Calcula sus coordenadas.

c) Justifica por qué de todos los puntos de la recta r, M es el más próximo al origen de coordenadas.

(33) Los puntos $P(1,1,0)$ y $Q(0,2,1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo. Un tercer vértice pertenece a la recta $r:\{y = 0, z = 1\}$.

a) Determina los vértices de un rectángulo que verifique las condiciones anteriores.

b) ¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene al segmento $\overline{PQ}$ para que la solución fuese única? Razona la respuesta.

(34) Dado el tetraedro con un vértice O sobre el origen de coordenadas y los otros tres A, B y C sobre los semiejes positivos OX, OY y OZ respectivamente, se pide hallar:

a) Las coordenadas de A, B y C sabiendo que el volumen del tetraedro es $\frac{8}{3}$ u^3, que las aristas OA y OB tienen igual longitud y que la arista OC tiene doble longitud que OA.

b) La ecuación de la altura del tetraedro correspondiente a la cara ABC.

c) La distancia entre las rectas AC y OB.

d) El ángulo que forman las aristas AC y AB.

(35) Dados los puntos $A(-3,1,2)$, $B(1,-1,0)$ y $C(-1,0,0)$, se pide:

a) Comprobar si están alineados, y, en caso contrario, calcular el perímetro y el área del triángulo.

b) Hallar el valor de la altura correspondiente al vértice A.

c) Calcular el valor del ángulo correspondiente al vértice B.

d) Hallar la ecuación de una de las tres medianas.

(36) Dado un triángulo de vértices $A(2,1,1)$, $B(0,5,3)$ y $C(4,3,1)$, halla:

a) El perímetro.

b) El área.

c) El valor de la altura correspondiente al vértice A.

d) La ecuación de una mediana.

e) La ecuación de una mediatriz.

f) La ecuación de una altura.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

(37) Sabiendo que la ecuación de un plano es $\pi: x+2y-2z+4=0$:

a) Halla la ecuación de un plano π' paralelo al plano π y que diste una unidad del punto $Q(1,0,-1)$.

b) Halla la distancia entre ambos planos π y π'.

c) Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos donde el plano π corta a los ejes de coordenadas.

(38) Dado el plano $\pi: x+y+z=1$, la recta $r:(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda\cdot(0,1,1)$, y el punto $P(1,1,0)$:

a) Halla la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P.

b) Halla el punto P', simétrico de P respecto de r.

c) Halla el punto P'', simétrico de P respecto de π.

(39) Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,1,0)$ y $D(0,1,3)$.

a) Halla el área del triángulo ABC y el volumen del tatraedro $ABCD$.

b) Calcula la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) Halla la distancia entre las rectas AC y BD.

(40) Sean los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,1,-4)$.

a) Halla las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

b) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determina la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

c) Determina la posición relativa del plano π y la recta $r: \frac{x-3}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$

(41) Halla los puntos de la recta:

$$r: \begin{cases} 2x \quad +z=0 \\ x-y+z=3 \end{cases}$$

cuya distancia al plano $\pi: 3x+4y=4$ es igual a $\frac{1}{3}$ u.

(42) Dados los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(0,1,0)$Q(0; 1; 0), se pide:

a) Halla todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describe dicho conjunto de puntos.

b) Halla todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican:

$$\text{dist}(P,S)=2\cdot\text{dist}(Q,S)$$

donde "dist" significa distancia.

(43) Dados el plano $\pi: 3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) Hallar el punto Q intersección de π con r.

c) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

d) Hallar el área del triángulo PQR.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisora: Milagros Latasa
Imágenes creadas por los autores

Matemáticas II.
2º Bachillerato.
Capítulo 7: Límites y continuidad

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Leticia González Pascual

Revisor: Álvaro Valdés Menéndez

Índice

Resumen

Ya conoces del curso pasado el límite de sucesiones y el límite de funciones, y algunas de sus muchas aplicaciones, en el estudio de la continuidad de una función, de las asíntotas en las gráficas de funciones, en el concepto de derivada… Podríamos decir que el “Análisis Matemático” se basa en este concepto de límite. Este curso lo volveremos a revisar aumentando el rigor de las definiciones y el nivel de los problemas.

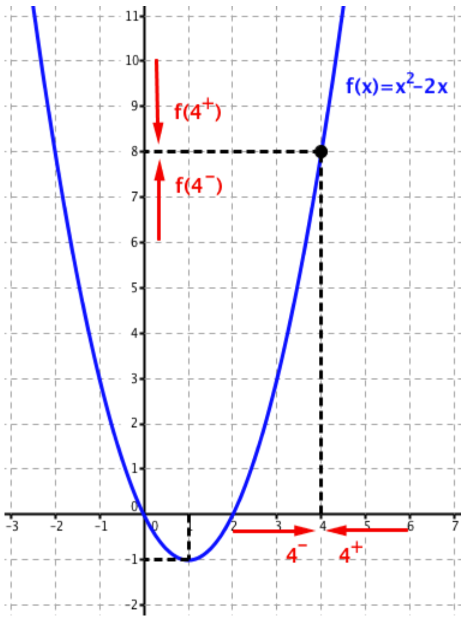
Dentro de este estudio nos fijaremos en el significado de “tiende a infinito”. ¿Qué es infinito? Si reflexionas, te darás cuenta que el infinito matemático es bastante distinto de lo que ocurre en la realidad cotidiana. La idea de infinito siempre ha planteado muchas incógnitas y ha costado mucho esfuerzo comprenderlo. Para nosotros, ahora es fácil. Añadimos a la recta real dos nuevos entes, el $-\infty$ y el $+\infty$, de forma que se pueda afirmar que todo número real x, está entre $-\infty < x < +\infty$.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

1. IDEA INTUITIVA DE LÍMITE

Actividades de introducción

- *Vamos a estudiar el comportamiento de la función* $f(x) = x^2 - 2x$ *para valores próximos a* $x = 4$.



En la tabla siguiente observamos que, cuando damos a x valores próximos a 4 pero inferiores que 4, la función $f(x)$ se *aproxima* o *tiende* a 8:

x	3	3'5	3'9	3'99	3'999	3'9999
$f(x)$	3	5'25	7'41	7'9401	7'994001	7'99940001

Decimos que cuando x *tiende* a 4 por la izquierda, $f(x)$ *tiende* a 8, y escribimos:

$$\text{Si } x \to 4^- \Rightarrow f(x) \to 8$$

En la tabla que figura a continuación observamos que, cuando damos a x valores próximos a 4 y superiores a 4, la función $f(x)$ se *aproxima* o *tiende* a 8:

x	5	4'5	4'1	4'01	4'001	4'0001
$f(x)$	15	11'25	8'61	8'0601	8'006001	8'00060001

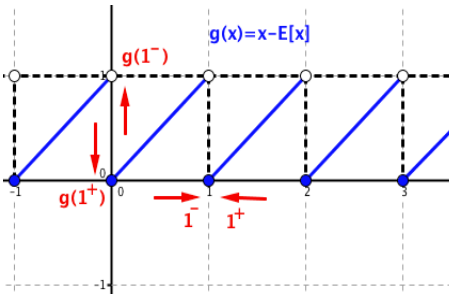
Decimos que cuando x *tiende* a 4 por la derecha, $f(x)$ *tiende* a 8, y escribimos:

$$\text{Si } x \to 4^+ \Rightarrow f(x) \to 8$$

En este ejemplo los dos valores que obtenemos al acercarnos a x = 4 por la derecha y por la izquierda coinciden, y podemos decir que, cuando x *tiende* a 4, $f(x)$ *tiende* a 8 y podemos escribir:

$$\text{Si } x \to 4 \Rightarrow f(x) \to 8$$

- *Estudiemos ahora el comportamiento de la función* $g(x) = x - E(x)$ en x = 1, donde $E(x)$ es la función "parte entera de x" que devuelve el mayor entero menor o igual que x.



La tabla siguiente nos muestra la tendencia por la izquierda:

x	0	0'5	0'9	0'99	0'999	0'9999	…
$g(x)$	0	0'5	0'9	0'99	0'999	0'9999	…

Decimos que cuando x *tiende* a 1 por la izquierda, $g(x)$ *tiende* a 1 y escribimos: $x \to 1^- \Rightarrow g(x) \to 1$

La tabla siguiente nos muestra la tendencia por la derecha:

x	1'9	1'5	1'1	1'01	1'001	1'0001	…
$g(x)$	0'9	0'5	0'1	0'01	0'001	0'0001	…

$$g(x) = \begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ x & \text{si} & x \in [0,1) \\ x-1 & \text{si} & x \in [1,2) \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Decimos que cuando x *tiende* a 1 por la derecha, $g(x)$ *tiende* a 0 y escribimos: $x \to 1^+ \Rightarrow g(x) \to 0$

Los valores no coinciden, y podemos decir que cuando ***x* tiende a 1, *g*(*x*) no *tiende*** a ningún valor.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

2. DEFINICIÓN DE LÍMITE

En el apartado anterior han aparecido palabras o expresiones tales como ***tiende a*** o ***se aproxima a***. Vamos a formalizar matemáticamente el significado de estas expresiones.

2.1. Definición matemática de límite

Se define **entorno** de centro a y radio δ, y se representa por $E(a,\delta)$, al intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$:

$$E(a,\delta)=\{x\in\mathbb{R};\ |x-a|<\delta\}$$

Se define **entorno reducido** de centro a y radio δ, y se representa por $E^*(a,\delta)$, al entorno $E(a,\delta)$ excepto el propio punto a:

$$E^*(a,\delta)=\{x\in\mathbb{R};\ 0<|x-a|<\delta\}$$

Hemos visto que la función $f(x)=x^2-2x$ tiende a 8 o tiene por límite 8, cuando x *tiende* a 4. La idea de **tendencia** o **aproximación** se traduce mediante los ***entornos*** como:

"Para cualquier $E(8,\varepsilon)$, podemos encontrar un entorno $E(4,\delta)$, de modo que para cualquier x del entorno reducido $E^*(4,\delta)$, se cumple que su imagen $f(x)$ está en el entorno $E(8,\varepsilon)$".

Sin embargo, $g(x)=x-E(x)$ no tiene límite en x = 1 porque no es posible definir un entorno único en el que a cualquier x del entorno reducido $E^*(1,\delta)$, su imagen $f(x)$ esté en un entorno fijo, ya que podríamos definir $E(1,\varepsilon)$ o $E(0,\varepsilon)$ a izquierda y derecha, respectivamente.

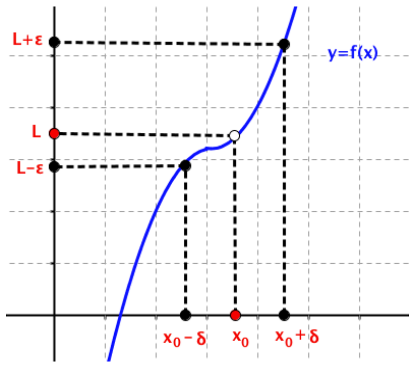
Podemos definir el límite de una función en un punto de la siguiente forma:

Una función $f(x)$ tiene por límite L cuando x tiende a x_0, y se representa como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ si para todo entorno $E(L,\varepsilon)$ existe un entorno $E(x_0,\delta)$, de modo que para todo x perteneciente al entorno reducido $E^*(x_0,\delta)$ se cumple que $f(x)$ pertenece al entorno $E(L,\varepsilon)$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\, E(L,\varepsilon), \exists\, E(x_0,\delta)\,;\ \forall\, x\in E(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in E(L,\varepsilon)$$

o también:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0;\ \text{si } 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$



Una función $f(x)$ que cumple esta definición decimos que es **convergente** en x_0.

Observamos que para que una función tenga límite en x_0 o sea convergente, no es necesario que la función esté definida en x_0, pues en la definición se habla de un entorno reducido de x_0.

Ejemplo

a) Halla el límite en el origen de la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x}$

Observamos que la función no existe en el origen, pero sí podemos hallar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)\cdot x}{(x+2)\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)}{(x+2)}=\frac{-2}{2}=-1$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

2.2. Límites laterales

Ejemplos

a) En el primer apartado hemos visto que la función $f(x)=x^2-2x$ tiende a 8 cuando x tiende a 4 por la izquierda. Podemos escribir: $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(x^2-2x\right)=8$

b) Asimismo, la función $g(x) = x - E(x)$ tiende a 1 cuando x tiende a 1 por la izquierda. Podemos escribir: $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x-E(x)\right)=1$

La idea de **tendencia por la izquierda** queda recogida mediante los entornos laterales a la izquierda de x_0 : $E^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,\ x_0)$

Una función $f(x)$ tiene por **límite** L cuando x tiende a x_0 **por la izquierda**, y se representa como

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

si para todo entorno $E(L,\varepsilon)$ existe un entorno lateral a la izquierda de x_0, $E^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,\ x_0)$, de modo que para todo x perteneciente a este entorno lateral, se verifica que $f(x)$ pertenece al entorno $E(L,\varepsilon)$:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\, E(L,\varepsilon), \exists\, E^-(x_0,\delta);\ \ \forall\, x\in E^-(x_0,\delta) \Rightarrow f(x)\in E(L,\varepsilon)$$

o también

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0;\ \text{si } 0<x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow \left| f(x)-L \right| <\varepsilon$$

Ejemplos

a) En el mismo epígrafe hemos visto que la función $f(x)=x^2-2x$ tiende a 8 cuando x tiende a 4 por la derecha. Podemos escribir: $\lim\limits_{x\to 4^+}(x^2-2x)=8$

b) Asimismo, la función $g(x) = x - E(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a uno por la derecha. Podemos escribir: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x-E(x)\right)=0$

La idea de **tendencia por la derecha** queda recogida mediante los entornos laterales a la derecha de x_0 : $E^+(x_0,\delta)=(x_0,\ x_0+\delta)$

Una función $f(x)$ tiene por **límite** L cuando x tiende a x_0 **por la derecha**, y se representa como

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

si para todo entorno $E(L,\varepsilon)$ existe un entorno lateral a la derecha de x_0, $E^-(x_0,\delta)=(x_0,\ x_0+\delta)$, de modo que para todo x perteneciente a este entorno lateral, se verifica que $f(x)$ pertenece al entorno $E(L,\varepsilon)$:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\, E(L,\varepsilon), \exists\, E^+(x_0,\delta);\ \ \forall\, x\in E^+(x_0,\delta) \Rightarrow f(x)\in E(L,\varepsilon)$$

o también

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0;\ \text{si } 0<x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow \left| f(x)-L \right| <\varepsilon$$

Es interesante notar que para que una función tenga límites laterales en x_0 no es necesario que la función esté definida en ese punto.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

La condición necesaria y suficiente para que una función $f(x)$ tenga límite en un punto x_0 es que tenga límite lateral por la izquierda y límite lateral por la derecha, siendo ambos coincidentes.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Ejemplos

a) Observamos que la función $f(x) = x^2 - 2x$ tiene límite lateral por la izquierda y límite lateral por la derecha cuando x tiende a 4, siendo ambos iguales a 8, por lo que el límite de la función, cuando x tiende a 4, existe y vale 8:

$$\lim_{x \to 4} (x^2 - 2x) = 8$$

Sin embargo, la función $g(x) = x - E(x)$ no tiene límite cuando x tiende a 1, puesto que aunque existen los límites laterales cuando x tiende a 1, no son coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (x - E(x)) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x - E(x)) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} (x - E(x))$$

Si una función tiene límite en un punto, éste es único.

Ejemplo

a) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Halla los límites laterales en $x = -1$, en $x = 0$ y en $x = 1$.

(1) Analizamos el punto $x = -1$: Los valores en torno a $x = -1$ no presentan problema alguno, se evalúan con el primer trozo de la función, y es seguro que:

$$\lim_{x \to -1^-} (x^2 + 2x) = \lim_{x \to -1^+} (x^2 + 2x) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1$$

Por tanto, existe el límite en $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} f(x) = -1$$

(2) Analizamos el origen utilizando en cada caso el trozo de función adecuado:

$$\lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} (x^2 - x) = 0$$

Por tanto, existe el límite en el origen:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

aunque la función no existe en el origen.

(3) Analizamos el punto $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} (x^2 - x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} (x^2 + x) = 2$$

Por tanto, no existe el límite en $x = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ aunque la función sí existe en el punto $x = 1$.

3. OPERACIONES CON LÍMITES

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones convergentes en el punto x_0, cuyos límites son:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = M$$

Se tiene:

$$\lim_{x\to x_0}[f \pm g](x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L \pm M$$

$$\lim_{x\to x_0}[k \cdot f](x) = k \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = k \cdot L \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0}[f \cdot g](x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L \cdot M$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{si} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = L^M$$

$$\text{si} \lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

Estas expresiones son válidas también en el caso de límites en el infinito, por tanto:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f \pm g](x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\pm\infty} g(x)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[k \cdot f](x) = k \cdot \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f \cdot g](x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\pm\infty} g(x)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)}$$

$$\text{si} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \neq 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to\pm\infty} g(x) \neq 0$$

En el cálculo de límites, es necesario operar con expresiones donde aparece infinito. Estas son algunas expresiones cuyos resultados son conocidos:

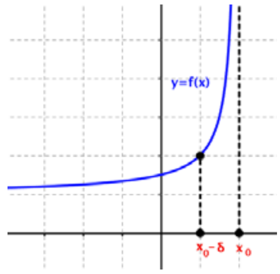
SUMA Y RESTA	PRODUCTO	COCIENTE	POTENCIA
$(+\infty)+k=+\infty$ $(-\infty)+k=-\infty$	$k\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty & \text{si } k>0\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases}$	$\frac{k}{+\infty}=\frac{k}{-\infty}=0$	$k^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & \text{si } k>1\\ 0 & \text{si } 0\le k<1\end{cases}$
$(+\infty)-k=+\infty$ $(-\infty)-k=-\infty$	$k\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty & \text{si } k>0\\ +\infty & \text{si } k<0\end{cases}$	$\frac{0}{+\infty}=\frac{0}{-\infty}=0$	$k^{-\infty}=\begin{cases}0 & \text{si } k>1\\ +\infty & \text{si } 0\le k<1\end{cases}$
$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ $-(-\infty)=+\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$ $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$	$\frac{k}{0}=\begin{cases}+\infty & \text{si } k>0\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases}$ $\frac{+\infty}{0}=+\infty \quad \frac{-\infty}{0}=-\infty$	$(+\infty)^k=\begin{cases}+\infty & \text{si } k>0\\ 0 & \text{si } k<0\end{cases}$ $(+\infty)^{+\infty}=+\infty \quad (+\infty)^{-\infty}=0$

Es importante entender que el álgebra del infinito es diferente a la de los números reales y mientras trabajamos con infinitos las cosas no suelen ser cómo parecen.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

4. LÍMITES INFINITOS

4.1. Límites infinitos en un punto finito



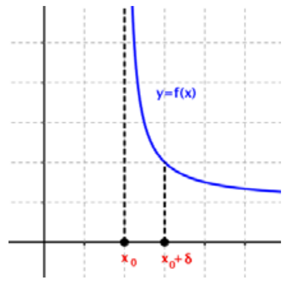
Observamos en la figura adjunta que, a medida que nos aproximamos a x_0 por la izquierda, los valores correspondientes que toma la función son cada vez mayores.

Afirmamos que cuando x tiende a x_0 por la izquierda, $f(x)$ tiende a +∞:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

Una función $f(x)$ tiene por límite +∞ cuando x tiende a x_0 por la izquierda si para todo número real K existe un entorno lateral a la izquierda de x_0, $E^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$, de modo que, para todo x que pertenece a este entorno, se verifica que $f(x)$ es mayor que K.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0; \forall x \in E^-(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) > K$$



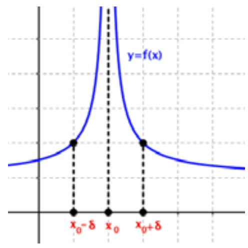
En esta figura observamos que, a medida que nos aproximamos a x_0 por la derecha, los valores correspondientes que toma la función son cada vez mayores.

Afirmamos que cuando x tiende a x_0 por la derecha, $f(x)$ tiende a +∞:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

Una función $f(x)$ tiene por límite +∞ cuando x tiende a x_0 por la derecha si para todo número real K existe un entorno lateral a la derecha de x_0, $E^+(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$, de modo que, para todo x que pertenece a este entorno, se verifica que $f(x)$ es mayor que K.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0; \forall x \in E^+(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) > K$$



En la figura de la derecha vemos que a medida que nos aproximamos a x_0 los valores correspondientes que toma la función son cada vez mayores.

Afirmamos que cuando x tiende a x_0, $f(x)$ tiende a +∞:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

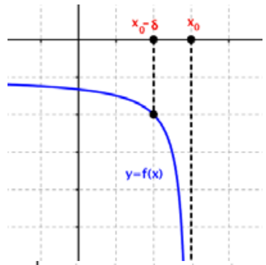
Una función $f(x)$ tiene por límite +∞ cuando x tiende a x_0 si para todo número real K existe un entorno reducido de x_0, $E^*(x_0,\delta)$, de modo que, para todo x que pertenece a este entorno, se verifica que $f(x)$ es mayor que K.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0; \forall x \in \mathrm{E}^*(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) > K$$

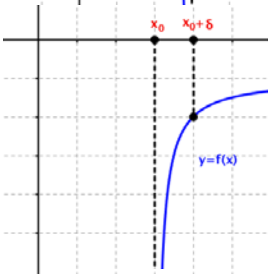
En el caso de que al aproximarnos a x_0 la función tome valores cada vez menores, tanto si nos aproximamos por la izquierda, por la derecha o por los dos lados a la vez, decimos que la función tiende a –∞.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

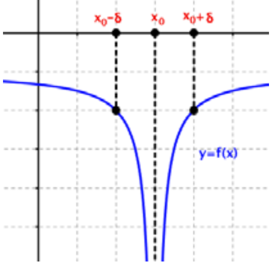
En este caso, las figuras y definiciones correspondientes a estos tres casos son:



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, \delta > 0;\ \forall\, x \in E^-(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < M$$



$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, \delta > 0; \forall x \in \mathrm{E}^+(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < M$$



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, \delta > 0;\ \forall\, x \in \mathrm{E}^*(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < M$$

Cuando existe alguno de los seis límites que figuran en este apartado, decimos que la función $f(x)$ tiene una **asíntota vertical** de ecuación $x = x_0$.

Algunas funciones que generan asíntotas verticales son:

1. El cociente de funciones:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f}{g}\right](x) = \pm\infty \quad \text{si} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

   en las que se incluyen las trigonométricas como $\mathrm{tg}(x)$, $\sec(x)$, $\mathrm{cosec}\,(x)$, y $\mathrm{cotg}(x)$, ya que son cocientes por definición.

2. La función logarítmica:

$$\lim_{x\to x_0} \ln(f(x)) = -\infty \quad \text{si} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

OJO: No existen la división entre cero ni el logaritmo de cero. Hablamos de que **el límite** cuando el denominador o el argumento **tienden a cero** es infinito.

Ejemplo

a) Halla las asíntotas verticales de la función $f(x) = \ln(2x-1)$

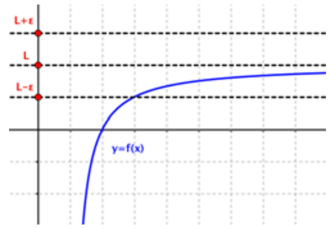
Como se explicó, la función logarítmica tiene una asíntota vertical cuando su argumento es nulo, por tanto:

$$\lim_{x\to x_0} \ln(2x-1) = -\infty \quad \text{si} \quad \lim_{x\to x_0}(2x-1) = 0 \Rightarrow x \to \tfrac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \tfrac{1}{2}$$ es una asíntota vertical

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

4.2. Límites finitos en el infinito

Observamos en la figura de la derecha que, para valores positivos muy grandes de x, los correspondientes valores que toma la función se aproximan cada vez más hacia un valor L.

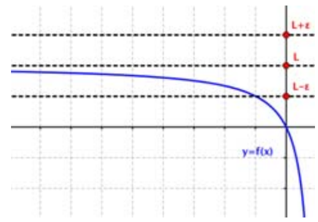


Afirmamos que, cuando x tiende a $+\infty$, $f(x)$ tiende a L.

Una función $f(x)$ tiene por límite un número real L, cuando x tiende a $+\infty$, y se escribe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, si para todo ε positivo, existe un número real K, de modo que, para cualquier valor de x mayor que K, se verifica que $f(x)$ está en el entorno $E(L, \varepsilon)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, K \in \mathbb{R};\ \text{si } x > K \Rightarrow f(x) \in E(L, \varepsilon)$$

En la figura de la derecha observamos que, para valores negativos *muy grandes* en valor absoluto de x, los correspondientes valores que toma la función se aproximan cada vez más hacia un valor L.



Afirmamos que, cuando x tiende a $-\infty$, $f(x)$ tiende a L.

Una función $f(x)$ tiene por límite un número real L, cuando x tiende a $-\infty$, y se escribe $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, si para todo ε positivo, existe un número real M, de modo que, para cualquier valor de x menor que M, se verifica que $f(x)$ está en el entorno $E(L, \varepsilon)$.

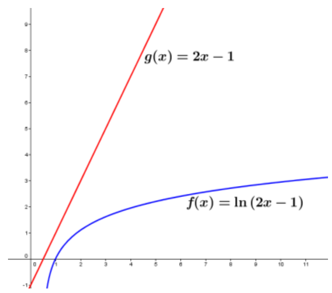
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R};\ \text{si } x < M \Rightarrow f(x) \in E(L, \varepsilon)$$

Cuando existe alguno de los límites anteriores decimos que la función $f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** de ecuación $y = L$.

Ejemplo

a) Halla las asíntotas horizontales, si existen, de la función $f(x) = \dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}$

Sabemos que el dominio de la función logarítmica son únicamente los reales positivos, así que la función sólo puede tener asíntota horizontal en $+\infty$. Además, en la gráfica adjunta:



vemos que la función polinómica del denominador $(2x - 1)$ crece mucho más rápidamente que la logarítmica, de modo que cuando x tiende a infinito, el cociente tiende a cero:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Asíntota horizontal} \quad y = 0$$

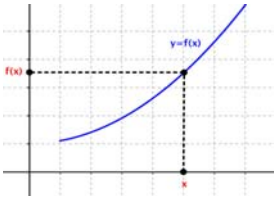
En el apartado siguiente veremos cómo hallar límites como el anterior de forma más simple.

4.3. Límites infinitos en el infinito

Cuando hablamos de límites infinitos en el infinito nos encontramos con cuatro posibilidades:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la función tiende a más infinito cuando x tiende a más infinito.

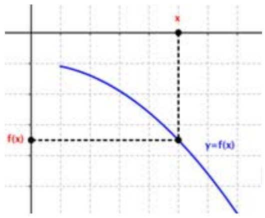
  Una función $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$ si para todo número real K, existe un número real M, tal que, para cualquier x mayor que M, se verifica que $f(x)$ es mayor que K.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\ K \in \mathbb{R}, \exists\ M \in \mathbb{R}; \forall\ x > M \Rightarrow f(x) > K$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, la función tiende a menos infinito cuando x tiende a más infinito.

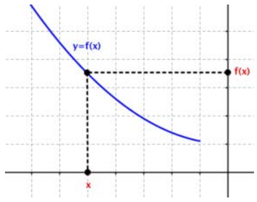
  Una función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $+\infty$ si para todo número real K, existe un número real M, tal que, para cualquier x mayor que M, se verifica que $f(x)$ es menor que K.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, \exists\ M \in \mathbb{R};\ \forall\ x > M \Rightarrow f(x) < K$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, la función tiende a más infinito cuando x tiende a menos infinito.

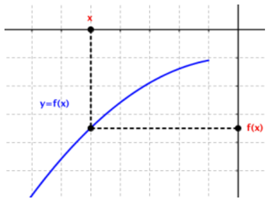
  Una función $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $-\infty$ si para todo número real K, existe un número real M, tal que, para cualquier x menor que M, se verifica que $f(x)$ es mayor que K.



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\ K \in \mathbb{R}, \exists\ M \in \mathbb{R};\ \forall\ x < M \Rightarrow f(x) > K$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, la función tiende a menos infinito cuando x tiende a menos infinito.

  Una función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $-\infty$ si para todo número real K, existe un número real M, tal que, para cualquier x menor que M, se verifica que $f(x)$ es menor que K.



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\ K \in \mathbb{R}, \exists\ M \in \mathbb{R};\ \forall x < M \Rightarrow f(x) < K$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

5. CÁLCULO DE LÍMITES

5.1. Límites sencillos

El proceso de cálculo de un límite a partir de la definición es muy complejo, así que en la práctica bastará con sustituir la variable por el valor al que tiende y operar, obteniendo un resultado que podrá ser un valor **finito**, **infinito** o **indeterminado**.

Ejemplos

a) Calcula los siguientes límites:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}=\dfrac{\ln(2\cdot 1-1)}{2\cdot 1-1}=\dfrac{\ln 1}{1}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2x-1}=\dfrac{\cos 0}{2\cdot 0-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}=\dfrac{\ln(2\cdot 1-1)}{2\cdot 1-1}=\dfrac{\ln 1}{1}=0$

Sin embargo, existen casos en los que debemos tener cuidado.

5.2. Límites en los que se anula el denominador

Ya vimos anteriormente que este tipo de límite genera un infinito, pero no sabemos si será positivo o negativo. Debemos, por tanto, estudiar los límites laterales fijándonos sobre todo en los signos. Si los límites laterales son distintos, diremos que no existe el límite pedido.

Ejemplos

a) Calcula los siguientes límites:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{1+2}{1-1}=\dfrac{3}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x-1}=\pm\infty$

  Debemos hallar los límites laterales para ver si existe el límite de la función en ese punto.

  Límite por la derecha: Tomamos valores próximos a 2, pero mayores que 2.

  $$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{+0}=+\infty$$

  donde por "+0" representamos un número positivo muy cercano a cero $(+0'000\ldots001)$.
  Límite por la izquierda: Tomamos valores próximos a 2, pero menores que 2.

  $$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{-0}=-\infty$$

  donde por "– 0" representamos un número negativo muy cercano a cero $(-0'000\ldots001)$.

  Como los límites laterales no coinciden, diremos que no existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x-1}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x^2}=\dfrac{0+2}{0^2}=\dfrac{2}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2}=\pm\infty$

  Este caso es diferente al anterior, sabemos que x^2 es una función siempre positiva, así que:

  $$\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x^2}=\frac{0+2}{0^2}=\frac{2}{+0}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2}=+\infty$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

5.3. Límites en el infinito

Para resolver límites en el infinito es necesario conocer cómo se comportan las funciones más comunes para valores muy grandes de la variable x. Muchas de ellas ya se explicaron en cursos anteriores al estudiar el comportamiento de estas funciones.

Funciones potenciales:

Llamamos funciones potenciales a aquellas de la forma $f(x) = x^n$, siendo n un número real. Para ellas:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n>0 \\ 1 & \text{si} \quad n=0 \\ 0 & \text{si} \quad n<0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n>0 \text{ y } n \text{ par} \\ -\infty & \text{si} \quad n<0 \text{ y } n \text{ impar} \\ 1 & \text{si} \quad n=0 \\ 0 & \text{si} \quad n<0 \end{cases}$$

Ejemplos

a) $\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ porque $n = 4 > 0$

b) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ porque $n = 2 > 0$ y par

c) $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ porque $n = 3 > 0$

d) $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ porque $n = 3 > 0$ e impar

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} x^{-5} = 0$ porque $n = –5 < 0$

f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} x^{-3} = 0$ porque $n = –3 < 0$

g) $\lim_{x\to+\infty} x^{-1} = 0$ porque $n = –1 < 0$

h) $\lim_{x\to-\infty} x^0 = 1$

Funciones exponenciales:

Llamamos funciones potenciales a aquellas de la forma $f(x) = a^x$, siendo a un número real. Para ellas:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a>1 \\ 0 & \text{si} \quad 0<a<1 \\ \text{no existe} & \text{si} \quad a<0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a>1 \\ +\infty & \text{si} \quad 0<a<1 \\ \text{no existe} & \text{si} \quad a<0 \end{cases}$$

Ejemplos

a) $\lim_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$ porque $a = 3 > 1$

b) $\lim_{x\to-\infty} 3^x = 0$ porque $a = 3 > 1$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = 0$ porque $a = \frac{1}{4} \in (0,1)$

d) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = +\infty$ porque $a = \frac{1}{4} \in (0,1)$

e) $\lim_{x\to+\infty} (-2)^x$ no existe

f) $\lim_{x\to-\infty} (-2)^x$ no existe

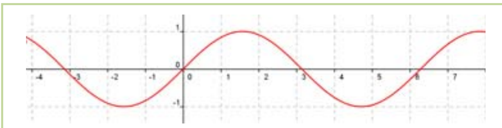
Función logarítmica:

De la función logarítmica es imprescindible conocer los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$$

Funciones trigonométricas:

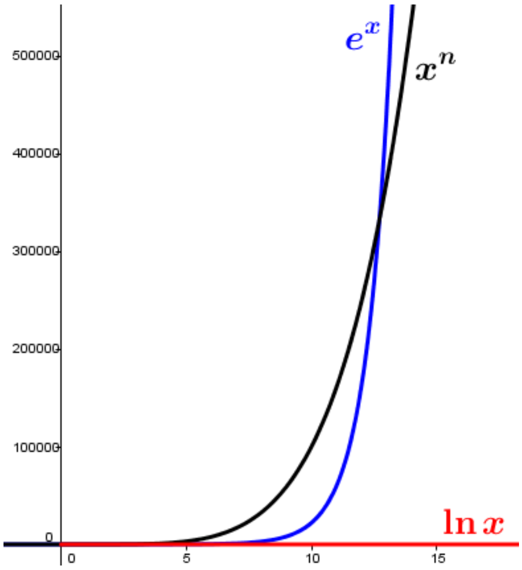
Ninguna de las funciones trigonométricas tiene límite definido en el infinito por su carácter oscilante.



No podemos cometer el error de pensar que todos los infinitos que nos aparecen al calcular un límite son iguales. Si una función viene expresada mediante operaciones elementales de funciones de diferentes tipos, debemos saber cuál es el **término dominante** del límite planteado, es decir, qué término crece más rápidamente que los demás y determina el valor del límite:

Exponencial > Polinómica > Logarítmica > Constantes

Esta relación se aprecia en la gráfica siguiente:



en la que vemos cómo para valores *grandes* de x la exponencial domina frente a la potencial (en este caso, x^5).

Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x^2+x-3\right)=+\infty$ porque el término dominante en un polinomio es el de mayor grado:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 >> \lim_{x\to+\infty} x^2 >> \lim_{x\to+\infty} x >> \lim_{x\to+\infty} 3$$

es decir, los términos de menor grado son despreciables y, por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-2x^2+x-3\right)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^x-x^5\right)=+\infty$ porque aunque el $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=-\infty$, se verifica que:

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x >> \lim_{x\to+\infty} x^5$$

y el término potencial es **despreciable** frente al exponencial. Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^x-x^5\right)=\lim_{x\to+\infty} 2^x=+\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4-3x^3+x^2+x-5}{x^5-3x^2-1}=0$ porque los términos dominantes del numerador y denominador son x^4 y x^5, respectivamente, y los demás son despreciables frente a ellos. Entonces:

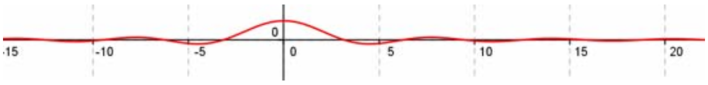
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-3x^3+x^2+x-5}{x^5-3x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+\ldots}{x^5+\ldots}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

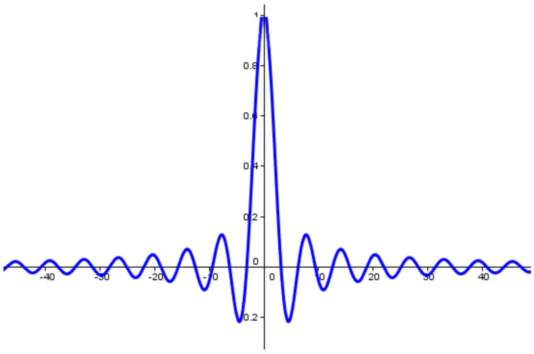
Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+2x^4-x-5}{2x^5+x^4+x^3+x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+\ldots}{2x^5+\ldots} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5}{2x^5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ porque aunque no existe el límite de la función seno, sabemos que es un número comprendido entre cero y uno y el término del denominador tiende a infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\text{número acotado}}{\infty} = 0$$





En la gráfica se aprecia lo que hemos *demostrado* algebraicamente. En la primera gráfica la escala es la misma, y en la segunda, la escala del eje de ordenadas es el intervalo $[-0{,}2\,,1]$ y cuando $x > 50$ el valor de los máximos de la función es muy próximo a cero, por ejemplo:

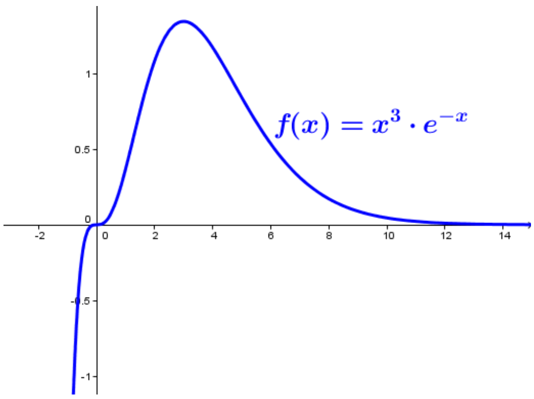
$$f(20{,}5\,\pi) = \frac{\operatorname{sen}(20{,}5\,\pi)}{20{,}5\,\pi} = 0{,}01552731\ldots$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 \cdot e^{-x}\right) = 0$ porque reescribiendo el límite como:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^3 e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}$$

el término exponencial crece mucho más rápidamente que el potencial. Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^3 e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{\infty\ \textit{débil}}{\infty\ \textit{fuerte}} = 0$$



A la inversa, tendremos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = \frac{\infty\ \textit{fuerte}}{\infty\ \textit{débil}} = +\infty$$

En otros casos, los resultados que obtenemos no nos permiten determinar si un límite existe y cuál es su resultado, o si no existe. Estos casos se denominan **indeterminaciones**.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

6. INDETERMINACIONES

Existen siete indeterminaciones básicas:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{+\infty},\ \infty^0 \text{ y } 0^0$$

En esta sección veremos algunas técnicas de resolución, pero existen casos para los que necesitaremos herramientas que estudiaremos en el capítulo siguiente.

6.1. Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Resolveremos estas indeterminaciones analizando los términos dominantes tanto del numerador como del denominador.

Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2}{\sqrt{3x+1}}=\dfrac{\infty}{\infty}$

El numerador tiene grado 2, y el denominador tiene grado ½, por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{\sqrt{3x+\ldots}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{\sqrt{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{\sqrt{3}\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{3}}x^{3/2}=+\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{4x+2}$

Como antes:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{2/3}}{4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{2/3-1}}{4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-1/3}}{4}=\frac{0}{4}=0$$

6.2. Indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$

Aparecen al calcular límites de funciones con diferencia de cociente de polinomios o diferencia de radicales, y pueden resolverse desarrollando la resta convenientemente o multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada, respectivamente.

Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+4}-\dfrac{2x^3}{x^2+1}\right)$

Observamos qué tipo de indeterminación aparece: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+4}-\dfrac{2x^3}{x^2+1}\right)=\infty-\infty$

Desarrollamos la resta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+4}-\frac{x^3}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x^2+1)\cdot(x^2-1)-x^3\cdot(x+4)}{(x+4)\cdot(x^2+1)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4-1-x^4-4x^3}{x^3+x+4x^2+4}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^3-1}{x^3+4x^2+x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^3-\ldots}{x^3+\ldots}=-4$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+3}\right)$

Observamos qué tipo de indeterminación aparece: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+3}\right)=\infty-\infty$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-2\right)-\left(x^2+3\right)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\infty+\infty}=\frac{-5}{\infty}=0$$

6.3. Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

En ese tema sólo resolveremos aquellas que aparecen al calcular límites con funciones polinómicas o funciones irracionales. En ambos casos se intentará simplificar la fracción, normalmente factorizando el numerador y el denominador mediante la Regla de *Ruffini* o usando igualdades notables.

Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

En primer lugar, veamos si existe alguna indeterminación.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{2^2-3\cdot 2+2}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

Factorizamos los polinomios del numerador y el denominador y simplificamos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\dots$$

Calculamos el límite de la expresión resultante:

$$\dots=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}$

En primer lugar, veamos si existe alguna indeterminación.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}=\frac{3^2-9}{\sqrt{3-3}}=\frac{0}{0}$$

Realizamos las siguientes transformaciones:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)^{1/2}}=\lim_{x\to 3}(x+3)\cdot(x-3)^{1/2}=\lim_{x\to 3}(x+3)\sqrt{x-3}=\dots$$

Calculamos el límite de la expresión resultante:

$$\dots=(3+3)\sqrt{3-3}=6\cdot 0=0$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

6.4. Indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$

Se resuelven transformándolas en las del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o en las del tipo $\frac{0}{0}$.

Ejemplo

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5 \cdot e^{-x^2}\right) = \infty \cdot 0$

Reescribiendo el límite como:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^5 e^{-x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{e^{x^2}}$$

ya vimos que el término exponencial es **dominante** frente al potencial. Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^5 e^{-x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{e^{x^2}} = 0$$

6.5. Indeterminaciones del tipo 1^∞

Aparecen si la función es de la forma:

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. En este caso, se verifica que:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Demostración

En efecto, sabemos que el número e se define como:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Se trata de reproducir la forma del límite "e" con nuestro límite original, así que operamos añadiendo los términos necesarios:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a}[1+f(x)-1]^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{1/[f(x)-1]}\right]^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{1/[f(x)-1]}\right]^{g(x)\frac{f(x)-1}{f(x)-1}}$$

Ya sólo nos queda reestructurar el exponente:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{1/[f(x)-1]}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}g(x)[f(x)-1]} = \left(\lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{1/[f(x)-1]}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)[f(x)-1]}$$

El límite entre paréntesis es el número e, por tanto:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

A la hora de resolver la indeterminación podemos reproducir estos pasos o utilizar directamente la fórmula.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+x}\right)^{2x+1}$

Observamos qué tipo de indeterminación aparece:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+x}\right)^{2x+1}=1^{\infty}$$

Aplicando la fórmula:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

- Calculamos $f(x)-1$:

$$f(x)-1=\frac{x^2-3}{x^2+x}-1=\frac{x^2-3-\left(x^2+x\right)}{x^2+x}=\frac{x^2-3-x^2-x}{x^2+x}=\frac{-x-3}{x^2+x}$$

- Calculamos $g(x)\cdot[f(x)-1]$:

$$g(x)\cdot[f(x)-1]=(2x+1)\cdot\frac{-x-3}{x^2+x}=\frac{(2x+1)\cdot(-x-3)}{x^2+x}=\frac{-2x^2-6x-x-3}{x^2+x}=\frac{-2x^2-7x-3}{x^2+x}$$

- De aquí:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+x}\right)^{2x+1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^2-7x-3}{x^2+x}\right)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{-x^2+2}$

Observamos qué tipo de indeterminación aparece: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{-x^2+2}=1^{-\infty}$

Aplicando la fórmula de nuevo:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

- Calculamos $f(x)-1$:

$$f(x)-1=\frac{x+1}{x-3}-1=\frac{x+1-(x-3)}{x-3}=\frac{x+1-x+3}{x-3}=\frac{4}{x-3}$$

- Calculamos $g(x)\cdot[f(x)-1]$:

$$g(x)\cdot[f(x)-1]=\left(-x^2+1\right)\cdot\frac{4}{x-3}=\frac{4\left(-x^2+1\right)}{x-3}=\frac{-4x^2+4}{x-3}$$

- De aquí:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{-x^2+2}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^2+4}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x)}=e^{+\infty}=+\infty$$

Sin embargo:

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-5}{x+7}\right)^{-x+3}=2^{-\infty}=0$, no es una indeterminación.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x+1}{x-2}}=1^2=1$, no es una indeterminación.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

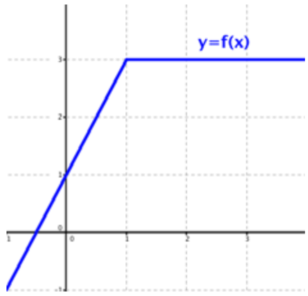
7. CONTINUIDAD

Ya apareció varias veces a lo largo de la ESO la idea intuitiva de continuidad:

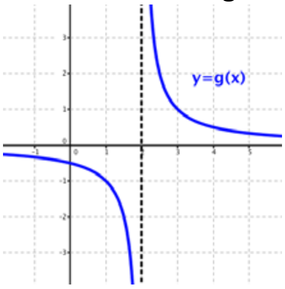
La función $f(x)$ se puede dibujar, en el entorno de $x=1$, **sin levantar el lápiz del papel**.

De manera más formal, observamos que **la función existe** en el punto $x=1$, **tiene límite** cuando x tiende a 1, y que el valor de este **límite coincide con el valor de la función** en $x=1$.

Si se cumplen estas tres condiciones, afirmamos que esta función es continua en $x=1$.



Analicemos ahora algunos contraejemplos:

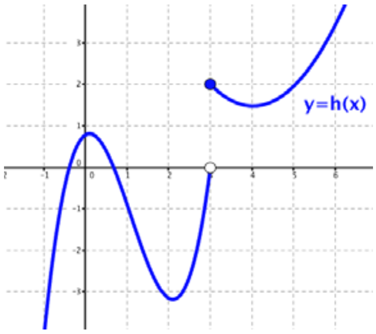


La función $g(x)$ no se puede dibujar en un entorno de $x=2$ sin levantar el lápiz del papel.

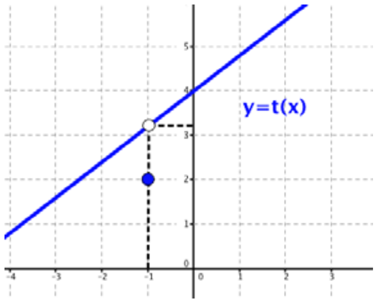
Esta función no tiene límite finito en $x=2$ y tampoco está definida en ese punto.

Afirmamos que $g(x)$ no es continua en $x=2$.

La función $h(x)$ no es continua en $x=3$, pues no existe el límite cuando x tiende a 3, aunque sí está definida en $x=3$.



La función $t(x)$ no es continua en $x=-1$, pues, aunque existen el límite y el valor de la función, ambos no coinciden.



La idea de poder dibujar la gráfica de una función en un entorno de un punto sin levantar el lápiz del papel, o la de una función continua en ese punto se matematiza a través del concepto de límite.

Una función $y=f(x)$ es **continua en un punto** $x=x_0$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. Existe $f(x_0)$, es decir, $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f(x)$
2. Existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, es decir, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
3. Los dos valores anteriores coinciden. $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

7.1. Operaciones con funciones continuas

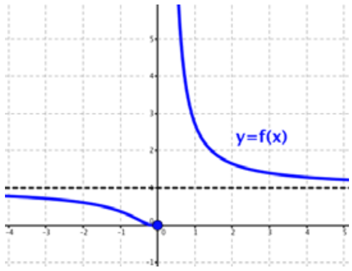
Si f y g son dos funciones continuas en $x = x_0$, se verifica:

- $f + g$ es continua en x_0
- $f - g$ es continua en x_0
- $k \cdot f$ es continua en x_0, $\forall\, k \in \mathbb{R}$
- $f \cdot g$ es continua en x_0
- f/g es continua en x_0, siempre que $g(x_0) \neq 0$

7.2. Continuidad lateral

La función $y = f(x)$ no es continua en $x = 0$, sin embargo, tiene límite finito cuando x tiende a 0 por la izquierda y coincide con el valor que toma la función en $x = 0$.

Por esta razón, afirmamos que esta función es continua por la izquierda en $x = 0$.



Una función es **continua por la izquierda** en un punto de abscisa x_0 si existe límite por la izquierda en ese punto y coincide con el valor de la función en x_0:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

De la misma manera, se dice que una función es **continua por la derecha** en un punto de abscisa x_0 si existe límite por la derecha en ese punto y coincide con el valor de la función en x_0:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

7.3. Continuidad en un intervalo

Una función $y = f(x)$ es **continua en un intervalo abierto** (a,b) si y sólo si es continua en todos los puntos de dicho intervalo

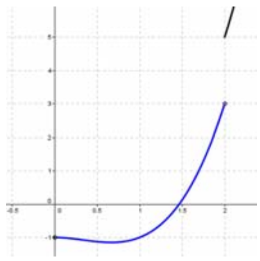
Una función $y = f(x)$ es **continua en un intervalo cerrado** $[a,b]$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- f es continua en el intervalo abierto (a,b)
- f es continua por la derecha en $x = a$
- f es continua por la izquierda en $x = b$

Ejemplo

La función a la derecha es continua en el intervalo $[0,2]$ (tramo de color azul).

Vemos que es discontinua en $x = 2$, que continúa cuando $x > 2$ (línea negra) y que no existe en $\mathbb{R}^-$.



Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

Las **funciones elementales** son continuas en sus respectivos dominios de definición:

- Las **funciones polinómicas** son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones racionales** no son continuas en los puntos que anulan el denominador.
- Las **funciones con radicales** con índice par no existen en los valores que hacen el radicando negativo. Si el índice es impar, son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones exponenciales** son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las **funciones logarítmicas** no son continuas en los puntos en los que la expresión de la que queremos hallar el logaritmo se convierte en cero o en un número negativo.
- De las **funciones trigonométricas** no son continuas aquellas que implican un cociente, es decir:
    - La tangente y secante, que no son continuas en los puntos en los que se anula el coseno ($\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$),
    - La secante y cotangente, que no son continuas en los puntos en los que se anula el seno ($\alpha = k \cdot \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$).

7.4. Tipos de discontinuidad

Una función que **no** es continua en un punto de abscisa x_0, decimos que es discontinua en ese punto.

Dependiendo de la condición o condiciones de continuidad que fallen, podemos clasificar las discontinuidades en:

1. Discontinuidad evitable

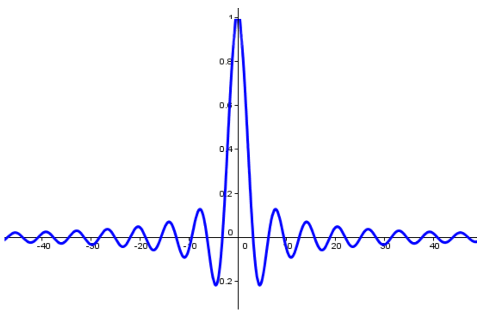
Una función presenta una **discontinuidad evitable en un punto** de abscisa x_0 cuando se produce una de estas situaciones:

- El límite de la función en x_0 existe y es finito pero no coincide con el valor de la función en x_0.
- La función no está definida en x_0.

Esta discontinuidad se evita redefiniendo la función en x_0, haciendo que en este punto tome el valor del límite.

Ejemplo

a) Ya vimos cómo se comporta la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ en el infinito. Analicemos ahora qué ocurre en el punto $x = 0$.



Vemos en la gráfica, o bien dando valores cercanos a $x = 0$, que la función tiende a 1 cuando x tiende a 0.

Por tanto, existe el límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ y podemos redefinir la función como: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ para convertirla en continua.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

2. Discontinuidad no evitable

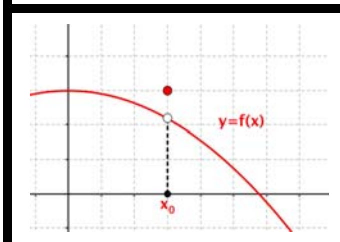
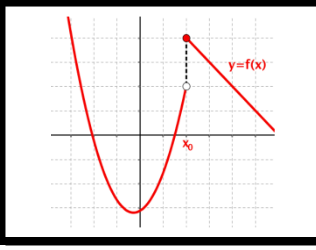
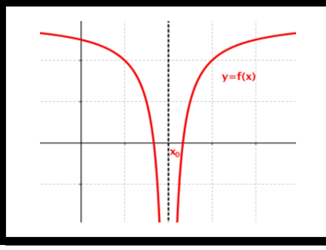
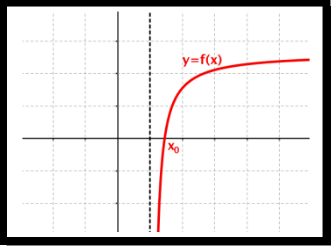
Una función presenta una **discontinuidad no evitable en un punto** cuando no existe el límite en ese punto. Podemos distinguir dos casos:

- ***Discontinuidad de primera especie***: cuando existen los límites laterales pero son distintos, por lo que no existe el límite de la función.

  Los límites laterales pueden ser ambos finitos y se tratará de una discontinuidad de primera especie de ***salto finito***, o puede ser que uno o los dos límites laterales sean infinitos, tratándose de una discontinuidad de primera especie de ***salto infinito***.

- ***Discontinuidad de segunda especie***: se da cuando uno o los dos límites laterales no existen.

Podemos resumir los tipos de discontinuidad con la siguiente tabla:

<table>
<tr><th rowspan="3">DISCONTINUIDAD EVITABLE</th><th colspan="3">DISCONTINUIDAD NO EVITABLE</th></tr>
<tr><th colspan="2">1ª ESPECIE</th><th rowspan="2">2ª ESPECIE</th></tr>
<tr><th>Salto finito</th><th>Salto infinito</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

7.5. Teoremas de las funciones continuas

De forma intuitiva es fácil comprobar que se verifican los siguientes teoremas, pero su demostración puede ser muy complicada:

Teorema de la conservación del signo

Si una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno de $x = a$, en el cual la función tiene el mismo signo que $f(a)$.

Teorema de la acotación

Si una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$, entonces existe un entorno de $x = a$, en el cual la función está acotada.

Teorema de Bolzano

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y en los extremos del mismo toma valores de signo contrario, entonces existe un punto en el interior de dicho intervalo en el cual la función se anula.

Teorema de Darboux

Si una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ y n es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto c del interior del intervalo en el que $f(c) = n$.

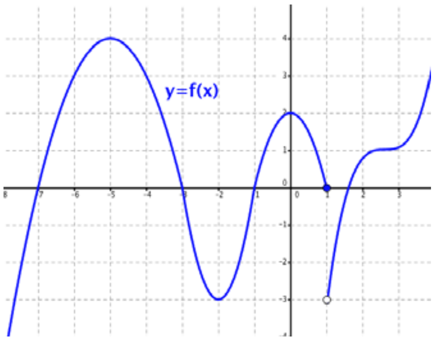
Teorema de Weierstrass

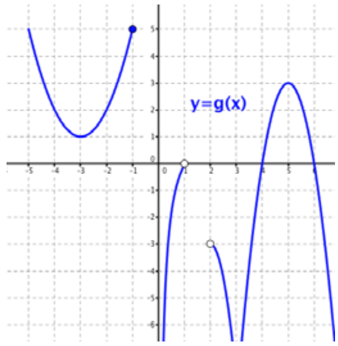
Si una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ entonces alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

Actividades resueltas

1. – Determina, en las siguientes funciones, los datos pedidos:





$f(-6)$ $\quad f(-3)$ $\quad f(-2)$ $\quad f(0)$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} g(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 2,5} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 2} g(x)$

Respuestas:

$f(-6)=3$ $\quad f(-3)=0$ $\quad f(-2)=-3$ $\quad f(0)=2$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} g(x)=-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=-3$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x)=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ $\quad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x)=1$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ $\quad \nexists \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-3$ $\quad \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 2,5} f(x)=1$ $\quad \nexists \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ $\quad \nexists \lim\limits_{x\to 2} g(x)$

2. – Utiliza la definición de límite para demostrar:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+3}{2}=3$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \left(x^2-6x+8\right)=-1$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{7x}{x+4}=3$

Respuestas:

La definición de límite es:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \ /\ \text{si } 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

así que se trata de trabajar con desigualdades intentando acotar $|f(x)-L|$ a partir de $|x-3|<\delta$.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+3}{2}=3 \Rightarrow |f(x)-L| = \left|\dfrac{x+3}{2}-3\right| = \left|\dfrac{x+3-6}{2}\right| = \left|\dfrac{x-3}{2}\right| = \dfrac{|x-3|}{2} < \dfrac{\delta}{2}$

por tanto, haciendo $\varepsilon=\frac{\delta}{2}$ se verifica la definición.

b) $\lim\limits_{x\to 3} \left(x^2-6x+8\right)=-1 \Rightarrow |f(x)-L| = \left|\left(x^2-6x+8\right)-(-1)\right| = \left|x^2-6x+9\right|$

Es fácil ver que el trinomio es un cuadrado perfecto, por tanto:

$$|f(x)-L| < \left|(x-3)^2\right| = |x-3|^2 = \delta^2$$

por tanto, haciendo $\varepsilon=\delta^2$ se verifica la definición.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

c) $\lim_{x\to 3}\frac{7x}{x+4}=3 \Rightarrow \left|f(x)-L\right|=\left|\frac{7x}{x+4}-3\right|=\left|\frac{7x-3x-12}{x+4}\right|=\left|\frac{4x-12}{x+4}\right|=\frac{4\cdot\left|x-3\right|}{\left|x+4\right|}$

Como se trata de acercarse lo más posible a $x=3$, δ debe ser un valor pequeño. Por simplicidad hagamos que $\delta\le 1$. Se verifica que $0<\left|x-3\right|\le 1\Rightarrow 6<\left|x+4\right|<8$. De este modo:

$$\frac{4\cdot\left|x-3\right|}{8}<\frac{4\cdot\left|x-3\right|}{\left|x+4\right|}<\frac{4\cdot\left|x-3\right|}{6}$$

Buscamos un límite superior para $\left|f(x)-L\right|$, por tanto elegimos la segunda desigualdad:

$$\left|f(x)-L\right|=\frac{4\cdot\left|x-3\right|}{\left|x+4\right|}<\frac{4\cdot\left|x-3\right|}{6}<\frac{2\delta}{3}$$

por tanto, haciendo $\varepsilon=\frac{2\delta}{3}$ se verifica la definición.

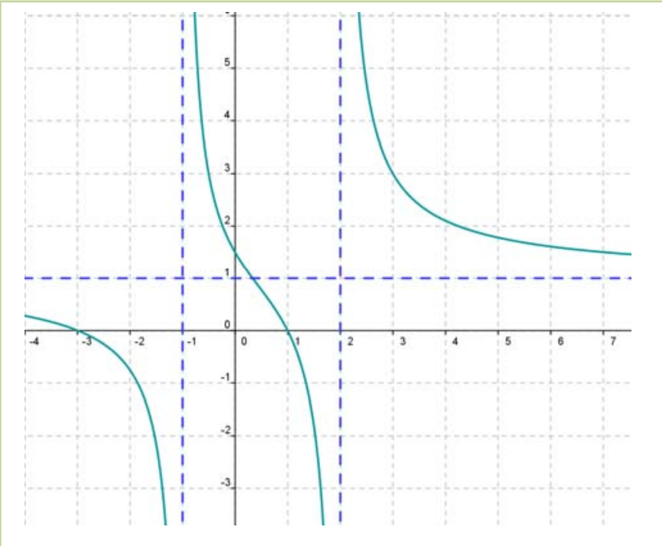
3- Calcula las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$$

Respuesta:

Es una función racional. Los valores que anulan el denominador son: x = –1 y x = 2, por tanto tiene dos asíntotas verticales que son las rectas verticales:

x = –1 y x = 2



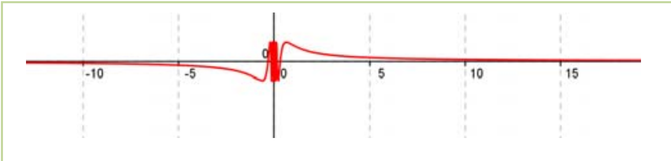
Para determinar el comportamiento en el infinito se calcula el límite cuando x tiende a ∞. Tanto si tiende a –∞ como si tiende a +∞ el límite es 1:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Por tanto tiene una asíntota horizontal que es la recta y = 1.

4.- Estudia la continuidad y discontinuidad de:

$$f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$



Respuesta:

La función seno es una función continua en toda la recta real, y $\frac{1}{x}$ no está definido en 0, luego hay un único punto de discontinuidad en x = 0. Para analizar el tipo de discontinuidad podríamos ampliar la escala para valores próximos a 0, y veríamos que, por las fluctuaciones del seno, no existe el límite.

Es una discontinuidad de segunda especie.

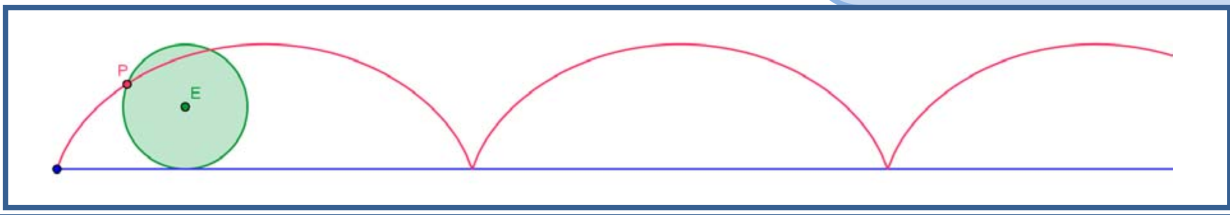
Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

CURIOSIDADES. REVISTA

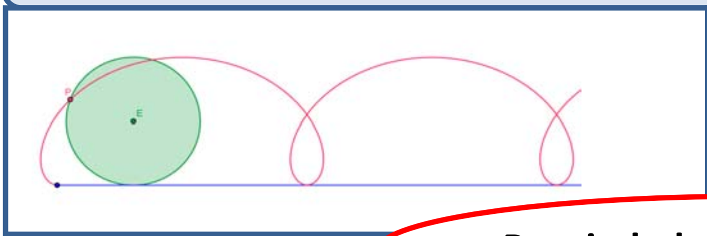
La cicloide, la "Helena" de las curvas

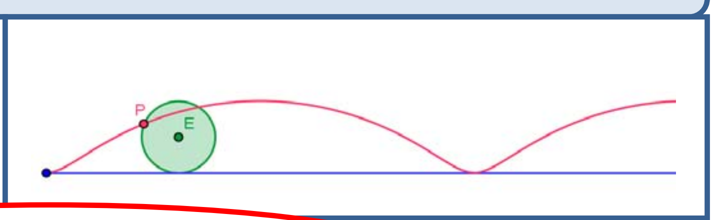
La cicloide es posiblemente la primera curva verdaderamente moderna, en el sentido de que no figura en las obras de Geometría de la antigua Grecia. Galileo fue uno de los primeros en estudiarla, le dio este nombre en 1599 y se interesó por el cálculo de su área, pesando trozos de metal con forma de cicloide.

Un punto P de una circunferencia, que se desplaza horizontalmente sin deslizarse, describe una cicloide. Es, por tanto, la curva que describe un punto de la rueda de un coche o de una bicicleta.



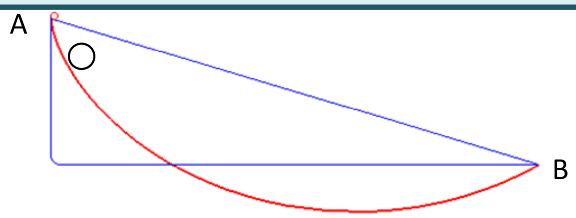
Al modificar el punto, si está dentro del círculo, o si está fuera, se modifica la cicloide pasando a ser una cicloide alargada o una cicloide acortada.



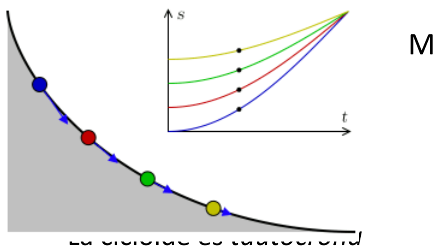


Propiedades de la cicloide

El interés de la cicloide está centrado en que es *braquistócrona*, es decir, la curva de descenso más rápido desde un punto A a un punto B, sin estar en vertical y bajo el efecto de la gravedad y *tautócrona* lo que significa que una bola que dejemos caer llega al punto más bajo, M, en un intervalo de tiempo que no depende del punto de partida.



La cicloide es *braquistócrona*



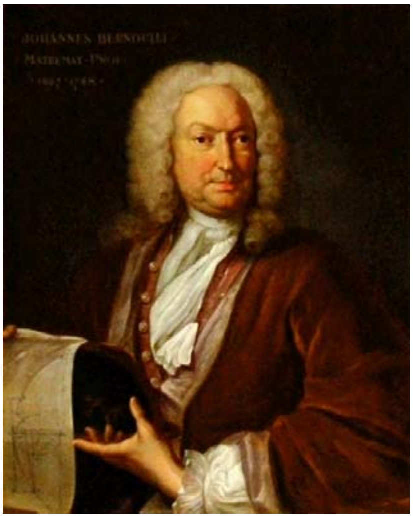
Para pasar del punto *A* al punto *B* el trayecto más rápido es seguir un arco de cicloide

Las dos bolas llegan a la vez al punto *M*.

Por la belleza de sus propiedades, o por las muchas disputas que trajo consigo se la conoce como la "***Helena***" de las curvas. Otras propiedades curiosas sobre esta curva es que la longitud de un arco de cicloide es 8 veces la longitud del radio de la circunferencia que la genera, que el área barrida por un arco de cicloide es 3 veces la del círculo generador y que es *isócrona*, es decir, el periodo de un péndulo que describe una cicloide es siempre el mismo, no depende de la amplitud de la oscilación.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

Las garras del león



Johann Bernoulli (1667

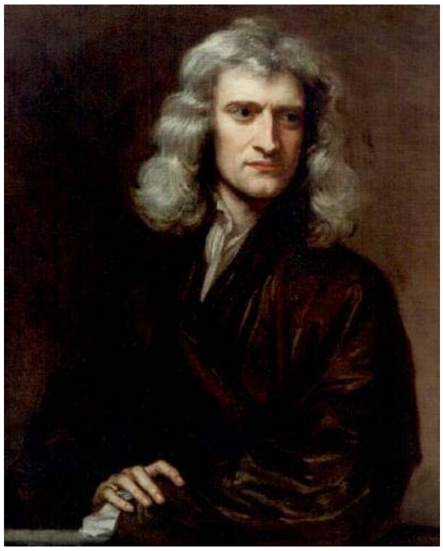
En 1696, *Johann Bernoulli* planteó ante los matemáticos de la *Royal Society* dos problemas matemáticos y ofreció como premio, a quien fuese capaz de dar las soluciones de ambos, un libro científico de su biblioteca personal.

El primer problema pedía encontrar la trayectoria más rápida para desplazarse de un punto A a uno B. Es la *braquistócrona*. En el segundo se pedía encontrar una curva que al trazar una recta desde O y que corte a la curva en P y Q, se mantenga la suma constante. Ahora sabemos que la solución de ambos problemas es la ***cicloide***, la "***Helena***" de las curvas.

Estableció un plazo máximo de seis meses para presentar las soluciones, y se puso a esperar. Esperó y esperó. Esperó. Los seis meses transcurrieron, y sólo *Leibniz* había encontrado la solución a uno de los dos problemas. Como las bases decían que el ganador debía resolver ambos, *Bernoulli* extendió el plazo por seis meses más, en la esperanza de que alguien consiguiera la solución al segundo. El año transcurrió, y nadie pudo mejorar la solución de *Leibniz* al primer problema y mucho menos resolver el segundo.

Newton no había sido informado. El 29 de enero de 1697 *Halley* visitó a *Newton*. Recuerda con asombro la entrevista con *Newton*, su distracción extrema y su falta de concentración en estos términos: *"Llegué a su casa a las dos de la tarde. Él estaba encerrado en su estudio, y la servidumbre tenía estrictas órdenes de no molestarlo ni abrir la puerta por ningún motivo. Por lo tanto, me senté afuera a esperar que saliera. Rato después, el ama de llaves trajo el almuerzo de Newton en una bandeja, y lo dejó en el piso, frente a la puerta. Las horas pasaron. A las seis de la tarde, yo sentía un hambre atroz, y me atreví a devorar el pollo de la bandeja. Cuando Newton por fin abrió la puerta, miró los huesos del pollo en la bandeja, me miró a mí y exclamó:*

—¡Qué distraído soy! ¡Pensé que no había comido!".



Isaac Newton (1643-

Halley explicó a *Newton* la situación y le entregó la carta con los dos problemas. *Newton* dejó la carta sobre un escritorio y despidió rápidamente a *Halley*, explicando que "*luego echaría una ojeada a los problemas*".

A las cuatro de la mañana del día siguiente los tenía listos, y a las ocho envió sus soluciones en una carta sin firma al presidente de la *Royal Society*. Sus desarrollos eran tan perfectos y elegantes, que las soluciones de *Newton* fueron publicadas —también en forma anónima— en el número de febrero de 1697 de *Philosophical Transactions*. *Newton* había resuelto en una noche dos problemas que a cualquier otro matemático le hubiesen llevado la vida entera.

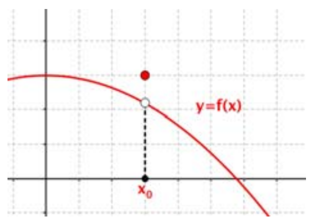
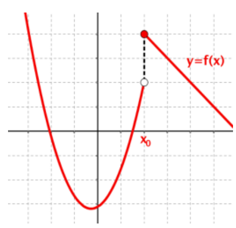
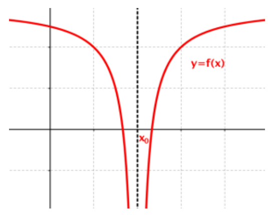
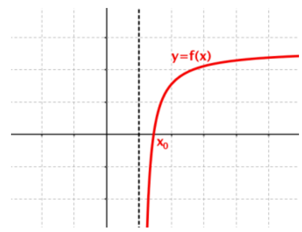
Bernoulli, impresionado por la elegancia de las soluciones de *Newton*, no tuvo dificultad en identificar al autor: "*Es Newton*", afirmó. "¿*Cómo lo sabe*?", le preguntaron. "*Porque reconozco **las garras del león*** (*Ex ungue leonis*)".

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

RESUMEN

		Ejemplos
Entorno de un punto	**Entorno** de centro a y radio δ, $E(a,\delta)$, es el intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$: $$E(a,\delta)=\{x\in\mathbb{R};\ \lvert x-a\rvert<\delta\}$$	
Límite de una función en un punto	$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall E(L,\varepsilon), \exists E(x_0,\delta);\ \forall x\in E(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in E(L,\varepsilon)$$ o también: $$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0;\ \text{si } 0<\lvert x-x_0\rvert<\delta\Rightarrow\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$$	
Límite lateral de una función en un punto	Límite por la izquierda: $$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0;\ \text{si } 0<x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$$ Límite por la derecha: $$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0;\ \text{si } 0<x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$$	
Operaciones con límites	$$\lim_{x\to x_0}[f\pm g](x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=L\pm M$$ $$\lim_{x\to x_0}[f\cdot g](x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=L\cdot M$$ $$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}=\sqrt{L}$$	$$\lim_{x\to x_0}[k\cdot f](x)=k\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=k\cdot L\quad\forall k\in\mathbb{R}$$ $$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f}{g}\right](x)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\frac{L}{M}\quad\text{si } \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$ $$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim_{x\to x_0} g(x)}=L^M$$ $$\text{si } \lim_{x\to x_0} f(x)\neq 0 \text{ y } \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$
Indeterminaciones	Un límite indeterminado es aquél que implica operaciones cuyo resultado no se puede precisar.	$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\pm\infty}$, ∞^0 y 0^0
Continuidad	Una función $y=f(x)$ es **continua en un punto** $x=x_0$ si: 1. Existe $f(x_0)$, es decir, $x_0\in \mathrm{Dom} f(x)$ 2. Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, es decir, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 3. Los dos valores anteriores coinciden. $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$	

Tipos de discontinuidad

<table>
<tr><th rowspan="3">DISCONTINUIDAD EVITABLE</th><th colspan="3">DISCONTINUIDAD NO EVITABLE</th></tr>
<tr><th colspan="2">1ª ESPECIE</th><th rowspan="2">2ª ESPECIE</th></tr>
<tr><th>Salto finito</th><th>Salto infinito</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-5}$ c) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-7)$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{10}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{10}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{13}}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{13}}$ j) $\lim\limits_{x\to -1} x^6$ k) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^3$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^6}$

2. – Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[7]{x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[7]{x}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^7}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^7}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} 7^x$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} 7^x$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$ j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 7^{\frac{1}{x}}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5$ n) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$ ñ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}$ o) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}$ p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}$ q) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4}$

r) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^x$ s) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5^x$ t) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ u) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ v) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{x^2}$ w) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{x^2}$

3. – Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{16}{x-2}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$ j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{16}{x-2}$

4. – Determina el límite de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x+1)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-5x+6\right)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3-x+x^2-x^3\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3-\frac{x-4}{2}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+3)(2x-3)$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-2}{x}$ k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2x^3+1}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^3+8x^2-x+8\right)$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x-2}$ n) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x-2}{3x^3-7x+1}$ ñ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-8x+16}{35}$ o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4}$

5. – Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3}$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

6. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-4}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^4$ c) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{3}{x^3}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{x^{-2}}{5}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to0^-}\left[\dfrac{x^5}{3}\right]$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-3x-1}{x^3+3}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2}{x^5}\right]$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-x}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{-x}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{3}\right]^x$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{3}{x+2}\right]$

7. – Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{5x}\cdot\dfrac{6x}{x^3+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{1-2x}:\dfrac{5x^3}{x^2+12}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{5x}+\dfrac{6x-x^2}{3x}\right)$

8. – Halla los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-12x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-4x\right)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)^x$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+5x^2-3\right)$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(x^2+1\right)^2+4x\right]$

9. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^3-7x+2\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{3x^2-5x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[4x^4-7x+5\right]$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-3x^5+2x-4\right]$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^2+3x-2\right]$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4-3x^2+2}}{\sqrt[3]{4x^2+5}}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x-5}}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-2x+1}{7x^4-2x^2}$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-5x+1}{2x^3-3}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{1-x^3}$

10. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{1+2x^2}{2x-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)$

11. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{1-x}$

12. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x}-x\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-3}\left[\dfrac{x^3+27}{x^2-9}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{3}{x+2}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^4-3x-1}{x^3+3}\right]$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

13. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+4^{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{1-x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+3^{-x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]$

14. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x+1}\cdot\sqrt{x^2+1}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+2x-3}-3x\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\right]$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+2}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{x}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3}$

15. – Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{3x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+2x}{x^2-3x}$ c) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$ d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}$

16. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$ d) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$

17. – Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$ g) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$ h) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$

18. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-3}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-3}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

19. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x^2+x}$ c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{5x^2-13x-6}$ d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-3x^2}{x^2+x}$ f) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$ g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x}$ h) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

i) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$ j) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$ k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$ l) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}$

m) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ n) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ o) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$

20. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{x^3+27}{x^2-9}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-4}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+4}{x^2-2x}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$

21. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{|x-3|}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}[x-1]^{\frac{3}{x-2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}\right]$ g) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2}{x^3}\cdot\dfrac{x^2+2x}{3}\right]$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2+2}\right)\right]$

22. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x^2}\right)^{\frac{-3}{x-1}}$

23. – Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases}2x-2 & \text{si} \quad x<3\\ 2x & \text{si} \quad 3\le x\end{cases}$ en $x=3$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x-1 & \text{si} \quad x<1\\ x+2 & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}$ en $x=1$

24. – Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^{3/x}-2}{2^{1/x}+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3^{1/x}-4x}{4^{1/x}+3x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4^{2/x}+3x^2+1}{5^{3/x}-3+2x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^{4/x}-2x^2+3}{3^{1/x}-3-2x}$

25. – Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{2^{2x}-5\cdot 2^x+4}$

26. – Dada la función $f(x)=\begin{cases}3x-1 & si \quad x<0\\ 0 & si \quad x=0\\ 2x+5 & si \quad x>0\end{cases}$ calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

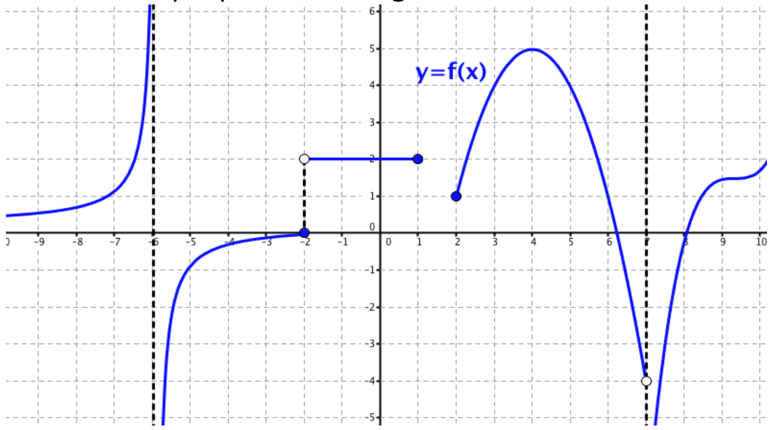
¿Tiene alguna discontinuidad?

27. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si} \quad x\le 2\\ x+2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si} \quad x<2\\ 2x-1 & \text{si} \quad 2\le x<4\\ 5 & \text{si} \quad x\ge 4\end{cases}$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

28. – Clasifica las discontinuidades que presenta la siguiente función:



29. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x<2 \\ x-2 & \text{si} \quad 2\le x\le 4 \\ 5 & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-5} & \text{si} \quad x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si} \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

30. – Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$

b) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

c) $f(x)=|x-3|$

d) $f(x)=\begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & si \quad x\in\mathbb{R}^* \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x\le 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

31. – Estudia la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en el intervalo $(2,5)$.

32. – Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2-3 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2+4x-1 & \text{si} \quad -1\le x\le 2 \\ x+11 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-4} & \text{si} \quad x<0 \\ x-1 & \text{si} \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x<-2 \\ -x^2+4 & \text{si} \quad -2\le x\le 2 \\ 2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si} \quad x\ne 3 \\ 6 & \text{si} \quad x=3 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} -5-\dfrac{|x|}{x} & \text{si} \quad x\ne 0 \\ 5 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

g) $f(x)=|x^2-6x+5|$

h) $f(x)=\begin{cases} |3-x| & si \quad x\le 5 \\ \ln e^2 & si \quad x>5 \end{cases}$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

33. – Determina el valor de a para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si} \quad x\le -2 \\ -x^2+a & \text{si} \quad x>-2 \end{cases}$$

34. – Determina el valor del parámetro b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x\le 3 \\ x+b & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

sea continua en todo su dominio.

35. – Halla el valor de k para que la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si} \quad x\ne -2 \\ k & \text{si} \quad x=-2 \end{cases}$$

sea continua en $x=-2$.

36. – Calcula m, n, p y q para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{si} \quad x<-8 \\ -2m+3 & \text{si} \quad -8\le x<-4 \\ x-\dfrac{1}{n} & \text{si} \quad -4\le x<2 \\ px & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$$

37. – Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases} kx-3 & \text{si} \quad x<4 \\ -x^2+10x-13 & \text{si} \quad x\ge 4 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 1+|x| & \text{si} \quad x<0 \\ k & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{3}{2}x+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

38. – El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo viene dado por la siguiente función:

$$e(t)=\begin{cases} 3t^2 & \text{si} \quad 0\le t<2 \\ 3t+a & \text{si} \quad 2\le t\le 5 \\ -t^2+13t+b & \text{si} \quad 5<t \end{cases}$$

Determina los valores de a y b, para que la función sea continua en $t=2$ y $t=5$.

39. – Un comerciante quiere vender un determinado producto, y para ello cobra 6 € por cada unidad. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$\mathrm{C(x)}=\begin{cases} 6x & \text{si} \quad 0<x\le 10 \\ \sqrt{600+ax^2} & \text{si} \quad x>10 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran “muchísimas” unidades?

40. – Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3a+3^{\frac{2}{x}} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{4}{2+2^{x}} & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ \dfrac{3}{b-2^{-x}} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Halla *a* y *b* para que la función sea continua.

b) Calcula: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0,5} f(x)$

c) Si $a=0$ y $b=\frac{1}{8}$, estudia las discontinuidades.

41. – La función $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x\le 0 \\ -x^2-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo $[-1,2]$ y, sin embargo, no tiene ninguna raíz en dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

42. – Comprueba que la función $f(x)=-x^3+x^2+2$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1,2]$.

43. – Demuestra que la función $f(x)=-2x^3+3x-8$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-2,2]$. ¿Se podría decir lo mismo de la función $g(x)=\dfrac{x^3-2x^2-4}{x+1}$?

44. – Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[-3,2]$, donde $f(-3)<0$ y $f(2)=5$. ¿Se puede asegurar que la función $g(x)=f(x)-2$ tiene al menos un cero en el intervalo $[-3,2]$?

45. – Dibuja la gráfica de una función que se ajuste a las siguientes condiciones:

- Continua en $\mathbb{R}-\{-3,1,5,7\}$
- $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$, $f(1)=0$
- Discontinuidad de salto finito en $x=5$ y de salto infinito en $x=7$
- $f(-2)=0$

46. – Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ tal que:

- $\text{Dom } f(x)=\{x\in \text{R} \,/\, x\ge -4\}$
- $f(-4)=2$, $f(0)=1$, $f(5)=0$, $f(7)=-5$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=-3 & \lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=0 & \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=4 & \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=+\infty & \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=-2 & \lim\limits_{x\to 7} f(x)=0 & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

AUTOEVALUACIÓN

1. Los límites de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ x<0 \\ x^3-7x^2+3 & si\ x>0 \end{cases}$ a la izquierda de 0 y a la derecha de 0 valen:

   a) 0, 0 b) 3, 7 c) 2, 3 d) No existen pues $f(x)$ no está definida en 0

2. El límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3^x-3^2}{3^{x+1}}\right)$ vale:

   a) 0 b) 1 c) $+\infty$ d) $-\infty$

3. El límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x-5}{x-x^2+2}\right)$ vale:

   a) 0 b) 3 c) ∞ d) $-5/2$

4. El límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)$ vale:

   a) 0 b) 3 c) ∞ d) 7

5. El límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}$ vale:

   a) 0 b) 4 c) ∞ d) $-1/4$

6. Para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+a & \text{si} & x<3 \\ 2x^2-1 & \text{si} & x\geq 3 \end{cases}$ sea continua a debe valer:

   a) 3 b) -1 c) 17 d) 1/2

7. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

   a) $f(x)=\log(x-2)$ b) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ c) $f(x)=\sqrt{x-2}$ d) $f(x)=\text{sen}(\cos(x-2))$

8. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota horizontal $y = 2$.

   a) $f(x)=\log(x-2)$ b) $f(x)=\frac{2x^2-4}{x^2-2}$ c) $f(x)=\sqrt{x-2}$ d) $f(x)=\text{tg}(\cos(x-2))$

9. Indica cuál de los siguientes límites NO vale 0.

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{27}+5}{e^x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{e^x-5}$

10. Los puntos de discontinuidad de la función $g(x)=\left|x^2-9\right|$ son:

    a) 0 y 3 b) 3 y -3 c) Ninguno d) 0, 3 y 9

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

Apéndice: Problemas de límites en las P.A.A.U.

1.- Calcula:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x}$$

2.- Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & \text{si} \quad x<3 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

Determina los valores de a para los que la función es continua.

3.- Dada la función $F(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3-ax^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$, responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) ¿Para qué valores de a la función $F(x)$ es continua en $x = 1$?

b) Si $F(x)$ es continua cuando $x \to x_0$ entonces no existe $\lim_{x\to x_0} F(x)$, ¿es cierto?

4.- Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

$$T(x)=\begin{cases} \dfrac{300}{x+30} & \text{si} \quad 0\le x\le 30 \\ \dfrac{1125}{(x-5)\cdot(x-15)}+2 & \text{si} \quad x>30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿y en menos de 2?

5.- El rendimiento de un estudiante en un examen de una hora de duración viene dado por la siguiente expresión ($f(x)$ representa el rendimiento, en tanto por ciento, en el instante x, medido en horas):

$$f(x)=\begin{cases} 300x(1-x) & \text{si} \quad 0\le x\le 0{,}6 \\ 180(1-x) & \text{si} \quad 0{,}6<x\le 1 \end{cases}$$

a) ¿Es el rendimiento una función continua del tiempo?

b) ¿En qué momentos aumenta y en qué momentos disminuye el rendimiento? ¿Cuándo obtiene el mayor rendimiento y cuál es ese rendimiento?

6.- La energía que produce una placa solar viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo transcurrido desde que amanece ($f(x)$ es la energía producida a las x horas de haber amanecido):

$$f(x)=\begin{cases} 10x-x^2 & \text{si} \quad 0\le x\le 8 \\ \dfrac{1024}{x^2} & \text{si} \quad 8<x\le 12 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función f en su dominio.

b) ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánto produce en ese momento?

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores

7.- El tiempo que un empleado tarda en realizar una tarea varía durante los cuatro primeros meses de contrato según su experiencia. Así, la función que relaciona el tiempo empleado en realizar la tarea con la experiencia del operario es ($f(x)$ representa el tiempo, en horas, que tarda en realizar la tarea un empleado que lleva contratado un tiempo x, medido en meses):

$$f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \\ (x-4)^2 + 4 & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función f. ¿Es el tiempo necesario para realizar la tarea una función continua del tiempo de experiencia?

b) ¿En qué momento el tiempo necesario para realizar la tarea es mínimo? ¿Cuánto tiempo le lleva finalizar la tarea en ese instante? ¿Consigue el empleado finalizar la tarea en menos de 3 horas en algún momento durante los primeros cuatro meses de contrato?

8.- Un proveedor cobra el aceite según el volumen del pedido. Así, la función que relaciona el importe del pedido con el volumen del mismo es $f(x)$ (en euros), de un pedido de x litros de aceite):

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad 0 < x < 30 \\ 2x + 30 & \text{si} \quad 30 \le x \end{cases}$$

a) ¿Es el importe una función continua del volumen del pedido?

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y represéntala gráficamente.

9.- La velocidad de un coche de carreras viene dada por la siguiente expresión:

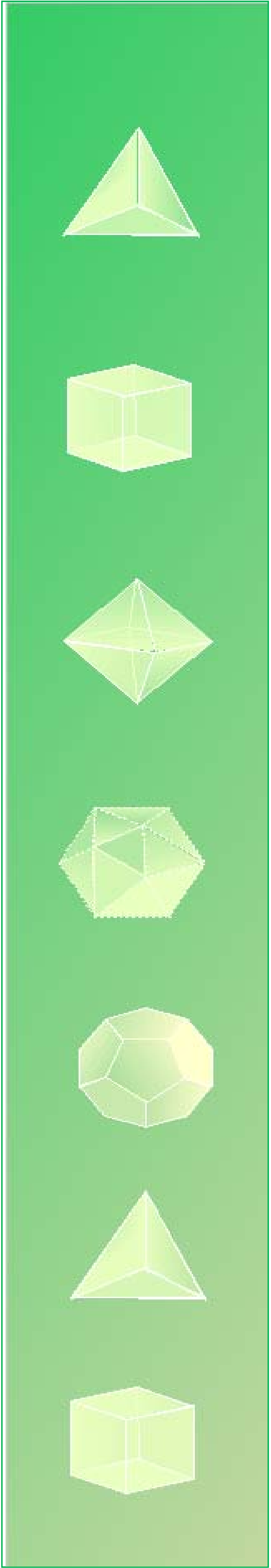
$$f(x) = \begin{cases} 110 + 12x + 6x^2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ 350 - \dfrac{450}{x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo, en segundos, y $f(x)$ representa la velocidad del coche, en km/h.

a) ¿Es la velocidad una función continua del tiempo?

b) ¿Disminuye la velocidad del coche en algún instante?, ¿se podrían alcanzar los 350 km/h de velocidad con este coche?

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés
Ilustraciones Wikipedia, INTEF y de los autores



MATEMÁTICAS II:
2º Bachillerato de Ciencias
Capítulo 8: Derivadas

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

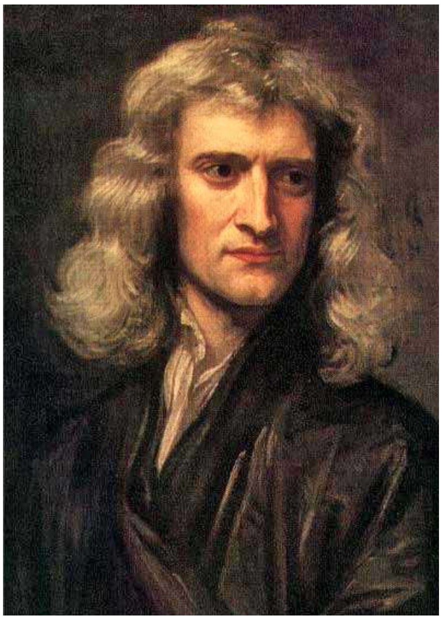
Autora: María Molero Aparicio

Revisores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Índice

Resumen

Cuando la Ciencia ha avanzado suficientemente en un determinado camino, en ocasiones ocurre que al mismo tiempo, pero en dos lugares alejados, fructifica una misma idea. Eso es lo que ocurrió en el siglo XVII, cuando prácticamente al mismo tiempo, *Newton* en Inglaterra y *Leibniz* en Alemania llegaron al concepto de derivada, y con él al de *Cálculo Diferencial*. Esto motivó graves disputas y enfrentamientos sobre quién era el padre de la idea. Ahora se considera que lo fueron ambos.



Isaac Newton

Leibniz

El curso pasado ya has estudiado el concepto de derivada y un buen número de derivadas de distintas funciones. También se utilizó la derivada para estudiar la tendencia de una función, si crecía o decrecía, y para calcular sus máximos y mínimos.

Ahora, que ya tienes los conceptos adquiridos, es el momento de profundizar en ellos y formalizarlos con mayor precisión.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1.1. Concepto de derivada de una función en un punto

Del curso pasado ya conoces la definición de derivada. Vamos a recordarla.

Recuerda que:

La derivada de una función en un punto responde al estudio de dos problemas aparentemente distintos: El primero es el estudio del **ritmo de variación** de la función en dicho punto. El segundo es de índole geométrica: la derivada de una función en un punto indica el valor de la pendiente de la recta **tangente** a la gráfica de la función en ese punto.

El estudio de la tasa de variación media nos resultaba insuficiente para resolver determinados problemas.

Por ejemplo: Si un avión (o un coche) sufre un accidente, y los expertos quieren determinar las causas, no les interesa la velocidad media del avión, (o del coche) sino la velocidad instantánea en el momento del accidente.

Otro ejemplo más: Los bomberos utilizan lonas para recoger a las personas que deben saltar de un incendio. Para fabricar la lona y que resista deben conocer la velocidad en el momento del impacto, no la velocidad media de caída.

Definición:

Si X es un intervalo abierto, f: $X \to \Re$ una función continua en $a \in X$, se dice que f es **derivable** en a si existe el límite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

y es un número real (es decir, no es infinito).

El valor del límite lo denominamos **derivada** de f en $x = a$, y lo representamos por $f'(a)$, $Df(a)$ o por $\frac{df}{dx}(a)$.

$$f'(a) = DF(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Actividades resueltas

- *Estudia la derivabilidad de la función* $f(x) = \cos\sqrt{x}$ en $x = 0$.

Observa que la función no está definida para valores negativos de la variable. Si $x > 0$ $f'(x) = \frac{-\,sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, expresión que no está definida para $x = 0$. Para estudiar la derivabilidad de la función en $x = 0$, utilizamos la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\sqrt{h}-1}{h} = \frac{-1}{2}.$$

Luego la función es derivable en $\{x \in \Re \mid x \geq 0\}$.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Derivación y continuidad

Si *f* es derivable en un punto entonces la función es continua en dicho punto.

Demostración

Recuerda que una función es continua en $x = a$, si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Entonces

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

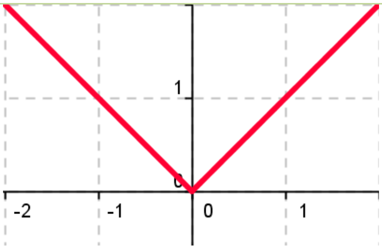
Suponemos que la función es derivable en a, es decir que existe $f'(a)$ y es un valor finito. Tomamos límites.

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\lim_{x\to a}(x - a) = f'(a)\cdot 0 = 0$$

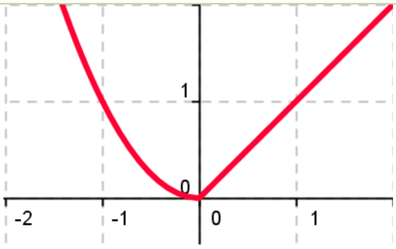
Por tanto $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Actividades resueltas

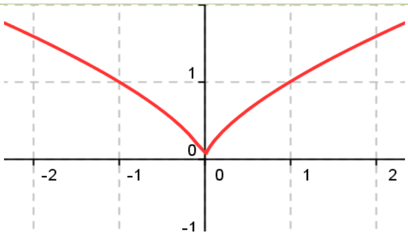
- *Las funciones cuyas gráficas aparecen a continuación son continuas en todos los puntos, y derivables en todos los puntos excepto en x = 0. Observa el comportamiento de la gráfica en dicho punto.*



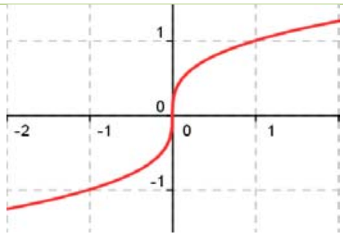
Los límites laterales existen, pero no coinciden, valen –1 y 1 respectivamente.



Los límites laterales existen, pero no coinciden, valen 0 y 1 respectivamente.

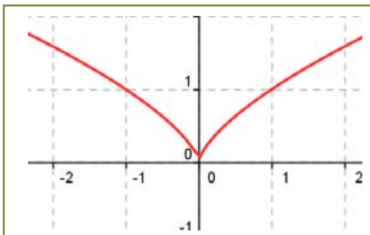


La función $y = x^{2/3}$ es continua pero no es derivable en x = 0.



La función $y = x^{1/3}$ es continua pero no es derivable en x = 0.

- *Estudia la derivabilidad de la función* $f(x) = x^{2/3}$ en x = 0



La función es continua en todo $\Re$ ya que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^{2/3} = a^{2/3}$ y $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{2/3} = 0$.

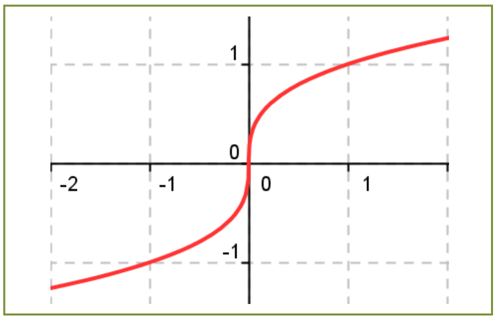
Para estudiar la derivabilidad de la función en x = 0, utilizamos la definición de derivada:

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}}{h}=\lim_{h\to 0}h^{-1/3}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}}=\infty.$$

El límite tiende a infinito. No es derivable en $x = 0$. Observa en la gráfica como la recta tangente en el origen es una recta vertical. La función es derivable en $\{x\in \Re \mid x\neq 0\}$.

- *Estudia la derivabilidad de la función* $f(x)=x^{1/3}$ en $x = 0$.



La función es continua en todo $\Re$. Para estudiar la derivabilidad de la función en $x = 0$, utilizamos la definición de derivada:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}}{h}=\lim_{h\to 0}h^{-2/3}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}}=\infty.$$

El límite no existe. Tiende a infinito. No es derivable en $x = 0$. Observa en la gráfica como la recta tangente en el origen es una recta vertical. La función es derivable en $\{x\in \Re \mid x\neq 0\}$.

- *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & si\ x<0 \\ x^2e^{-x} & si\ x\geq 0\end{cases}$, *se pide:*

  a) *Calcula el valor de a*, para que $f(x)$ sea continua en todo $\Re$.

  b) *Estudia la derivabilidad de f* y calcular $f'(x)$ donde sea posible. Selectividad. Junio 14. Opción B

a) Es una función definida a trozos por dos funciones continuas. Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$a + ln(1 – x)$ en $x = 0$ es igual a a. $a=f(0)=\lim_{x\to 0}x^2e^{-x}=0$ en $x = 0$.

Por tanto si $a = 0$ la función $f(x)=\begin{cases} \ln(1-x) & si\ x<0 \\ x^2e^{-x} & si\ x\geq 0\end{cases}$ es continua en todo $\Re$.

b) Estudio de la derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{1-x} & si\ x<0 \\ 2xe^{-x}+x^2e^{-x}(-1) & si\ x>0\end{cases}=\begin{cases} \dfrac{-1}{1-x} & si\ x<0 \\ (2x-x^2)e^{-x} & si\ x>0\end{cases}.$

En $x = 0$, la rama de la izquierda tiende a –1 y la de la derecha a 0, luego la función no es derivable.

Actividades propuestas

1. Haciendo uso de la definición de derivada comprueba que la derivada de $f(x)=sen\dfrac{1}{x}$ en $x = a$ es igual a $f'(x)=\left(\dfrac{-1}{a^2}\right)\cos\dfrac{1}{a}$ si a es distinto de 0.

2. Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:

a) $f(x) = x^3$ en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 12$.

b) $g(x) = x + 2$ en $x = a \Rightarrow g'(a) = 1$.

c) $h(x) = x^2 cosx$ en $x = 0 \Rightarrow h'(0) = 0$.

d) $r(x)=\dfrac{3x+4}{2x-1}$ en $x = 1 \Rightarrow r'(1) = –11$.

3. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de $f(x) = \left|x^3\right|$ (Selectividad Junio 1995)

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente

Recuerda que:

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es igual a $f'(a)$. Por tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x - a).$$

Ejemplo:

- *Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $y = 2x^3 + x$ en $x = 1$ buscamos la recta de pendiente $f'(1)$ que pase por el punto $(1, f(1))$:

  $f(1) = 2\cdot1^3 + 1 = 3$; $f'(x) = 6x^2 + 1$; $f'(1) = 6\cdot1^2 + 1 = 7$;

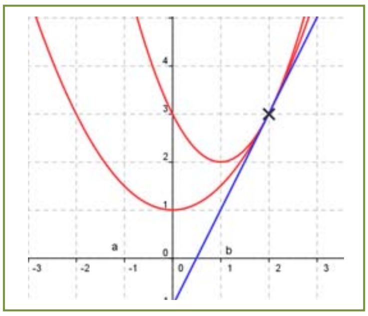
  Ecuación de una recta de pendiente 7 que pasa por el punto (1, 3):

  $$y = 3 + 7(x - 1) = 7x - 4.$$

Actividades resueltas

- *Se consideran las funciones* $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

a) Calcula a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.
b) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibuja las gráficas de ambas funciones y halla la ecuación de la recta tangente común. (Septiembre 01. Opción A)



a) Calculamos las derivadas en $x = 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$, $g'(x) = 2ax \Rightarrow$

$f'(2) = 2$, $g'(2) = 4a \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = ½$.

Para $x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 = g(2) = (1/2)4 + b = 2 + b \Rightarrow b = 1$.

b) Recta tangente en (2, 3) de pendiente 2: $y = 3 + 2(x - 2) = 2x - 1$.

Las funciones son parábolas de vértices (1, 2) y (0, 1) respectivamente, que pasan por el punto (2, 3).

Actividades propuestas

4. Dada la función $f(x) = \ln\dfrac{x^2}{x-1}$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano, definida para $x > 1$ halla un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

Selectividad. Septiembre 05. Opción B

5. Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$. Halla un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$. Selectividad. Curso 06/07. Modelo. Opción B

6. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m halla el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Halla el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$. Selectividad. Junio 07. Opción A

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Interpretación física de la derivada

Recuerda que:

La **velocidad** es la derivada del espacio respecto al tiempo, (en el caso en que la función indique, dado el tiempo, el espacio recorrido).

La **aceleración** es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

$$v = \frac{de}{dt}; \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

Ejemplo:

- *El espacio recorrido por un vehículo viene dado por* $e = 1'3t + 0'07t^2$*, donde e se mide en metros y t en segundos. Determina la velocidad para t = 1 segundos. Determina la función velocidad y la función aceleración.*

Calculamos la derivada: $e' = 1'3 + 0'14t$. Para $t = 1$, $e'(1) = 1'44$ m/s = $v(1)$.

La función velocidad es la derivada $v = e' = 1'3 + 0'14t$.

Derivamos para obtener la aceleración: $a = v' = 0'14$ m/s².

Actividades propuestas

7. Un coche recorre una distancia e, en kilómetros, a las t horas, siendo $e = 22t + 0'4t^2$. Determina su función velocidad y su función aceleración. ¿Es constante la aceleración? Si sigue a esa velocidad, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máxima permitida de 120 km/h?

8. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y, que alcanza a los x segundos es: $y = 30x - 4x^2$. Calcula la velocidad a los $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$ segundos. Determina también la altura de la piedra a esos segundos. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

9. Un coche recorre una distancia y, en un tiempo x dado en horas, dada por la ecuación: $y = 0'1x^2 + 100x - 50$. Determina la velocidad que lleva el coche para $x = 1'5$ horas.

1.3. Función derivada. Propiedades

Recuerda que:

Si f es derivable en $X \subset \Re$ se llama **función derivada** de f a la función que asocia a cada número real de X el valor de la derivada de f en dicho punto. A esta nueva función la designamos por f', Df o $\frac{df}{dx}$.

Por ejemplo,

En el caso: $f(x) = x^3$ entonces $f'(a) = 3 \cdot a^2$. Por lo tanto, si $f(x) = x^3$ entonces $f'(x) = 3 \cdot x^2$.

Pero a la función derivada podemos volverla a derivar, y obtener así la derivada segunda: $f''(x) = 6 \cdot x$.

Y volver a derivar, obteniendo la derivada tercera: $f'''(x) = 6$. Y la cuarta: $f^{IV)}(x) = 0$. ¿Cuánto vale la derivada 28 de esa función? ¿Sabes hacerla? ¡Claro que sabes! A partir de la derivada tercera todas las derivadas valen cero.

Las derivadas sucesivas se pueden nombrar: f', f'', f''', $f^{IV)}$, …, $f^{n)}$, o también Df, D^2f, D^3f, …, $D^{n)}f$.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividad resuelta

- *Calcula la derivada n-ésima de f(x) = ln(x):*

$$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f''(x)=\frac{-1}{x^2}\Rightarrow f'''(x)=\frac{(-1)(-2)}{x^3}\Rightarrow f^{n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Actividades propuestas

10. Comprueba que la derivada *n*-ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$f(x)=\frac{1}{x+a}\Rightarrow f^{n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$	$f(x)=\frac{3x+2}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}\Rightarrow f^{n)}(x)=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+2)^{n+1}}+\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right)$
$f(x)=\frac{1+x}{1-x}\Rightarrow f^{n)}(x)=\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$	$f(x)=\cos ax\Rightarrow f^{n)}(x)=a^n\cos(ax+n\frac{\pi}{2})$
$f(x)=\ln(1+x)\Rightarrow f^{n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$	$f(x)=\cos^2 x\Rightarrow f^{n)}(x)=2^{n-1}\cos(2x+n\frac{\pi}{2})$

Notación diferencial

La tasa de variación media de una función $y = f(x)$ en el intervalo $(a, a + h)$ es:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

siendo el numerador el incremento de la función y el denominador el incremento de la variable. *Gottfried Wilhelm Leibniz* utilizó la notación: $\frac{dy}{dx}$ para denotar la derivada de la función y respecto de la variable x, donde dy y dx no son numerador y denominador, sino un todo inseparable. Se lee, derivada de y respecto de x.

Esta notación es útil, sobre todo, si hay distintas variables.

Ejemplo:

- Si $S = 4\pi r^2$ entonces $\frac{dS}{dr}=8\pi r$.
- Si $V = \pi r^2 h$ entonces $\frac{dV}{dr}=2\pi r\cdot h$ y $\frac{dV}{dh}=\pi r^2$.

La función derivada es lineal

Recuerda que:

La derivada de una **suma** de funciones es la suma de las derivadas de cada una. Es decir:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La derivada de una función multiplicada por una constante es igual a la constante por la derivada de la función:

Si $f(x) = c\cdot g(x)$ entonces $f'(x) = c\cdot g'(x)$.

Estas dos propiedades, que ya conoces del curso pasado, nos indican que el operador derivada, D, es lineal y permiten escribir: $D(f + g) = Df + Dg$ $\qquad$ $D(cf) = cDf$

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Operaciones con derivadas

Recuerda que:

Pero también conoces el comportamiento de la derivada con otras operaciones, el producto, cociente, composición….

La derivada del **producto** de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

La derivada del **cociente** de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, divididos por el cuadrado del denominador: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

La **regla de la cadena** expresa la derivada de la **composición** de funciones $(f \circ g)(x)$ en términos de las derivadas de f y g: $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

o escrito en notación de Leibniz: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Actividades resueltas

- *Calcula la derivada de* $y = (x^7 + 2)^5$.

Para aplicar bien la regla de la cadena es muy importante que comprendas bien la composición de funciones. En la derivada propuesta tenemos la función potencial *"elevar a 5"*, cuya derivada conoces bien $5x^4$, y la función $x^7 + 2$ cuya derivada es $7x^6$.

Aplicamos la regla de la cadena, primero la derivada de la función potencial en el punto $x^7 + 2$, y luego multiplicamos por la derivada de esta función: $y' = 5(x^7 + 2)^4 \cdot 7x^6$.

- *Calcula las derivadas de las funciones siguientes y comprueba el resultado:*

a) $y = sen^2(x) \Rightarrow y' = 2sen(x) \cdot \cos(x)$	b) $y = sen(x^2) \Rightarrow y' = cos(x^2) \cdot 2x$
c) $f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(2-x)\sqrt{4-x^2}}$	d) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$
e) $f(x) = (3+x)\sqrt{3-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{3-x}}$	f) $f(x) = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

Actividades propuestas

11. Si f y g son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $g(1) = 1$, $g(2) = 6$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = 6$, $f'(6) = 4$, $g'(1) = 1$, $g'(2) = 3$, $g'(5) = 1$. Determina el valor de:

a) $(f \circ g)'(2)$; b) $(g \circ f)'(1)$; c) $(g \circ f)'(2)$; d) $(f \circ f)'(1)$.

12. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables en un punto x. Pruébese que su producto $u(x)\cdot v(x)$ es derivable obteniendo la expresión de su derivada: $D[u(x)\cdot v(x)] = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

(Selectividad Septiembre 1995)

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. CÁLCULO DE DERIVADAS

Recuerda que:

Del curso pasado ya conoces las reglas de derivación de funciones. Vamos a repasar algunas de ellas. Si ya sabes derivar con soltura, puedes saltarte este apartado, pero si no es tu caso, es importante que lo revises.

Derivada de la función potencial: La derivada de la función $f(x) = x^k$, para cualquier valor numérico de k, es $f'(x) = k\cdot x^{k-1}$.

Derivada de la función logaritmo: Si $f(x) = log_a(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x} log_a e$.

Derivada de la función exponencial: Si $y = a^x$ entonces $y' = a^x \cdot ln(a)$.

Derivada de la función seno: Si $f(x) = sen(x)$ entonces $f'(x) = cos(x)$.

Derivada de la función coseno: Si $f(x) = cos(x)$ entonces $f'(x) = -sen(x)$.

Actividades resueltas

- *Observa cómo se han obtenido las derivadas siguientes:*

Función	$f(x) = x^6$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$f(x) = 1/x = x^{-1}$	$f(x) = 1/x^2 = x^{-2}$
Derivada	$f'(x) = 6x^5$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = (1/n)x^{(1/n)-1} = (1/n)x^{-(n-1)/n} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f'(x) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$	$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

- *Calcula las siguientes derivadas y comprueba el resultado:*

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	b) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{9} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{9}$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	**d)** $f(x) = \ln(x^5 - 7x^8) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^5 - 7x^8} \cdot (5x^4 - 56x^7)$
e) $f(x) = \sqrt{4x} + \sqrt[3]{x} + \frac{5}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{x^2}$	f) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^2\sqrt{x}}$
g) $f(x) = (2x-1)(x^2 - 6x + 3) \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 26x + 12$	h) $f(x) = \frac{(x+4)^2}{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$

- *Calcula las siguientes derivadas y comprueba los resultados:*

a) $f(x) = \frac{sen(x)}{1+\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}$	b) $f(x) = \cos(sen^2 5x) \Rightarrow f'(x) = -10 sen 5x \cdot \cos 5x \cdot sen(sen^2 5x)$
c) $f(x) = tg(5x-7) \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x-7)}$	d) $f(x) = \cos(sen 5x) \Rightarrow f'(x) = -5\cos 5x \cdot sen(sen 5x)$
e) $f(x) = 2\sqrt{\cos 3x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{6 sen 3x}{\sqrt{\cos 3x}}$	f) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
g) $f(x) = \ln(sen^2(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{tg(x)}$	h) $f(x) = sen(\cos(x)) \Rightarrow f'(x) = -sen(x) \cdot \cos(\cos(x))$
i) $f(x) = \ln(sen(x)) \Rightarrow f'(x) = \text{cotg}(x)$	*j)* $f(x) = ln(cos(x)) \Rightarrow f'(x) = -tg(x)$

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Técnica de la derivación logarítmica

Aunque suponemos que ya la conoces vamos a repasar esta técnica que, en ocasiones, facilita los cálculos. Consiste en aplicar logaritmos a los dos miembros de la función, y a continuación, derivar.

Actividades resueltas

- *Utilizando derivación logarítmica halla la derivada de* $f(x) = e^{(x^5 - 3x^3)}$

1) Aplicamos logaritmos neperianos: $ln(f(x)) = ln(e^{(x^5 - 7x^3)})$
2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(e^{(x^5 - 7x^3)}) = (x^5 - 7x^3) \cdot ln(\mathrm{e}) = (x^5 - 7x^3)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 5x^4 - 21x^2$
4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot (5x^4 - 21x^2) = e^{(x^5 - 7x^3)} \cdot (5x^4 - 21x^2).$$

Derivando la función exponencial llegamos al mismo resultado. Compruébalo.

- *Calcula las siguientes derivadas utilizando la técnica de derivación logarítmica y comprueba los resultados:*

a) $f(x)=g(x)^{h(x)} \Rightarrow f'(x) = g(x)^{h(x)}(h'(x)\ln(g(x)) + \frac{h(x)g'(x)}{g(x)})$	b) $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = x^x(ln(x) + 1)$
c) $f(x) = x^{sen(x)} \Rightarrow f'(x) = x^{sen(x)}(\cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{sen(x)}{x})$	d) $f(x) = \sqrt[tg(x)]{x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[tg(x)]{x}(\frac{sen(x)\cos(x) - \ln(x)}{x\cos^2(x)sen^2(x)})$

Derivada de la función inversa

Recuerda que:

La función inversa de la función $y = f(x)$ se define como:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Por este motivo, recuerda que la gráfica de una función y su inversa son simétricas respecto de la diagonal del primer cuadrante.

Si conocemos la derivada de una función podemos calcular la derivada de su función inversa, pues:

Si f es una función derivable y biyectiva en X con $0 \notin f'(X)$ entonces f^{-1} es derivable en $f(X)$ y:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Demostración:

Para comprobar que f^{-1} es derivable y calcular su derivada debemos calcular el límite:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

Pero $x = f^{-1}(y)$ y sea $a = f^{-1}(b)$. Además, por definición de función inversa: $y = f(x)$ y $b = f(a)$. Por ser

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

continua, cuando $y \to b$, entonces $x \to a$, por lo que el límite anterior es equivalente a:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$

Por tanto

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{x\to a} \frac{1}{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Por tanto existe el límite y su valor es:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'\circ f^{-1}(b)}, \text{ c.q.d.}$$

Derivada de las funciones inversas de las funciones trigonométricas

La función **arco seno** es la función inversa de la función seno y se define por tanto como:

$$y = arcsen(x) \Leftrightarrow x = sen(y)$$

Si la definimos en el intervalo (–π/2, π/2) es biyectiva. ¡Compruébalo!

Entonces su derivada es:

$$y = arcsen(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{\cos(arcsen(x))}$$

Sabemos que $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, por tanto: $\cos(x) = \sqrt{1-sen^2(x)}$

$$\frac{1}{\cos(arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2(arcsen(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ c.q.d.}$$

De forma similar se demuestran las derivadas de la función arco coseno y arco tangente.

Recuerda que:

$f(x) = arcsen(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = arcsen(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$y = arcsen(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
$f(x) = arccos(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = arccos(f(x)) \Rightarrow y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$y = arccos(x^2) \Rightarrow y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$f(x) = arctg(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctg(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$y = arctg(x^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1+x^6}$

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Calcula las siguientes derivadas y comprueba los resultados:*

a) $f(x)=e^{\ln(arctg\sqrt{x})} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$	b) $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$
c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}arcsen\dfrac{3\cos x+2}{3+2\cos x} \Rightarrow$ $f'(x)=-\dfrac{1}{3+2\cos x}$	d) $f(x)=arctg\dfrac{3senx}{4+5\cos x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{5+4\cos x}$

Derivada de las funciones inversas de las funciones hiperbólicas

La función **argumento seno hiperbólico** es la función inversa de la función seno hiperbólico y se define por tanto como:

$$y = argsh(x) \Leftrightarrow x = sh(y)$$

Entonces su derivada es:

$$y = argsh(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Utilizaremos esta derivada cuando estudiemos las integrales, pues nos permitirá obtener algunas.

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{ch(\arg sh(x))}$$

Sabemos que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, por tanto: $ch(x) = \sqrt{1+sh^2(x)}$

$$\frac{1}{ch(\arg sh(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2(\arg sh(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ c.q.d.}$$

De forma similar se demuestran las derivadas de la función argumento coseno y argumento tangente.

Recuerda que:

$f(x) = argsh(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$y = argsh(f(x)) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$	$y = argsh(e^x) \Rightarrow y' = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$
$f(x) = argch(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$y = argch(f(x)) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-1}}$	$y = argch(x^2) \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$
$f(x) = argth(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$	$y = argth(f(x)) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{1-f(x)^2}$	$y = argth(x^3) \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2}{1-x^6}$

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt[6]{5x^{11}}$; b) $y=\dfrac{\sqrt[4]{3x^2}\cdot\sqrt{x}}{3x^3+7}$; c) $y=\dfrac{(3x^4-4)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}}$; d) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^7}}{2x+5}$.

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}\left(3x^7-5x^5\right)^3}$ b) $y=\sqrt{\dfrac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}}$

c) $y=\sqrt{\left(\dfrac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^4}$ d) $y=\sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\dfrac{5}{x^5}}}$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=tg\,\dfrac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$ b) $f(x)=(2-3x)sh(2-3x)$

c) $f(x)=tg\,\dfrac{\sqrt{4-9senx}}{3+2\cos x}$ d) $f(x)=\dfrac{senx-x\cos x}{\cos x+xsenx}$

16. Ya sabes que la función tangente se define como el cociente entre el seno y el coseno, las funciones hiperbólicas se definen utilizando la función exponencial. Comprueba las derivadas de la tabla siguiente de $tg(x)=\dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$, $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, y de $th(x)=\dfrac{sh(x)}{ch(x)}$.

$f(x)=tg(x)\Rightarrow f'(x)=1+tg^2(x)$	$y=tg(f(x))\Rightarrow y'=(1+tg^2(f(x)))\cdot f'(x)$	$y=tg(x^3)\Rightarrow y'=(1+tg^2(x^3))\cdot(3x^2)$
$f(x)=sh(x)\Rightarrow f'(x)=ch(x)$	$y=sh(f(x))\Rightarrow y'=f'(x)\cdot ch(f(x))$	$y=sh(\sqrt{x})\Rightarrow y'=\dfrac{ch\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=ch(x)\Rightarrow f'(x)=sh(x)$	$y=ch(f(x))\Rightarrow y'=f'(x)\cdot sh(f(x))$	$y=ch(ln(x))\Rightarrow y'=\dfrac{sh(\ln(x))}{x}$
$f(x)=th(x)\Rightarrow f'(x)=1-th^2(x)$	$y=th(f(x))\Rightarrow y'=f'(x)\cdot(1-th^2(f(x)))$	$y=th(x^4)\Rightarrow y'=(4x^3)\cdot(1-th^2(x^4))$

17. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=(3x)^{x^5-9x^3}$ b) $y=((2x+7)^{5x^3-6x^2})$

c) $y=(x+e)^{(4x^5-8x^3)^5}$ d) $f(x)=(x^x)^x$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=arcsen\sqrt{\dfrac{4+senx}{4-senx}}$ b) $y=e^{\arccos\sqrt{6x+8}}$

c) $y=sen(arctg\,\dfrac{7x}{\sqrt{1-2x^2}})$ d) $y=\arccos\dfrac{5x}{\sqrt{16-x^2}}$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\arg sh\sqrt{\dfrac{5+shx}{5-shx}}$ b) $y=\sqrt{2e^{\arg ch\sqrt{7x+3}}}$

c) $y=sh(\arg th\,\dfrac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}})$ d) $y=\arg ch\,\dfrac{senx}{\sqrt{5-3sen^2x^2}})$

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

3.1. Teoremas de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

El teorema de Rolle nos indica bajo qué condiciones podemos asegurar que hay un punto con tangente horizontal.

Sea f: $[a, b] \rightarrow \Re$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que $f'(c) = 0$.

Demostración

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor máximo y un valor mínimo absolutos en dicho intervalo. Pueden ocurrir dos casos:

1.- Estos valores máximos y mínimos no se alcancen en el interior del intervalo. Entonces se alcanzan en los extremos a y b. Pero al ser por hipótesis $f(a) = f(b)$ entonces el valor máximo coincide con el valor mínimo y la función es constante. Por tanto $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$.

2.- En caso contrario el máximo o el mínimo o ambos pertenecen al interior del intervalo. Sea por ejemplo $\alpha \in (a, b)$ el valor máximo. Al ser la función derivable en (a, b), existe $f'(\alpha)$.

Por ser α un máximo, la función es creciente para valores x menores a α por lo que

$$\lim_{x \to \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0$$

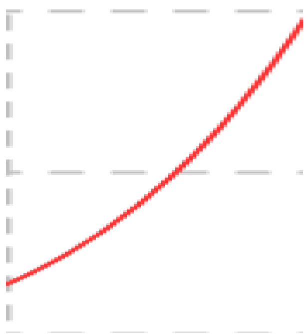
Y es decreciente para valores x mayores a α por lo que

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0$$

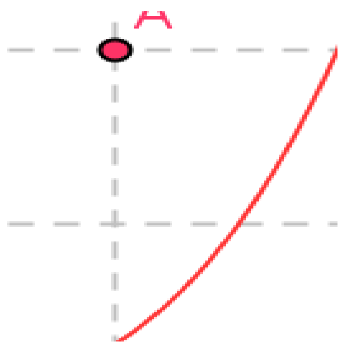
Al existir la derivada ambos límites deben coincidir y para ello: $f'(\alpha) = 0$.

Análisis de las condiciones

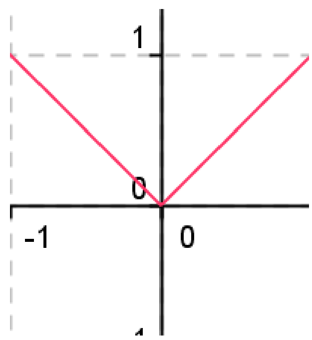
Basta que una de las condiciones no se verifique, para que tenga por qué tener la función un punto de tangente horizontal:



Si $f(a) \neq f(b)$ no tiene que tener un punto de tangente horizontal

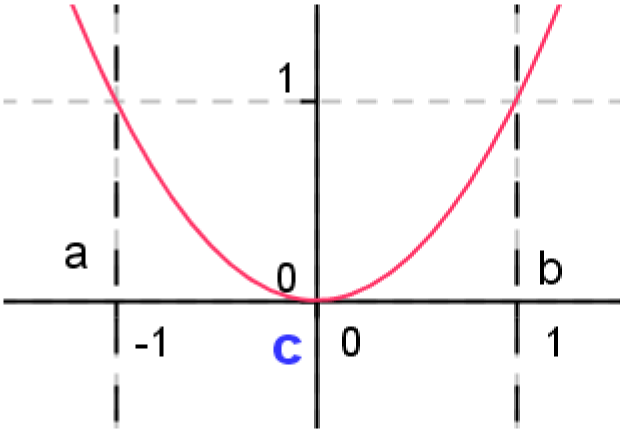


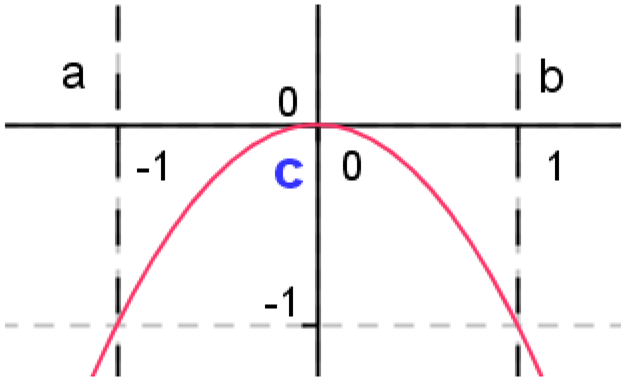
Si no es continua en $[a, b]$ no tiene que tener un punto de tangente horizontal



Si no es derivable en (a, b) no tiene que tener un punto de tangente horizontal

Sin embargo si se verifican las hipótesis, entonces existe un punto en el que la tangente es horizontal.





Actividades resueltas

- *Dos coches de carreras parten al mismo tiempo y del mismo lugar y llegan a la meta empatados. Demuestra que en algún momento llevaron la misma velocidad.*

Llamamos f y g a las funciones que indican el espacio recorrido por cada coche, y sean a el instante de partida y b el de llegada. Las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Definimos una función $h(x) = f(x) - g(x)$ que verifica las condiciones del teorema de Rolle, es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $h(a) = f(a) - g(a) = 0 = h(b) = f(b) - g(b)$. Por tanto existe un instante c en el que $h'(c) = 0$, luego $f'(c) - g'(c) = 0$, y $f'(c) = g'(c)$.

- *Determina el valor de b para que la función* $f(x) = x^2 - 3x + 5$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $[1, b]$ e indica dónde se verifica la tesis.

La función es continua y derivable en toda la recta real luego lo es en cualquier intervalo $[1, b]$. Queremos que $f(1) = f(b)$, por tanto $f(1) = 3 = b^2 - 3b + 5$, por lo que $b = 2$. $f'(x) = 2x - 3 = 0$, por lo que el punto c donde se anula la derivada es $c = 3/2 \in [1, 2]$.

Teorema del valor medio

Sean $f, g: [a, b] \to \Re$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b). Existe un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que:

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Demostración

Construimos la función $h: [a, b] \to \Re$; $h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.

La función h es continua en $[a, b]$ pues es suma de funciones continuas, f y g, multiplicadas por números, $(f(b) - f(a))$ y $(g(b) - g(a))$ que existen.

La función h es derivable en (a, b) pues está formada por funciones derivables.

Además $h(a) = h(b)$. En efecto: $h(a) = (f(b) - f(a))\, g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)\, g(a) - g(b)\, f(a)$, y

$h(b) = (f(b) - f(a))\, g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = - g(b)\, f(a) + f(b)\, g(a)$, por lo que son iguales.

La función h verifica las condiciones del teorema de Rolle, por lo que existe un punto c de (a, b) en el que $h'(c) = 0 = (f(b) - f(a))\, g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Corolario (Teorema del valor medio)

Una consecuencia del teorema anterior es este corolario, que también recibe el nombre de teorema del valor medio.

Sea f: $[a, b] \rightarrow \Re$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Existe un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Nos garantiza bajo qué condiciones existe un punto en el que la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

Demostración

En el teorema anterior tomamos como función $g(x) = x$, que es continua y derivable en toda la recta real. Como $g'(x) = 1$, sustituimos:

$0 = (f(b) - f(a))\, g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))\, 1 - (b - a))f'(c)$. De donde:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Actividades resueltas

- *Se considera la función.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + m & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

a) Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4, 2]$.

b) Hallar los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

Selectividad Junio 1999

a) El teorema del valor medio requiere que la función sea continua en el intervalo cerrado y derivable en el intervalo abierto. La función está definida a trozos por funciones polinómicas que son siempre funciones continuas y derivables, luego el único punto dudoso es $x = -2$. Para que sea continua debe verificarse que $(-2)^2 + n(-2) = (-2)^3 + m \Rightarrow 4 - 2n = -8 + m \Rightarrow 12 = 2n + m$.

Para que sea derivable: $f'(x) = \begin{cases} 2x + n & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ en $x = -2$ debe verificarse que: $2(-2) + n = 3(-2)^2 \Rightarrow -4 + n = 12 \Rightarrow n = 16$.

Por tanto $12 = 2(16) + m \Rightarrow m = 12 - 32 = 20$, y $f(x) = \begin{cases} x^2 + 16x & \text{si } x < -2 \\ x^3 + 20 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$, verifica las hipótesis del teorema en $[-4, 2]$.

b) El teorema garantiza que existe un punto $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$f'(x)=\begin{cases}2x+16 & \text{si x < -2}\\ 3x^2 & \text{si x > -2}\end{cases}$$ debe ser:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(2^3+20)-((-4)^2+16(-4))}{2-(-4)}=\frac{(28)-(16-64)}{6}=\frac{76}{6}=\frac{38}{3}.$$

Igualamos ambas ramas a 38/3 y obtenemos: 2x + 16 = 38/3 $\Rightarrow$ x = 38/6 – 8 = –10/6 $\cong$ –1'666 > –4.

3x^2 = 38/3 $\Rightarrow$ $x=\sqrt{\frac{38}{9}}=\frac{\sqrt{38}}{3}\cong\frac{6'1}{3}>2$ no pertenece al intervalo.

Solución: c = –10/6 $\in$ (–4, 2).

Actividades propuestas

20. Se considera la función: $f(x)=\dfrac{1}{2+senx-\cos x}$. Se pide:

Comprueba la existencia de, al menos, un punto c ϵ [–π, π] tal que f''(c) = 0. (Sugerencia: Utiliza el teorema de Rolle). Demuestra que en c hay un punto de inflexión. Selectividad. Curso 05/06. Modelo. Opción B

21. Sea:

$$f(x)=\frac{|x|}{x^2+1}$$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en x = 0.
b) Estudia cuándo se verifica f'(x) = 0. Puesto que f(1) = f(–1), ¿existe contradicción con el Teorema de Rolle en el intervalo [–1, 1]? Selectividad. Curso 08/09. Modelo. Opción B

Nota: Observa que la función no es derivable en (–1, 1) luego no se verifican las hipótesis del teorema.

3.2. La regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno del punto x = a. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ y existe el límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y es: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración

Para simplificar la demostración vamos a suponer que $f(a)=0$ y que $g(a)=0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$ Luego $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La regla de L'Hôpital también puede usarse si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, e incluso si x tiende a ∞.

Para demostrarlo basta tener en cuenta que si $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{\infty}{\infty}$ entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\to\dfrac{0}{0}$

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Calcula* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{xsenx}{1-\cos x}$.

Como si llamamos $f(x) = xsenx$; $g(x) = 1 - \cos x$ se verifica que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{xsenx}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{senx + x\cos x}{senx}$$

De nuevo, tanto el numerador como el denominador se anular para x = 0, luego aplicamos otra vez la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx + x\cos x}{senx} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + \cos x - xsenx}{\cos x} = 2.$$

Es importante validar las condiciones en cada paso para no aplicar la regla cuando no puede aplicarse como en el problema que sigue:

- *Calcula* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{xsenx}{x^2 - \cos x}$.

Observa que ahora $f(0) = 0$ pero que $g(0) = -1$ por lo que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{xsenx}{x^2 - \cos x} = 0$. Pero si aplicamos L'Hôpital por no haber comprobado las condiciones tendríamos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{xsenx}{x^2 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{senx + x\cos x}{2x + senx} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + \cos x - xsenx}{2 + \cos x} = \frac{2}{3}, \text{ que está mal.}$$

- *Calcula* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^2 - 3x + 2}{5x^2 + 8x - 1}$.

Comprobamos que se verifica que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$, por lo que podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 - 3x + 2}{5x^2 + 8x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{14x - 3}{10x + 8} = \lim_{x \to \infty} \frac{14}{10} = \frac{7}{5}.$$

Actividades propuestas

22. Calcula $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} = \frac{senx(1 - senx)}{\cos^2 x}$ (Selectividad Septiembre 1998)

23. Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ (Prueba previa Selectividad 1999)

24. Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$ sabiendo que $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$.

(Selectividad Septiembre 02. Opción B)

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Crecimiento y decrecimiento

Recuerda que:

Si $f'(a) > 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **creciente** en $x = a$.

Si $f'(a) < 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **decreciente** en $x = a$.

Ejemplo:

- *Determina si* $y = 0'2x^2 + 150x - 180$ *es creciente o decreciente en* $x = 5$.

Calculamos la derivada: $y' = 0'4x + 150$; en $x = 5$: $y'(5) = 0'4(5) + 150 = 152 > 0$. La función es creciente.

Actividades propuestas

25. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = -2$?

3.4. Máximos y mínimos

Recuerda que:

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **máximo global o absoluto** si $f(a)$ es el mayor valor que alcanza la función.

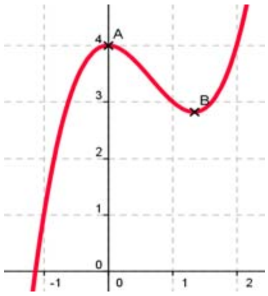
Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **mínimo global o absoluto** si $f(a)$ es el menor valor que alcanza la función.

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **máximo local o relativo** si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el mayor valor de la función en ese intervalo.

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **mínimo local o relativo** si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el menor valor de la función en ese intervalo.

Ejemplo:

La función $y = x^2(x - 2) + 4$ de la gráfica del margen no alcanza ni máximos ni mínimos absolutos, pero alcanza un máximo relativo en punto A (0, 4) y un mínimo relativo en el punto *B*.



Ejemplo:

La función de la gráfica del margen no tiene máximos absolutos, pero alcanza máximos relativos en $x = -1'25$ y en $x = 0'5$.

Tiene tres mínimos que son a la vez absolutos y relativos en $x = -2$, $x = 0$ y en $x = 1$.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Si una función tiene un **máximo o un mínimo** en $(a, f(a))$ y existe $f'(a)$, entonces **$f'(a) = 0$**.

Se denomina **punto singular o punto crítico** de $y = f(x)$ a los puntos en los que se anula la derivada.

Para saber si un punto crítico es un máximo, o un mínimo, o un punto de inflexión podemos utilizar alguno de los tres criterios siguientes:

Criterio 1:

Si $f'(a) = 0$, estudiamos los valores de x próximos a a, tanto a la derecha como a la izquierda.

Criterio 2:

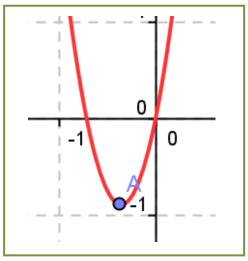
Estudiar el signo de la derivada en puntos x próximos a a, con lo que sabremos si la función crece o decrece en esos puntos.

Criterio 3:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo.

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.

Actividades resueltas



- *Calcula los máximos y mínimos de la función:* $y = 7x^2 + 5x$.

Calculamos la derivada y la igualamos a 0: $y' = 14x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5/14$.

Para saber si es máximo o mínimo calculamos la derivada segunda: $y'' = 14 > 0$. Es un mínimo.

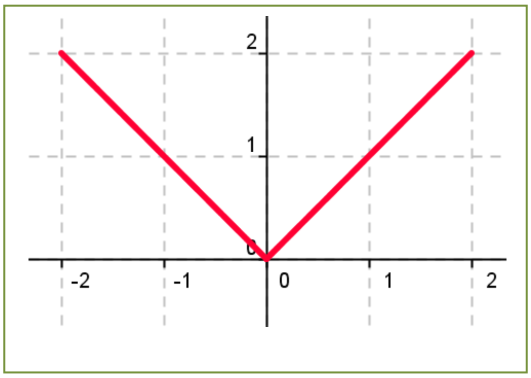
La función es una parábola de vértice (–5/14, 7(–5/14)2 + 5(–5/14)) ≅ (–0'38, –0'89).

Para $x < -5/14$ la función es decreciente, y para $x > -5/14$, es creciente.

Dos observaciones importantes

1) Pueden existir máximos o mínimos en puntos donde no exista la derivada.

Por ejemplo:

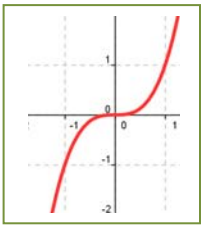


La función valor absoluto de x tiene un mínimo en (0, 0).

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Pero la derivada no se anula en (0, 0). No existe. La derivada a la derecha de 0 vale 1, y la derivada a la izquierda vale –1. Son distintas, luego la función **no** es derivable en (0, 0).

2) Pueden existir puntos donde la derivada valga 0 y sin embargo no sean ni máximos ni mínimos.



Por ejemplo:

La función $y = x^3$ de derivada $y' = 3x^2$, que se anula en (0, 0) no tiene en dicho punto ni un máximo, ni un mínimo. La función es siempre **creciente**. Va a tener en (0, 0) un

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

punto de inflexión de tangente horizontal.

Para estar seguros de no perder ninguna posible solución conviene, para determinar todos los máximos y mínimos absolutos y relativos de una función, buscar:

1) Los puntos donde se anula la derivada: $f'(x) = 0$.

2) Los puntos donde la función no sea derivable.

3) Los valores de $f(x)$ en los extremos del dominio de definición de la función.

Determinar el valor de la función en todos estos puntos y comparamos estos valores.

Actividades resueltas

- *Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$, *en el intervalo* [1, 3] *y en el intervalo* [1, 5].

La función es derivable en todos los puntos. $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$, que se anula en 2 y 4. En el intervalo [1, 5] ambas valores pertenecen al intervalo, por lo que los valores a valorar son: 1, 2, 4 y 5. En el intervalo [1, 3] el punto 4 no pertenece, luego tenemos que valorar 1, 2 y 3.

$$f(1) = 16;\ f(2) = 20;\ f(3) = 18;\ f(4) = 16;\ f(5) = 20.$$

Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 6x - 18$, en los puntos donde se anula la derivada:

$f''(2) = -6 < 0$; $f''(4) = 6$. En (2, 20) se alcanza un máximo relativo y en (4, 16) un mínimo relativo.

Intervalo [1, 3]: Máximo absoluto y relativo es (2, 20) y mínimo absoluto es (1, 16).

Intervalo [1, 5]: Máximos absolutos es (5, 20) y (2, 20), mínimos absolutos son (1, 16) y (4, 16).

- *Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función* $f(x) = |x|$ en el intervalo [–6, 2].

La función no es derivable en (0, 0). La derivada vale 1 si x es positivo y –1 si x es negativo, por lo que la derivada no se anula en ningún punto. Estudiamos los extremos del intervalo, –6 y 2:

$$f(-6) = |-6| = 6;\ f(2) = |2| = 2.$$

El mínimo absoluto de la función se alcanza en (0, 0) y el máximo absoluto en (–6, 6). Hay un máximo relativo en (2, 2).

Actividades propuestas

26. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = x^4 - 1$;

b) $y = 3x^3 + 9$;

c) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$;

d) $y = 9x^3 - 3x^2$.

27. La velocidad de propagación de una onda de longitud x en aguas profundas viene dadas por la fórmula $v = \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{a}{x}}$ en la que a es una constante conocida. Comprueba que la longitud que corresponde a un mínimo de velocidades $x = a$.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

28. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.

29. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–5, 5] y en el intervalo [1, 4].

30. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = |x - 9|$;

b) $y = |x + 2| + |x - 3|$.

31. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–4, 4].

32. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Contesta, razonadamente, a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto $x = 0$?

b) ¿Es derivable en el punto $x = 0$?

c) ¿Alcanza algún extremo? (Prueba previa Selectividad 1999)

33. Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Determinar sus máximos y mínimos relativos. Septiembre 02. Opción A. Selectividad

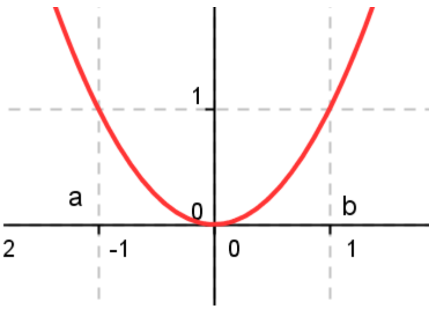
3.5. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Sea f: $[a, b] \to \Re$ una función. f es **convexa** $[a, b]$ si para toda terna x_0, x, x_1 del intervalo con $x_0 < x < x_1$ se verifica que:

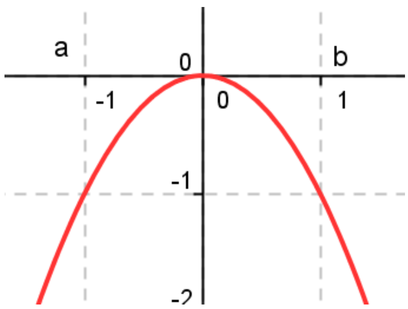
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

f es **cóncava** $[a, b]$ si, en las mismas condiciones, se verifica que:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$



Convexa



Cóncava

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Observa que para esta definición no se ha impuesto ser derivable a la función. Si la función es derivable dos veces en el intervalo de estudio se tiene:

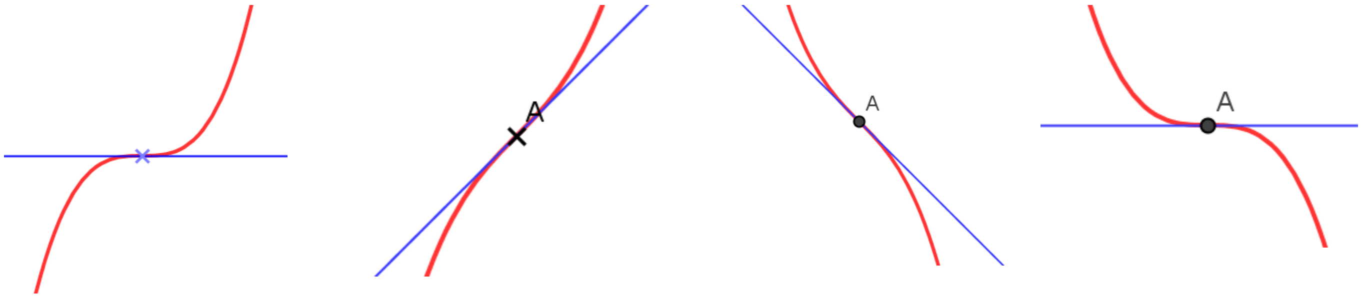
f es **convexa** $[a, b] \Leftrightarrow f'$ es estrictamente creciente $\begin{cases} \Rightarrow f'' \geq 0 \\ \Leftarrow f'' > 0 \end{cases}$

f es **cóncava** $[a, b] \Leftrightarrow f'$ es estrictamente decreciente $\begin{cases} \Rightarrow f'' \leq 0 \\ \Leftarrow f'' < 0 \end{cases}$

Observa también que si la función es convexa, la gráfica queda por encima de la recta tangente, y si es cóncava, por debajo.

Del mismo modo que en los puntos de la gráfica de una función en los que se anula la derivada primera se produce un cambio, pasa de creciente a decreciente, o viceversa, en los puntos en los que se anula la derivada segunda también se produce una modificación en la gráfica, pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

Vamos a analizar ese cambio estudiando algunos casos:



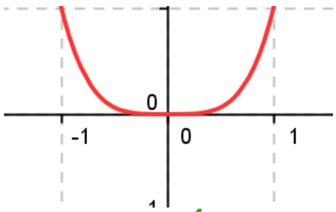
En cuatro gráficas de arriba hemos señalado un punto y la recta tangente en ese punto. La derivada segunda se anula en los puntos señalados de las cuatro gráficas. Analiza lo que ocurre. Observa que la recta tangente deja a la gráfica unas veces por arriba y otras por abajo. Diríamos que atraviesa la gráfica. Hay un cambio en la concavidad.

Esos puntos se llaman **puntos de inflexión**.

Si la función $y = f(x)$ tiene un **punto de inflexión** en $x = a$, y existe la segunda derivada, entonces $f''(a) = 0$

Si además, como en la primera gráfica y en la cuarta, se anula la derivada primera se dice que tiene un punto de inflexión de tangente horizontal.

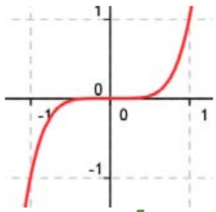
Observa las gráficas siguientes. Hay máximos, mínimos y puntos de inflexión en el origen (0, 0).



$y = x^4$

y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0; $y^{iv)}(0) > 0$

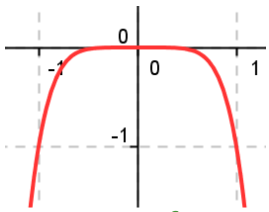
Mínimo



$y = x^5$

y'(0) = y''(0) = y'''(0) = $y^{iv)}(0) = 0$; $y^{v)}(0) \neq 0$

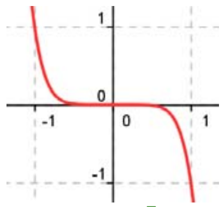
Punto de inflexión de tangente horizontal



$y = -x^6$

y'(0) = y''(0) = y'''(0) = $y^{iv)}(0)$ = $y^{v)}(0) = 0$; $y^{vi)}(0) < 0$.

Máximo



$y = -x^7$

y'(0) = y''(0) = y'''(0) = $y^{iv)}(0)$ = $y^{v)}(0) = y^{vi)}(0) = 0$; $y^{vii)}(0) \neq 0$

Punto de inflexión de tangente horizontal

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Las propiedades estudiadas se pueden generalizar con el siguiente teorema:

Sea f: $[a, b] \to \Re$ una función $k + 1$ veces derivable en $[a, b]$ y sea c un punto de (a, b). Entonces:

1) Si $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{k)}(c) = 0$, $f^{k+1)}(c) \neq 0$ y k es impar:

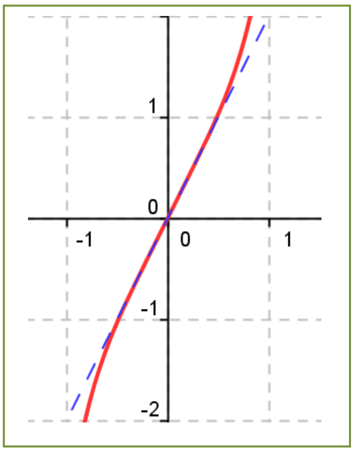
Si $f^{k+1)}(c) < 0$ entonces f alcanza un máximo relativo en c.

Si $f^{k+1)}(c) > 0$ entonces f alcanza un mínimo relativo en c.

2) Si $f''(c) = \ldots = f^{k)}(c) = 0$, $f^{k+1)}(c) \neq 0$ y k es par, entonces f tiene un punto de inflexión en c. Si además $f'(c) = 0$ la tangente del punto de inflexión es horizontal.

Actividades resueltas

- *Determina los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la función* $f(x) = x^5 + 2x$.



Calculamos la derivada segunda $f'(x) = 5x^4 + 2$; $f''(x) = 20x^3$. Se anula en $x = 0$. Calculamos las derivadas sucesivas:

$f'''(x) = 60x^2$; $f^{IV)}(x) = 120x$; $f^{V)}(x) = 120$; $f'''(0) = f^{IV)}(0) = 0$ y $f^{V)}(x) \neq 0$.

La primera derivada que no se anula en $x = 0$ es la quinta, es impar, luego en (0, 2) hay un punto de inflexión, y como no se anula la derivada primera no es un punto de inflexión de tangente horizontal.

La derivada segunda $f''(x) = 20x^3$ es positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$, por tanto la función es convexa si $x > 0$ y cóncava si $x < 0$.

Actividades propuestas

34. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$,

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

b) Halla los máximos y mínimos relativos de f

c) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f? Justifica razonadamente la respuesta.

Septiembre 04. Opción A

35. Determina los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones siguientes:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 11$;

b) $y = x^3 - 7x + 8$;

c) $y = x^5 + 2$;

d) $y = x^4 - 3$.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.6. Representación gráfica de una función

Otra de las aplicaciones de la derivada es la representación gráfica de funciones. Se va a dedicar el próximo capítulo a recoger todo lo que ya sabes, para hacerlo. Ahora únicamente vamos esbozarlo. Vamos a seguir un orden para hacerlo:

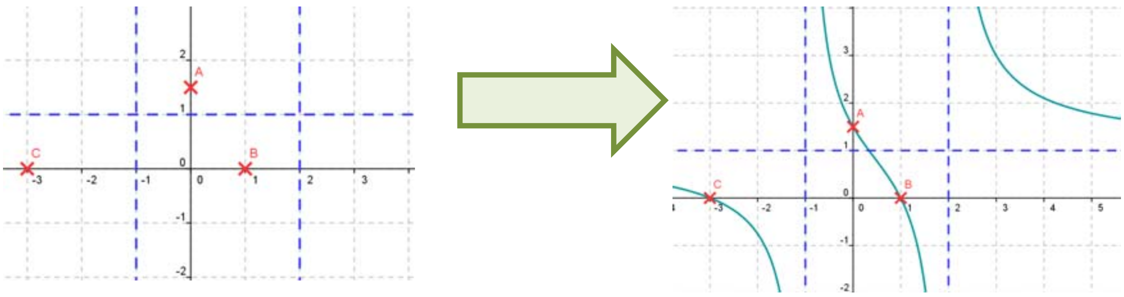
1) Puntos de intersección con los ejes coordenados.
2) Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito.
3) Derivada primera: crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
4) Derivada segunda: concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Actividades resueltas

- *Haz un esbozo de la gráfica de la función:* $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-2)}$

1) Puntos de intersección con los ejes coordenados: En ocasiones es difícil encontrarlos. En otras es sencillo como en este caso. Para $x = 0$ $y = 3/2$, $A(0, 3/2)$. La ordenada vale 0 para $x = 1$ y para $x = -3$, $B(0, 1)$, $C(0, -3)$.
2) Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito: La función está definida en toda la recta real excepto en los valores que anulan al denominador, donde tenemos dos asíntotas verticales: $x = -1$ y para $x = 2$. Cuando x tiende a infinito la y tiende a 1, luego tenemos una asíntota horizontal: $y = 1$.

En muchas ocasiones con esta información ya somos capaces de hacer un primer esbozo de la gráfica:



- *Haz un esbozo de la gráfica de la función:* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x} & si\ x > 0 \\ \dfrac{x^2-2x+2}{x+1} & si\ x \le 0 \end{cases}$

1. ***Puntos de intersección con los ejes coordenados.***

La rama I no corta al eje de abscisas. La rama II tampoco. Si $x = 0$ en la rama II tenemos que $f(0) = 2$, el punto B (0, 2) de la gráfica.

2. ***Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito.***

La función $f(x)$ es continua en todos los puntos salvo en {0, –1}

Comportamiento en $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. A la izquierda de 0 toma el valor 2.

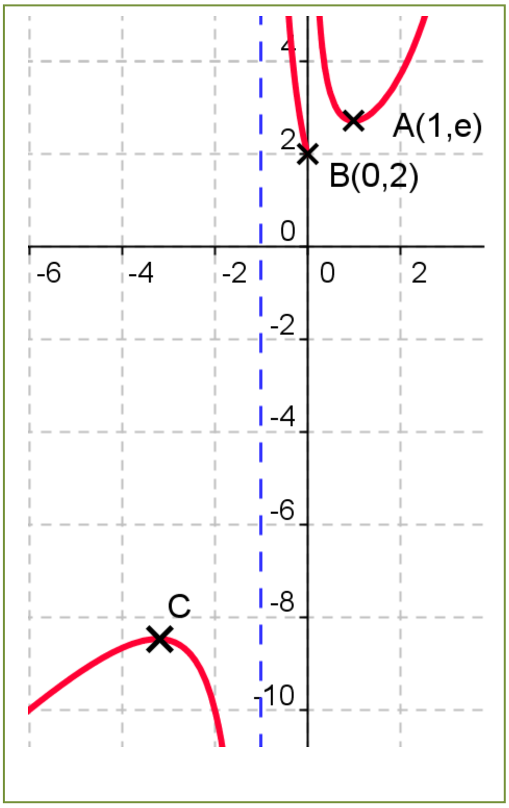
En $x = -1$ tiene una asíntota vertical.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Comportamiento en x tiende a ∞: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+2}{x+1} = -\infty$.

3. *Derivada primera: crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.'*

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x-1)}{x^2} & si\ x>0 \\ \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} & si\ x<0 \end{cases}$$



En x = 0 no es derivable pues no es continua.

Observando el signo de la derivada tenemos que la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1-\sqrt{5})$, decreciente en $(-1-\sqrt{5}$,–1), decreciente en (–1, 0), y es decreciente en (0, 1) y creciente en (1, +∞)

En x = 1 hay un mínimo: A (1, e).

En x = $-1-\sqrt{5}$ hay un máximo, en el punto C de la gráfica.

4. *Derivada segunda: concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.*

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3} & si\ x>0 \\ \frac{10}{(x+1)^3} & si\ x<0 \end{cases} +$$

La derivada segunda no se anula en la rama I ni en la rama II. No hay puntos de inflexión. Es cóncava de $(-\infty, -1)$ y convexa de (–1, 0) y de (0, +∞).

Actividades propuestas

36. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$

a) Indicar el dominio de definición de la función f y sus asíntotas

b) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo [–1, 1]. Selectividad Opción A

37. Sea la función $f(x) = \frac{senx}{2-\cos x}$ definida en el intervalo cerrado y acotado [–2π, 2π]. Se pide:

a) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

b) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado. Selectividad. Septiembre 03. Opción A

38. Sea la función $f(x) = 2x\,|4-x|$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad

b) Dibuja su gráfica. Selectividad. Septiembre 03. Opción B

39. Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$. Selectividad Junio 04. Opción A

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.7. Problemas de optimización

A los problemas de máximos y mínimos se les suele denominar problemas de optimización.

Actividades resueltas

- *Cortando un mismo cuadrado de las cuatro esquinas de una hoja rectangular de dimensiones a y b se puede construir una caja abierta por la parte superior. Calcula el lado del cuadrado que hay que cortar para que la caja tenga máxima capacidad.*

El volumen de la caja es el producto de los tres lados. Si cortamos las esquinas el rectángulo de longitud b tendrá ahora una longitud $b - 2x$. Lo mismo el de longitud a. La altura es x.

$$V = (b - 2x)(a - 2x)x = 4x^3 - 2bx^2 - 2ax^2 + abx.$$

Para hacer el volumen máximo, derivamos e igualamos a cero.

$$V' = 12x^2 - 4(b + a) + ab = 0 \Rightarrow x = \frac{b+a-\sqrt{b^2+a^2-ab}}{6}$$

Por consideraciones geométricas, el valor obtenido es un máximo, pues si el lado del cuadrado vale 0, o si vale la mitad del lado, el volumen de la caja es mínimo, vale 0, pues no se forma caja.

- *Entre todos los cilindros de volumen V dado determina el radio y la altura del de mayor superficie.*

El volumen de un cilindro es igual a: $V = \pi r^2 h$, y su superficie total es igual a $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

La superficie depende de dos variables, el radio y la altura. Como nos dicen que el volumen es dado, despejamos de su expresión por ejemplo la altura, y la sustituimos en la superficie:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow S = 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Derivamos la superficie respecto a r, e igualamos a cero la derivada:

$$S' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi}$$

Para saber si ese valor del radio conduce a un máximo o a un mínimo. Hallamos el signo de la derivada segunda:

$$S'' = \frac{4V}{r^3} + 4\pi = \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} + 4\pi = 12\pi > 0$$

La solución obtenida nos da una superficie mínima.

$$h = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \; ; \; r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Actividades propuestas

40. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.

41. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio R = 5 cm. (*Ayuda*: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

42. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

(Junio 04. Opción A Selectividad)

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Interés de las derivadas

El Análisis y el Cálculo Infinitesimal han sido durante trescientos años una de las ramas más importantes de la Matemática, y las derivadas constituyen su parte central, ya que permiten comprender las ciencias físicas y la técnica. Las cuestiones que plantean proporcionan una fuente de teoría e ideas que permiten avanzar al pensamiento.

La razón de esta gran cantidad de aplicaciones se debe a que la derivada se puede interpretar como el índice de cambio de una variable respecto de otra, y las variables que explican los fenómenos se relacionan entre sí por sus índices de cambio.

Las derivadas sirven como modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas. Desde sus comienzos han contribuido de manera muy notable a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza. Su origen histórico es inseparable de sus aplicaciones a las ciencias físicas, químicas, medicina, ciencias sociales e ingeniería, ya que para resolver muchos problemas significativos se requiere la determinación de una función que debe satisfacer una ecuación en la que aparece su derivada.

Isaac Newton

G. W. Leibniz

Antecedentes

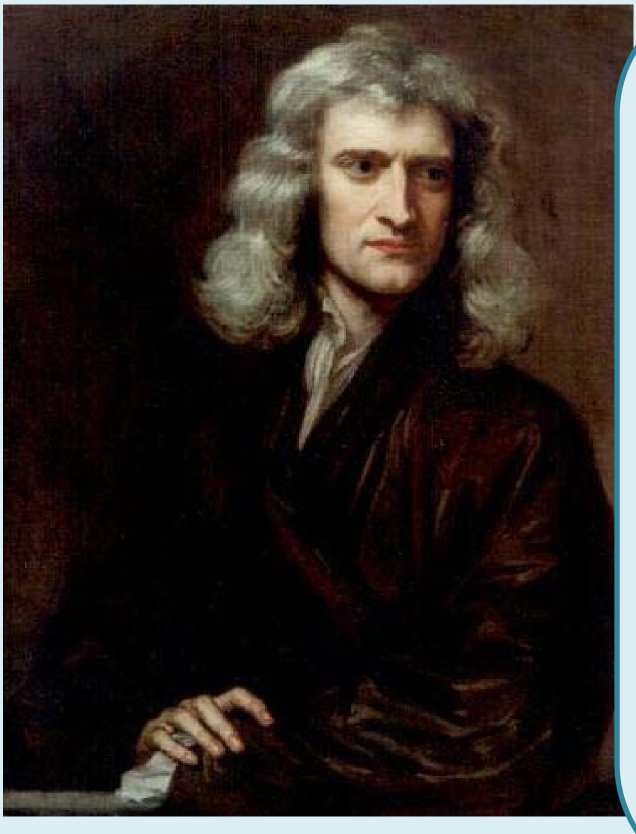
Lo infinitamente pequeño tenía para *Galileo Galilei* (1564 – 1642) una importancia más inmediata que lo infinitamente grande, puesto que lo necesitaba en su dinámica. Galileo analizó el comportamiento del movimiento de un proyectil con una componente horizontal y uniforme, y una componente vertical uniformemente acelerada, consiguiendo demostrar que la trayectoria del proyectil, despreciando la resistencia del aire, es siempre una parábola. Estudió el problema del espacio recorrido por un cuerpo en caída libre y se puede considerar que utilizó para su resolución las derivadas.

En 1638 apareció el **problema de la tractriz**, propuesto por *René Descartes* (1596 – 1650) a *Fermat*, que realmente es un problema de tangentes a una curva, (no pudo resolverlo pues no se conocía todavía el concepto de derivada), y fue resuelto en 1674 por *Leibniz* y en 1690 por *Jakob Bernoulli*, cuando ya se conocían los trabajos de *Newton* y *Leibniz*.

El concepto de derivada comienza con *Isaac Newton* (1642 - 1727) y *Gottfried Withelm Leibniz* (1646 – 1716). Dice este último *"Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor"*. Muy pronto los científicos se dan cuenta de que **las derivadas son la expresión matemática de las leyes naturales**.

Newton

Isaac Newton (1642 – 1727) nació el mismo año en que murió *Galileo*. Los problemas que motivaron sus descubrimientos fueron el estudio de la dinámica del punto y del sólido rígido. Sus primeros descubrimientos matemáticos datan de 1665 en que expresó funciones en series de potencias, y empezó a pensar en la velocidad del cambio de magnitudes que varían de manera continua tales como áreas, longitudes, distancias, temperaturas, etc. asociando de manera conjunta ambos problemas, las series infinitas y las velocidades de cambio.



Su primera obra impresa: "*Philosophiae Naturalis* ***Principia*** *Mathematica*" fue en 1687 siendo el trabajo científico más admirado de todos los tiempos, donde es plenamente consciente del papel de la derivada. Escribió, en la segunda ley de los principios, la ecuación de una piedra que cae por acción de la gravedad en diferentes medios: aire, agua, aceite... Indica cómo evoluciona el sistema.

La influencia cultural fue tremenda. La naturaleza obedece a leyes generales. Da origen a la concepción filosófica de *Kant*, al pensamiento de la Ilustración y al determinismo científico por el que el conocimiento de estas leyes llevaría a conocer completamente el pasado y el futuro. Este concepto de que las leyes físicas se pueden expresar mediante derivadas es el único concepto de *Newton* que, en opinión de *Einstein*, sigue hoy totalmente vigente.

Actualmente está claro que el descubrimiento de *Newton* precedió al de *Leibniz* en unos diez años, así como que *Leibniz* hizo sus descubrimientos de forma paralela a los de *Newton*, aunque a *Leibniz* le corresponde la prioridad de su publicación, pues lo publicó en la revista *"Acta Eruditorum"* en 1684.

Entre sus intereses más profundos se encontraban la alquimia y la religión, temas en los que sus escritos sobrepasan con mucho en volumen a sus escritos científicos. Entre sus estudios alquímicos se encontraban temas esotéricos como la transmutación de los elementos, la piedra filosofal y el elixir de la vida.

En 1693 sufrió una gran crisis psicológica, causante de largos periodos en los que permaneció aislado, durante los que no comía ni dormía. En esta época sufrió depresión y arranques de paranoia. Tras la publicación en 1979 de un estudio que demostró una concentración de mercurio (altamente neurotóxico) quince veces mayor que la normal en el cabello de Newton, la mayoría opina que en esta época Newton se había envenenado al hacer sus experimentos alquímicos, lo que explicaría su enfermedad y los cambios en su conducta.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) leyó con atención las obras de *Pascal* sobre la cicloide, y se dio cuenta, hacia 1673, de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias entre las ordenadas y las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. Se hacía pues necesario crear un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos problemas, y lo elegido fue especialmente afortunado ya que facilitó el razonamiento lógico. Utilizó la notación que hoy día se emplea de *dx* y del signo de integral, fue el primero en introducir el término "*derivar*" en el sentido de "*deducir*" (en una carta de *Leibniz* a *Newton*).

El problema crucial que resolvió el cálculo de *Newton* y *Leibniz* fue el siguiente. Si una variable y depende de otra x, y se conoce la tasa de variación de y respecto de x para cambios muy pequeños de la variable x, lo que *Leibniz* ya denotó: $dy = f(x)\cdot dx$, entonces la determinación de y respecto de x se puede realizar mediante el cálculo de un área, lo que es conceptualmente mucho más simple. Esta idea de generalizar las operaciones de derivación e integración como inversas la una de la otra, es el núcleo fundamental de sus descubrimientos. Ya en el siglo XVII se habían resuelto muchos problemas particulares: la tractriz, la braquistócrona, la catenaria y algunos problemas isoperimétricos, pero el interés del trabajo de *Newton* y *Leibniz* reside en la generalización.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Madame de Châtelet

Gabrielle Émilie de Breteuil, (1706 - 1749), marquesa de Châtelet fue una dama francesa que tradujo los "*Principia*" de Newton y divulgó los conceptos del Cálculo en su libro "*Las instituciones de la física*". Era una dama de la alta aristocracia y fácilmente podía haber vivido una vida inmersa en los placeres superficiales, y no obstante fue una activa participante en los acontecimientos científicos que hacen de su época, el siglo de las luces, un periodo excitante.

En sus salones, además de discutir de teatro, literatura, música, filosofía... se polemizaba sobre los últimos acontecimientos científicos. ¿Podéis imaginar una marquesa estudiando matemáticas? ¿Podéis imaginar unos salones dorados y cubiertos de tapices en cuyas tertulias, en lugar de hablar de cotilleos y frivolidades, se discutiera con ardor sobre Ciencia? ¿Se deliberara acaloradamente sobre el concepto de fuerza, de masa, de derivada o de función?

Mme. de Châtelet, al traducir y analizar la obra de Newton, propagó sus ideas desde Inglaterra a la Europa continental. Quizás, gracias a ella, el determinismo científico de Newton permaneció como idea filosófica hasta mediados del siglo XIX.

Madame de Châtelet era marquesa y se dedicaba con pasión al estudio. Un cráter del planeta Venus lleva el nombre de Châtelet en su honor.

Se conserva un retrato al óleo de ella pintado por Maurice Quentin la Tour, y comentado por un viajero con estas palabras *“adornada, cargada de diamantes que parecía una Venus de la Ópera..., a diferencia de aquella, ésta estaba en la mesa de trabajo, con sus instrumento y sus libros de matemáticas...”*. En ese retrato podemos verla vestida con su traje de época, pues disfrutaba maquillándose y vistiéndose para la corte, pero con un libro delante, estudiando, y con un compás en la mano.

Escribió ***Las instituciones de la física***. Convencida de muchas de las ideas de Descartes, Leibniz y Newton escribió su libro intentando explicarlo todo mediante el razonamiento cartesiano. Así supo aunar en lo principal las teorías de los tres grandes sabios, y sin embargo estaba en contra de todas las corrientes, porque siempre encontraba algo en sus teorías con lo que no estaba de acuerdo.

Escribió también un interesante *Discurso sobre la felicidad,* en el que opinaba que la felicidad se conseguía entre otras cosas con el estudio. Escribió que el amor al estudio era más necesario para la felicidad de las mujeres, ya que es una pasión que hace que la felicidad dependa únicamente de cada persona, “¡quien dice sabio, dice feliz!”.

Hacia 1745 comenzó a traducir los *Philosophiae Naturalis* ***Principia*** *Mathematica* de Newton del latín al francés, con extensos y válidos comentarios y suplementos que facilitaban mucho la comprensión. Gracias a este trabajo se pudo leer en Francia esa obra durante dos siglos, lo que hizo avanzar la Ciencia.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Definición de derivada	$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$	
Recta tangente	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangente a $y = x^3 + 2x$ en el punto (0, 0): $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$.
Teorema de Rolle	f: $[a, b] \to \Re$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ existe $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = 0$.	
Teorema del valor medio	f: $[a, b] \to \Re$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Existe $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$	
Regla de L'Hôpital	f y g derivables en un entorno del punto $x = a$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ y existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow$ existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.	
Crecimiento y decrecimiento	Si $f'(a) > 0$ entonces $y = f(x)$ es creciente en $x = a$. Si $f'(a) < 0$ entonces $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.	$y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 = 0$ $\to x = 1, x = -1$. • Para $x < -1$, $y' > 0 \to y$ creciente. • Para $-1 < x < 1$, $y' < 0 \to y$ decreciente • Para $x > 1$, $y' > 0 \to y$ creciente
Máximos y mínimos	Si $(a, f(a))$ es un máximo o un mínimo de $y = f(x)$ y existe $f'(a)$ entonces $f'(a) = 0$. Si $f'(a) = 0$ entonces $(a, f(a))$ es un punto crítico. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo. Si $(a, f(a))$ es un punto de inflexión de $y = f(x)$ y existe $f''(a)$ entonces $f''(a) = 0$. $f''(a) < 0 \Rightarrow$ cóncava. $f''(a) > 0 \Rightarrow$ convexa	$y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 \to$ $y'' = 6x$. $y'(-1) = 0$, $y''(-1) < 0$, luego $(-1, 2)$ es un máximo relativo. $y'(1) = 0$, $y''(1) > 0$, luego $(1, -2)$ es un mínimo relativo. $(0, 0)$ es un punto de inflexión

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Concepto de derivada

1. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1, 4, 5...$ ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.

a) f es derivable en $x = 1$, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto.

b) f ni es continua en $x = 1$ ni derivable en dicho punto (Selectividad Septiembre 1994)

4. ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta. (Selectividad Junio 1995)

5. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punto $x = 5$.

6. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0'03x - 0'002x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ km.

7. Al caer un cuerpo en el vacío la distancia d (en metros), recorrida a los t segundos viene dada aproximadamente por la expresión: $d = 5t^2$. (La expresión es $d = (1/2)gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad terrestre, aproximadamente de 9'8):

a) ¿A qué velocidad llegará al suelo una persona que en un incendio se lance a la lona de los bomberos y tarde 8 segundos en llegar a ella?

b) ¿A qué velocidad llegará si se lanza desde una altura de 20 metros?

8. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 30x - 0'5x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.

9. Un determinado gas ocupa un volumen de 3 m³ a una presión de 3 Newtons por m². Según la ley de Boyle a cada presión ejercida sobre el gas corresponde un volumen dado por $V = 10/P$. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 9 Newtons por m². ¿Y cuándo es de 18 Newtons por m²? ¿Es la mitad?

10. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3 + 5$ en $x = 2$.

b) $y = 3x^2 + 7x - 2$ en $x = 1$.

c) $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en $x = 0$.

11. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 2x$.

12. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{4x^3}$ en $x = 0$.

13. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

14. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

15. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.

16. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

Cálculo de derivadas

Si ya sabes derivar, puedes no hacer estos ejercicios.

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 + 5x - 7$ b) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

c) $y = 6x^2 - 4x + 7$ d) $y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3$

18. Calcula:

a) $D(3x^2 + 6x^4 - 9x)$ b) $D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3)$

c) $D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8)$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2 + 4x - 3/x$ b) $y = 7x^3 - 5x^2 + 4\sqrt{x}$

c) $y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2)\cdot(x^2-3x+1)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x}\cdot(x+3)}{(x^2-3)}$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{(x-3)\cdot(2x-4)}{x+5}$ b) $y = \frac{(2x^2+5)\cdot(7x-3)}{5x-8}$

c) $y = \frac{(2x+3x^2)\cdot(4x^5-5)}{6x+7}$ d) $y = \frac{5(x+2)\cdot(4x-6)}{2(x+5)\cdot(6x+3)}$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^3 + 5)\cdot(8x^6 - 7)$; b) $y = (9x^3 - 3)\cdot(7x^4 + 6)$; c)

22. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-2}{x+2}$; b) $y = \sqrt{x-2}\cdot(6x^3 - 3x)$; c) $y = \frac{4x^3 - 7x^2}{8x^4 - 4x^3}$; d) $y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4}$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^6 - 5x^2)^9$ b) $y = (2x^4 - 7x^6)^5$

c) $y = \sqrt{(2x^7 - 6x^5)^3}$ d) $y = \sqrt[5]{(3x^4 + 6x^9)^7}$

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{2x^3+3} \cdot (4x^7 + 6x^2)^6$ b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{5x^3+7x^2-2}}{3x+4}$

c) $y = (7x^3 + 3)^5 \cdot (4x^5 - 8x^8)$ d) $y = \dfrac{(5x^3-7x^2)^9}{(9x^4-3x^3)^2}$

25. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = (5x)^{x^5-3x^3}$ b) $y = (3x+6)^{(4x^3+2x^2)}$

c) $y = e^{(3x^5-6x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(5x+1)^{(3x^4-4x^5)^3}}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+7x^3}$ b) $y = (e^{3x^3-5x^2})^7$

c) $y = e^{(4x^5+8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(5x^5-3x^8)^2}}$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = ln((5x^5 - 3x^3)^{12}(3x + 1))$ b) $y = \ln\sqrt{(2x^3+5x^2)^3}$

c) $y = \ln\sqrt{\dfrac{7x^5-5x}{2x-3}}$ d) $y = \ln\sqrt[3]{(3x^4-5x^5)^2}$

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{5\cos(x)}{1+3sen(x^2)}$ $f(x) = sen(5sh^3 3x)$

b) $f(x) = ch(3sh(2x))$ $f(x) = th(5x+7x^2)$

29. Recuerda la definición de cosecante: $cosec(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$. Demuestra que: $(cosec(x))' = -\dfrac{\cos(x)}{sen^2(x)}$

30. Recuerda la definición de secante: $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$. Demuestra que: $(\sec(x))' = \dfrac{sen(x)}{\cos^2(x)}$

31. Recuerda la definición de cotangente: $cotg(x) = \dfrac{1}{tg(x)}$. Demuestra que: $(cotg(x))' = -\dfrac{1}{sen^2(x)}$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7sen(x^7 - 7x^3)$ b) $y = 5sen^5(4x^4 - 5x^5)$

c) $y = sen^6(x) \cdot cos^4(x)$ d) $y = \sqrt[3]{sen^5(3x^4+5x^7)}$

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = sen\dfrac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}$ b) $f(x) = (2x-3x^2)ch(5x-7x^2)$

c) $f(x) = tg\dfrac{\sqrt{16-9senx}}{4+3\cos x}$ d) $f(x) = \dfrac{shx-3xchx}{chx+3xshx}$

34. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}$ b) $f(x) = arcsen\dfrac{2-7x^2}{2+7x^2}$

c) $f(x) = 5\arccos\dfrac{3senx+5}{5-3senx}$ d) $f(x) = arcsen\dfrac{5\cos x}{3senx+2\cos x}$

35. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arcsen\ (7e^{2x-3})$ b) $y = \ln(\sqrt{5arcsen(3x+2)})$

c) $y = arctg\ (\ln\sqrt[3]{4x-5})$ d) $y = arcsen(3tg(5sen(4x-2)))$

36. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arctg\sqrt{\dfrac{7+2senx}{7-2senx}}$ b) $y = e^{arcsen\sqrt{2x-5}}$

c) $y = \cos(3arcsen\dfrac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}})$ d) $y = arcsen\dfrac{7x}{\sqrt{9-2x^2}})$

37. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = log(x^3-5x^5)^8$ b) $y = log_2(8x^2-3x^3)^2$

c) $y = \ln\sqrt{\dfrac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1}}$ d) $y = \ln\sqrt[4]{(3x^3+5x^9)^7}$

38. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = cos(e^{x^5}+\ln(4x^3))$ b) $y = 7cotg^5(5x^3-3x^2)$

c) $y = sen(cos^2(tg(7x^5-3x^3)^2))$ d) $y = \sqrt[3]{ch(sh(3x+2))^4}$

39. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg sh\sqrt{5x^2+2}$ b) $y = \ln(\arg th(5x-3))$

c) $y = \arg ch(e^{3x-6})$ d) $y = \arg sh(\arg th(2x+1))$

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Aplicaciones de la derivada

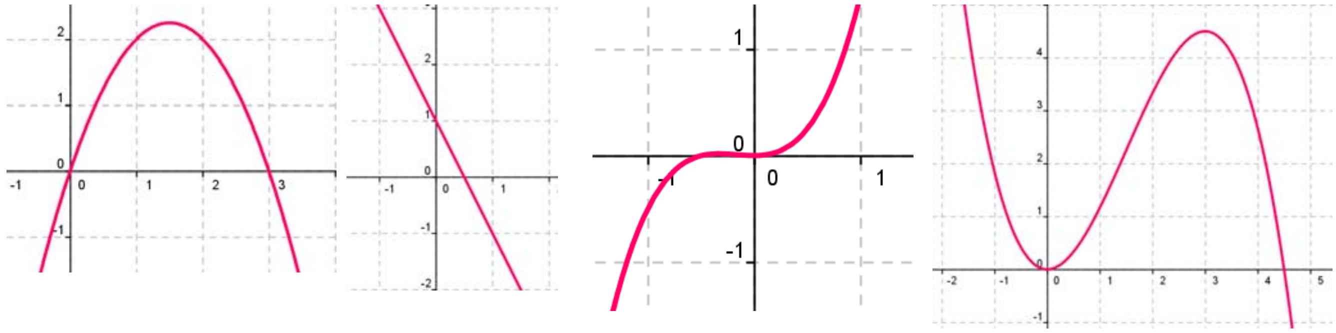
40. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$ (Junio 03. Opción A Selectividad 2003)

41. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}\ -\ \sqrt{4-x}}{4x}$ (Junio 03. Opción A Selectividad 2003)

42. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctan\,x - x}{x^3}$ (Curso 13/14. Opción A Selectividad)

43. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}$ (Junio 14. Opción A Selectividad)

44. Si *f'*(*x*) = *x*(3 – *x*), ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de *f*(*x*)?



45. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/(x-2)^2$.

46. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = (x + 3)/(x - 4)$.

47. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

48. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

50. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [–5, 3] y en el intervalo [1, 5].

51. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 4|$ en el intervalo [–4, 4].

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Problemas

52. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 8t + 0'3t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

53. Sabiendo que la aceleración es la derivada de la función velocidad, calcula la aceleración del vehículo del ejercicio anterior a los $t = 1$ segundos, y a los $t = 6$ segundos. ¿Cómo es la aceleración? ¿Es constante o variable?

Torre Eiffel

54. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

55. Se ha lanzado desde la superficie de la Luna una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 0'8t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 20 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?

56. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Luna a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 0'83t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en la Luna al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? En la Luna se está construyendo una antena de transmisión sobre una base de hormigón que puede agrietarse si cayera un tornillo con una velocidad de 20 m/s. Para garantizar que esto no ocurra, ¿cuál debe ser la altura de la antena?

57. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Marte a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 1'86t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Marte al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Marte.

Marte

58. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Júpiter a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 11'44t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Júpiter al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Júpiter.

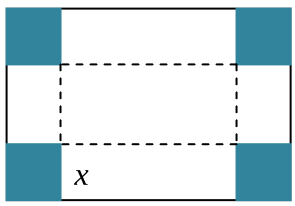
Júpiter

59. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

$e = t^2 - 4t + 3$ $\qquad$ $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ $\qquad$ $e = -t^2 + 4t + 3$ $\qquad$ $e = (3t - 4)^2$

60. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a $0'3$ m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

61. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? *Ayuda:* Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



62. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie lateral sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

La función $\begin{cases} -x+b & x \le 1 \\ 3x^2+d & x>1 \end{cases}$

1. Es continua y derivable en toda la recta real si:

a) $b = -3$, $d = -7$ b) $b = 3$, $d = -1$ c) $b = 3$, $d = -7$ d) $b = -3$, $d = 2$

2. Con los valores de b y d del apartado anterior verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 2], por lo que se anula la derivada en el punto de abscisa:

a) $x = -1$, b) $x = 7/6$ c) $x = 1$ d) $x = 2$

3. Verifica las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3] en el punto de abscisa:

a) $x = -3/8$, b) $x = 7/6$ c) $x = 10/3$ d) $x = 5/3$

4. En cuál de los límites siguientes **no** se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-7x}{5x^2+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = tanx^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = x$ b) $y = x + 8$ c) $y = 0$ d) $y = 2 + x$

6. La función $y = 3senx - 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:

a) cóncava b) tiene un punto de inflexión de tangente horizontal

c) convexa d) tiene un punto de inflexión de tangente oblicua

7. La función $y = 3senx - 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)(x + 2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

b) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente

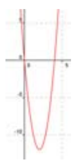
c) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente

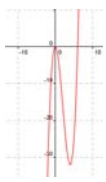
d) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

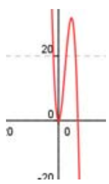
9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:

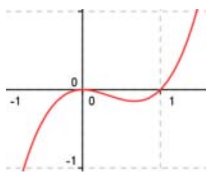
a) $x = 1/2$ b) $x = -1/2$ c) $x = 1$ d) $x = 0$

10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x - 4)x$ entonces su gráfica puede ser:

a) 

b) 

c) 

d) 

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD.

1. La rampa de un tobogán, de esos que descienden los niños en los parques infantiles, está fabricado empalmando dos tramos, dos piezas metálicas. ¿Qué precaución hay que tomar al empalmar las dos piezas para que el descenso no ofrezca dificultad a los niños?

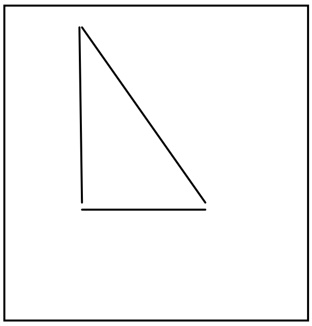
   Se sabe que un tal tobogán tiene un tramo recto en su parte alta y un segundo tramo curvo. El tramo recto es el segmento AB, donde $A(-3, 4)$ y $B(0, 1)$. El tramo curvo empieza en B y desciende hasta el suelo ($y = 0$) al que llega con tangente horizontal. Si este tramo curvo es una parábola $y = ax^2 + bx + c$, hallar ésta. (Prueba previa selectividad 1994)

2. Demuéstrese que si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x = a$, entonces también es derivable en a la función $F(x) = f(x)^2$, y su derivada es $F'(a) = 2f(a)\cdot f'(a)$. (Se pide una demostración directa, no deberá recurrirse a resultados similares, como la derivada de un producto) (Prueba previa selectividad 1994)

3. Se sabe que $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos curvas crecientes en $x = a$. Analícese si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser entonces creciente en $x = a$. (Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme). (Selectividad Junio 1994)

4. Defina derivada de una función f en un punto a. Aplicando la definición de derivada, demostrar que si f es derivable y periódica, de periodo T, entonces su derivada f' también es periódica de periodo T. (Selectividad Junio 1994)

5. En la figura se representa una escalera AB, cuyo extremo inferior A recorre el suelo (recta OA) y cuyo extremo superior B recorre una pared vertical (recta OB). La longitud de la escalera es $AB = 1$. El punto A se aleja de O con velocidad constante c. Se pide:



a) Sin hacer ningún cálculo, indicar cuánto vale la velocidad de B en el momento en el que $OA = OB$.

b) Hallar la velocidad v del punto B en función de la distancia x (OA)

c) La velocidad con la que B llega al punto O.

(Prueba previa selectividad 1995)

6. Dibújese la gráfica de una función de $\Re$ en $\Re$, que cumpla las siguientes condiciones:

   $f'(0) = 0$

   $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$

   $f'(x) > 0$ para $0 < x < ½$

   Señálense otras propiedades de la curva que se dibuje. (Prueba previa selectividad 1995)

7. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable) dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y 120 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente a 40 y 30 km del punto de corte.

   a) Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido.

   b) Hallar el valor mínimo de dicha distancia. (Selectividad Junio 1995)

8. Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = e^{x^2}$. (Selectividad Septiembre 1995)

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

9. La aceleración de un móvil que describe una trayectoria rectilínea es (formulada en función del tiempo t) $a(t) = 4 - \frac{t}{8}$. Se sabe que para t = 0 el móvil está parado en la posición x = 5

a) ¿Para qué valores de t es 0 la velocidad del móvil?

b) Hallar la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo [4, 8] y el espacio recorrido en ese intervalo

c) Hallar la función de posición de este móvil. (Selectividad Septiembre 1995)

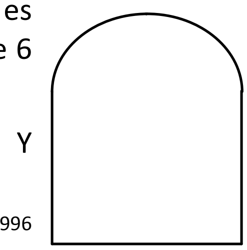
10. Sea $f(x)$ la función definida por las expresiones $f(x) = \begin{cases} 3\operatorname{sen} x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ mx + n & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Calcular n para que $f(x)$ sea continua en el punto x = 0.

b) Calcular m y n para que $f(x)$ sea derivable en el punto x = 0. Prueba previa Selectividad 1996

11. Se considera una caja sin tapadera (consta de cuatro caras laterales y el fondo). Sabiendo que el fondo es un cuadrado y conociendo que el área total (de las cinco caras) es de 12 cm^2, hallar sus dimensiones para que tenga la mayor capacidad posible. Prueba previa Selectividad 1996

12. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (La parte inferior es rectangular, la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Hallar las dimensiones x e y para que la superficie de la ventana sea máxima.

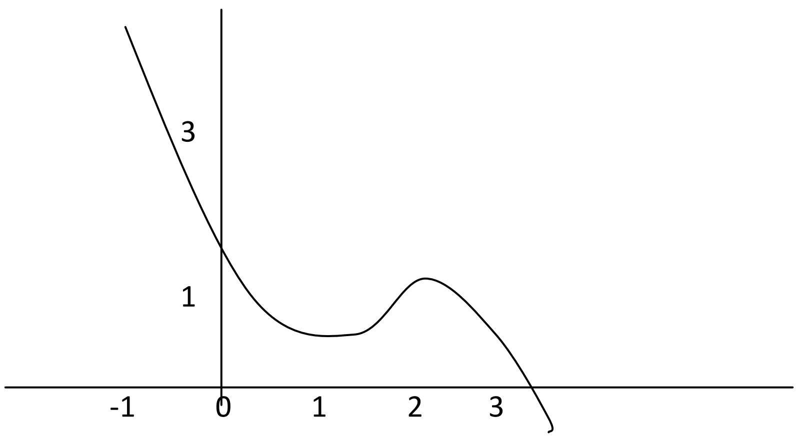


(Expresar los resultados en función de π)

Selectividad Septiembre 1996

13. La gráfica de la figura corresponde a la primera derivada de una función $f(x)$. ¿Qué puede decirse sobre los posibles máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$? Razonar la respuesta.

Selectividad Septiembre 1996



14. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$. Prueba previa selectividad 1997

15. Sea la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$. Estudiar el dominio, las asíntotas, los posibles puntos de máximo y mínimo y hacer un dibujo aproximado de la gráfica de la función. Prueba previa selectividad 1997.

16. Sea la función $f(x) = (x - 1)e^x$. Representar la gráfica de la función $f(x)$ indicando monotonía, extremos, puntos de inflexión y ramas asintóticas. Prueba previa Selectividad 1998

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

17. Sea f: $\Re \to \Re$ una función derivable en $\Re$; sean a y b dos raíces de la derivada $f'(x)$ tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de $f'(x)$. Razonar debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades:

1.- Entre a y b no existe ninguna raíz de $f(x)$

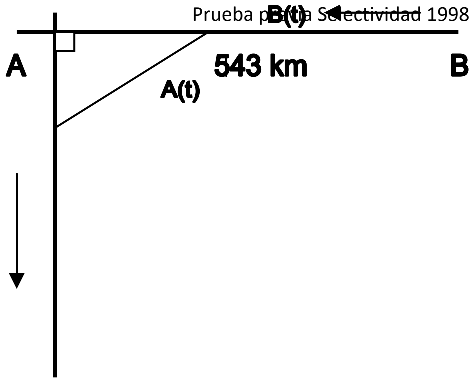
2.- Entre a y b existe una sola raíz de $f(x)$

3.- Entre a y b existen dos o más raíces de $f(x)$. Selectividad Junio 1997

18. Sea la función $f(x) = x\,|x - 1|$ Se pide:

a) Hacer un dibujo aproximado de la función.
b) Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 1$. Selectividad Septiembre 1997

19. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de 12 cm de diámetro. Prueba previa Selectividad 1998



20. Dos avionetas se encuentran situadas a las 9 de la mañana a una distancia de 543 kilómetros, en las posiciones que se indican en la figura. La avioneta A se mueve hacia el sur a una velocidad de 270 km/h, mientras que la avioneta B se dirige hacia el oeste (en dirección a A), a 300 km/h.

a) (1 punto) Escribir las funciones que indican las posiciones de A y B en cada instante, así como la distancia entre ambas.

b) (1 punto) ¿A qué hora será mínima dicha distancia) Selectividad Junio 1999

21. Se considera un triángulo isósceles cuya base (el lado desigual) mide 10 cm y cuya altura mide 6 cm. En él se inscribe un rectángulo, cuya base está situada sobre la base del triángulo.

a) Expresar al área A de dicho rectángulo en función de la longitud x de su base.

b) Escribir el dominio de la función $A(x)$ y dibujar su gráfica.

c) Hallar el valor máximo de dicha función. Selectividad Septiembre 1999

22. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3. Averiguar las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima. Selectividad Septiembre 1999

23. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?

c) Determinar sus asíntotas. Prueba previa de selectividad 2000

24. Dados tres números cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Selectividad Septiembre 2000

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

25. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) Determinar a, b, c y d

b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos? Selectividad Junio 2000

26. a) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga al menos un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4)

b) Si la función fuese polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado? Selectividad Junio 2000

27. Sea la función $f(x) = 2x + senx$

a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos Selectividad Septiembre 2000

28. Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$

a) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Esbozar la gráfica de la función Selectividad Septiembre 2000

29. Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & si \quad x \le 1 \\ x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Razonar si la función es continua en toda la recta real.
b) Razonar si f es derivable en toda la recta real. Selectividad: Junio 01. Opción B

30. a) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica.

b) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3,-5)$. Selectividad: Junio 01.

31. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

i) $P(x)$ es una función par.
ii) Dos de sus raíces son $x = 1$, $x = \sqrt{5}$
iii) $P(0) = 5$

Se pide:
a) Hallar sus puntos de inflexión.
b) Dibujar su gráfica. Selectividad: Septiembre 01. Opción B

32. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

a) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f. Selectividad: Junio 02. Opción A

33. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & si \quad x \ge 2 \\ x(x-2) & si \quad x < 2 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad
b) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3,1)

Selectividad: Septiembre 02. Opción A

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

34. Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f\,'(0) = 3$; $f\,'(1) = 4$. Se pide:

    a) Calcular g'(0), siendo $g(x) = f(x+f(0))$

    b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$.

    Selectividad: Septiembre 02. Opción B

35. Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real $f(x) = A\ \mathrm{sen}x + B\,x^2 + C\,x + D$ tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y además su derivada segunda es $f\,''(x) = 3\ \mathrm{sen}x - 10$.

    Selectividad: Curso 02/03. Modelo opción A

36. Se considera la función real de variable real definida por:

    $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$. Se pide:

    a) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas
    b) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente horizontal
    c) Representar gráficamente la función

    Selectividad: Curso 02/03. Modelo opción B

    Nota: Para obtener las asíntotas puede utilizarse la igualdad: $A - B = \dfrac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$

37. a) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

    b) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento cuando x tiende a ∞ y cuando tiende a $-\infty$.

    c) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición. Selectividad: Ju

38. Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

    a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P(a, f(a)), donde 0<a<1.
    b) Halla los puntos A y B en la que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
    c) Determina el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$

    Selectividad: Junio 04. Opción B

39. Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

    a) Halla sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
    b) Dibuja la gráfica de la función utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

    Selectividad: Septiembre 04. Opción B

40. Se considera la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde $\ln$ significa Logaritmo Neperiano.

    a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.
    b) Dibuja la gráfica de f.
    c) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

    Selectividad: Curso 04/05. Modelo opción B

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

41. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$.
b) Halla los puntos de corte de la recta tangente del apartado a) con los ejes de coordenadas.
c) Halla el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en el apartado b) sea mínima.

Selectividad: Septiembre 05. Opción A

42. Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x)$.

Selectividad: Septiembre 05. Opción B

43. Dada la función: $f(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Halla sus máximos y mínimos locales y/o globales. Selectividad:

44. a) Halla el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2-3}$$

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demuestra que son perpendiculares.

Selectividad: Curso 05/06. Modelo. Opción B

45. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Selectividad: Junio 06. Opción A

46. Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

Selectividad: Junio 06. Opción B

47. a) Calcular los valores de a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si\ x<0 \\ x^2+2a\cos x & si\ 0 \le x < \pi \\ ax^2+b & si\ x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

c) Estudia la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

Selectividad: Septiembre 06. Opción A

48. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

Selectividad: Septiembre 06. Opción B

49. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Selectividad: Junio 07. Opción B

50. Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función: $f(x) = \dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$.

Selectividad Septiembre 07. Opción A

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

51. Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

i) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$

ii) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

iii) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.

iv) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta estos datos se pide:

a) Analiza razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) Dibuja de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$. Selectividad: Septiembre 07. Opción B

52. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

a) Halla sus asíntotas y sus extremos locales.

b) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibuja la gráfica de $f(x)$. Selectividad: Curso 07/08. Modelo. Opción A

53. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si \quad |x| < 2 \\ \dfrac{1}{x^2} & si \quad |x| \geq 2 \end{cases}$$ Se pide:

Calcula a y b para que f sea continua y derivable en todo R. Selectividad: Curso 07/08. Modelo. Opción B

54. Obtén los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$f(x) = x\,(\ln(x))^2$, siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x. Selectividad: Junio 08. Opción A

55. Dada la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$. Se pide:

Dibuja la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

Selectividad: Septiembre 08. Opción A

56. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4} & si\ x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{12}(1-(x-2)^2) & si\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

b) Halla los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

c) Dibuja la gráfica de $f(x)$. Selectividad: Curso 08/09. Modelo. Opción A

57. Si la derivada de la función $f(x)$ es: $f'(x) = (x-1)^3(x-5)$, obtén:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.

c) La función f sabiendo que $f(0) = 0$. Selectividad: Junio 09. Opción B

58. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax)-bx}{x^2} & si \quad 1+ax>0 \quad y \quad x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2} & si\ x=0\end{cases}$$ se pide:

a) Halla los valores de los parámetros a y b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.

b) Para $a = b = 1$, estudia si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Selectividad: Septiembre 09. Opción A

59. a) Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$, halla el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

c) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demuestra que existe al menos un punto c en el intervalo (0, 2) tal que $g'(c) = 1$.

Selectividad: Septiembre 09. Opción B

60. Dada la función: $f(x) = x^3 - x$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto (-1, f(-1))
b) Determina los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f

Selectividad: Curso 09/10. Modelo. Opción B

61. Dada la función $f(x) = e^x + a\,e^{-x}$, siendo a un número real, estudia los siguientes apartados en función de a:

a) Halla los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Estudia para qué valor, o valores, de a la función tiene alguna asíntota horizontal.

Selectividad: Curso 09/10. Modelo. Opción A

62. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$. Se pide:

a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Halla los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

c) Halla las asíntotas y dibuja la gráfica de $f(x)$.

Selectividad: Junio 10. FG. Opción A

63. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & si \quad x>0\\ x+k & si \quad x\le 0\end{cases}$ (ln significa logaritmo neperiano de x), se pide:

a) Determina el valor de k para que la función sea continua en R.

b) Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Selectividad: Junio 10. FG. Opción B

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

64. Dada la función: $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 3)$, donde ln significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) Determina el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Selectividad: Junio 10. FE. Opción A

65. Los puntos P (1, 2, 1), Q (2, 1, 1) y A (a, 0, 0) con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcula el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.
Selectividad: Septiembre 10. FG. Opción B

66. Dada la función $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$, se pide

a) Estudia y obtén las asíntotas.

b) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.

c) Representa gráficamente la función. Selectividad: Septiembre 10. FE. Opción B

67. Dada la función $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$, se pide:

Obtén, si existen, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas de f.

Selectividad: Curso 10/11. Modelo. Opción A

68. Halla los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$

Selectividad: Junio 11.1. Opción A

69. Demuestra que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real cualquiera que sea el número m. Justifica la respuestas indicando qué teoremas usas. Selectividad: Junio 11.1. Opción A

70. Dada la función $f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$, se pide:

a) Determina el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a, obtén los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) Obtén las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) Esboza la gráfica de la función para $a = 1$. Selectividad: Junio 11.1. Opción B

71. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + x - 7}{x + 3}$, se pide:

a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función $y = f(x)$

b) Halla los intervalos donde f crece y aquellos en que f decrece. Determina todos los máximos y mínimos locales.

c) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Selectividad: Junio 11.2. Opción A

72. Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada Selectividad: Septiembre 11. Opción A

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

73. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$.

Selectividad: Curso 11/12. Modelo. Opción A

74. Hallar $a; b; c$ de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión. Selectividad: Junio 12. Opción A

75. Dadas las funciones $f(x) = \frac{3x + ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}$, $g(x) = (ln\, x)^x$, $h(x) = sen(\pi - x)$ se pide:

a) Hallar el dominio de $f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Calcular $g'(e)$.

c) Calcular, en el intervalo $(0; 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$. Selectividad: Junio 12. Opción B

76. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x + A & si\ x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & si\ x > 3 \end{cases}$, se pide

a) Halla el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?
b) Halla los puntos en los que $f'(x) = 0$.
c) Halla el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo [4, 8]

Selectividad: Septiembre 12. Opción A

77. Dada la función $f(x) = x^2 sen\, x$, se pide:

a) Determina, justificando tu respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.
b) Obtén la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Selectividad: Septiembre 12. Opción B
Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

78. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x}{x-1} & si \quad x < 0 \\ a & si \quad x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x > 0 \end{cases}$; se pide:

a) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.

b) Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$. Selectividad: Curso 12/13. Modelo. Opción A

79. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$, se pide:

a) Halla las asíntotas de su gráfica.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$

Selectividad: Junio 13. Opción A

Autora: María Molero Aparicio
Revisores: Leticia González Pascual Álvaro Valdés Menéndez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

80. Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$ se pide:

a) Determinar los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ Selectividad: Junio 13. Opción B

81. Dada la función $f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$, se pide:

a) Halla las asíntotas de su gráfica.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus puntos de inflexión.

c) Esboza la gráfica de la función. Selectividad: Septiembre 13. Opción A

82. Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, se pide:

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$. Selectividad: Septiembre 13. Opción B

83. Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

a) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y estudia la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas. Septiembre 13. Opción B

84. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1} & si\ x < 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar su continuidad.
b) Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.
c) Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica. Selectividad: Curso 13/14. Modelo. Opción B

85. a) Sea f: **R** → **R** una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determina: $f(-2)$; $f'(-2)$ y $f''(-2)$: Selectividad: Junio 14. Opción A

86. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}$, se pide:

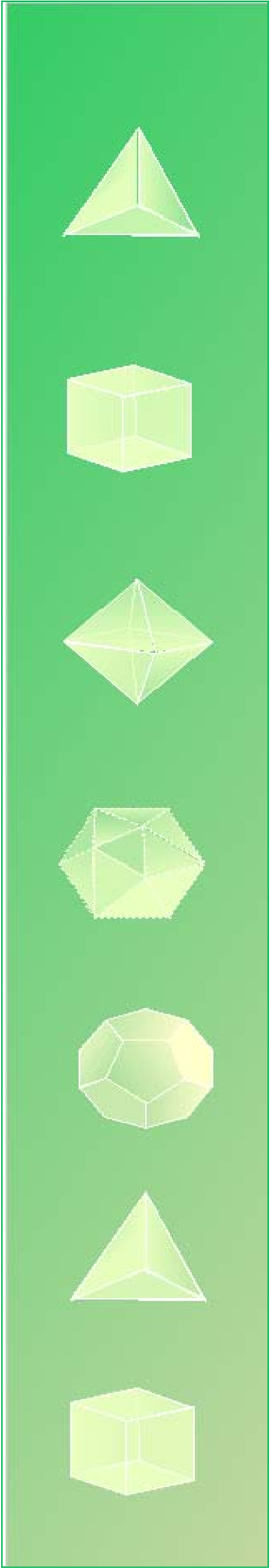
a) Determina el dominio de f y sus asíntotas.

b) Calcula $f'(x)$ y determina los extremos relativos de $f(x)$. Selectividad: Septiembre 14. Opción A

87. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5senx}{2x} + \dfrac{1}{2} & si \quad x < 0 \\ a & si \quad x = 0 \\ xe^x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

b) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a. Selectividad: Septiembre 14. Opción B



MATEMÁTICAS II: 2º Bachillerato Capítulo 9: Representación de funciones

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Leticia González Pascual

Revisores: Álvaro Valdés Menéndez y Javier Rodrigo

Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *sofware* libre (GeoGebra y GIMP)

Índice

Resumen

El concepto de función es la piedra angular de las Matemáticas. Sirve para modelar experiencias tanto de Física, como de Biología, como del resto de las Ciencias. Sin embargo su génesis ha sido lenta.

En el famoso trabajo sobre **la difusión del calor de *Jean Baptiste Joseph Fourier*** (1768 – 1830) comenzado en 1807 y publicado en 1822, indicaba que las funciones que podían representarse como una suma infinita de funciones trigonométricas es *amplia*.

Por entonces las tres grandes L (*Lagrange, Laplace y Legendre*) criticaron la memoria de *Fourier* por sus lagunas y vaguedad de razonamiento, y quizás esta sea la causa para que comenzara en Matemáticas la época del rigor. El trabajo de *Fourier* desempeñó un papel **catalizador** en la nueva fundamentación, pues suscitó cuestiones como las condiciones exactas de representabilidad de funciones mediante series trigonométricas. El primer resultado riguroso en esta línea fue obtenido por *Dirichlet*, en 1829, un año antes de la muerte de *Fourier*.

1. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

El curso pasado y en cursos anteriores ya has estudiado las funciones, y en este curso has estudiado su continuidad, la derivada… En este capítulo vamos a recoger todo lo que ya sabes de forma organizada para que aprendas a representarlas con soltura.

A la hora de representar una función $y = f(x)$ tenemos sobre todo tres fuentes de información:

- **La propia función**: a partir de su expresión algebraica podemos saber dónde está definida, los puntos de corte con los ejes coordenados y otros puntos, si tiene asíntotas o no, …
- **La primera derivada**: a partir de ella obtendremos toda la información relacionada con el crecimiento o decrecimiento de la función y los extremos relativos.
- **La segunda derivada:** nos ayudará a estudiar la curvatura que presenta y los puntos de inflexión.

1.1. Información extraída de la propia función

Dominio

El **dominio** de una función es el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ que puede tomar la variable independiente, es decir, para los cuales está definida la función:

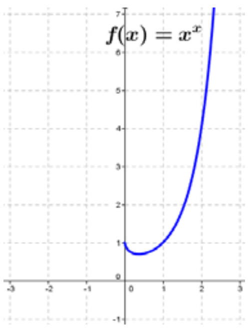
$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \in \mathbb{R}\}$$

En otras palabras, se trata de determinar qué valores podemos dar a la variable independiente, x, de modo que podamos calcular la función f. Por ello, debemos recordar (una vez más) qué funciones presentan alguna limitación a la hora de ser calculadas en el cuerpo de los números reales, pues esas serán las que debamos estudiar con detalle:

- Suma, resta y producto: pueden evaluarse para cualquier número real.
- División: no se puede dividir entre cero.
- Raíces:
  - De orden impar: pueden evaluarse en cualquier número real.
  - De orden par: el radicando debe ser mayor o igual que cero.
- Potencias:
  - De exponente natural: pueden evaluarse siendo la base cualquier número real.
  - De exponente negativo: pueden evaluarse si la base es un real positivo.

Ejemplo

- *Vamos a utilizar GeoGebra para representar la función* $f(x) = x^x$.



Observamos que la función sólo existe cuando $x > 0$, algo que tiene sentido si pensamos que intentar calcular una potencia de base negativa y exponente real puede llevar a situaciones confusas:

⇒ $(-1)^x$ con $x \in \mathbb{Z}$: puede calcularse sin problemas.

⇒ $(-1)^x$ con $x \in \mathbb{Q}$: si el denominador del exponente es par, es equivalente a intentar hallar la raíz de un número negativo.

⇒ $(-1)^x$ con $x \in \mathbb{I}$: no puede calcularse ya que es imposible realizar el proceso de acotación necesario.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- Logaritmos: el argumento debe ser rigurosamente mayor que cero.

Con el fin de determinar el dominio de una función real de variable real (las funciones con las que trabajamos normalmente), estudiamos el dominio de las funciones más usuales:

➢ **Funciones polinómicas:** El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales.

$$f(x) = P(x) \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

Ejemplo

- *Para* $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, Dom $f = \mathbb{R}$.

➢ **Funciones racionales (fraccionarias):** Son de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Su dominio es el conjunto de los reales excepto los ceros o raíces del denominador.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R};\ Q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R};\quad Q(x) = 0\}$$

Ejemplos

- Para $f(x) = \text{cotg } x$, Dom $f = \mathbb{R} - \{x = k\cdot\pi\}$, pues $\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$, y $\text{sen } x = 0$ cuando $x = k$, con $k \in Z$.
- Si $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$, es fácil ver que para $x = -2$ y $+2$ el denominador se anula, por tanto:

$$\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup (-2, +2) \cup (+2, +\infty) = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

➢ **Funciones irracionales:** Son de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$. Como ya se dijo, hay dos casos posibles:

- **Si *n* es impar** el dominio de la función coincidirá con el dominio del radicando: Dom f = Dom g.
- **Si *n* es par** el dominio de la función estará formado por todos los valores de x que hagan que el radicando sea mayor o igual que cero: Dom $f = \{x \in \mathbb{R};\ \ g(x) \geq 0\}$.

Ejemplos

- Si $f(x) = \sqrt{x+5}$, en este caso Dom $f = \{x \in \mathbb{R};\ \ x + 5 \geq 0\}$, por lo que habrá que resolver la inecuación $x + 5 \geq 0$, cuya solución es $x \geq -5$. Es decir, Dom $f = [5, +\infty)$.
- Si se trata de la función $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x^2-4}}$, en este caso el dominio de la función coincide con el dominio del radicando, y éste está visto en el ejemplo anterior:

$$\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup (-2, +2) \cup (+2, +\infty) = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

➢ **Funciones exponenciales:** Son funciones de la forma $f(x) = a^{g(x)}$, siendo a un número positivo. El dominio de estas funciones coincide con el dominio de la función que aparece en el exponente:

$$\text{Dom } f = \text{Dom } g.$$

Ejemplo

- Sea $f(x) = 2^{\frac{x+2}{x-3}}$. El dominio de $f(x)$ coincidirá con el dominio del exponente que, como se trata de una función racional, será todos los números reales excepto los que anulan el denominador. Por tanto: $\text{Dom } f = (-\infty, +3) \cup (+3, +\infty) = \mathbb{R} - \{+3\}$

➢ **Funciones logarítmicas:** Son de la forma $f(x) = \log_a[g(x)]$, siendo a positivo y distinto de 1. Como los logaritmos sólo tienen sentido para los números positivos se tiene: Dom $f = \{x \in \mathbb{R};\ \ g(x) > 0\}$.

Ejemplo

- Si $f(x) = \log(x+1)$, el dominio de la función serán todos los valores de x que hagan que el argumento sea positivo: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$, por tanto:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R};\ x + 1 > 0\} = (-1, +\infty).$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Conjunto imagen o recorrido

El **conjunto imagen** o **recorrido** de una función es el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ que toma la variable dependiente:

$$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R};\ \ \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ con } f(x) = y\}$$

La forma más habitual y sencilla de determinar el recorrido de una función es a partir de su representación gráfica, si bien puede hallarse conociendo la forma general de la función. El recorrido está formado por el conjunto de valores del eje de ordenadas o eje OY que son alcanzados por la función.

Ejemplos

- Ya representamos antes la función $f(x) = x^x$. De la gráfica deducimos:

$$\text{Dom } f = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad \text{Im } f = [0{,}6932\,, +\infty)$$

- Si $f(x) = x^2 + 2x - 3$, sabemos que es una parábola con forma de "U", que el vértice es un mínimo y se encuentra en:

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2}{2\cdot 1} = -1 \quad \text{y} \quad f(-1) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 3 = -4$$

Por tanto:

$$\text{Dom } f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \text{Im } f = [-4, +\infty)$$

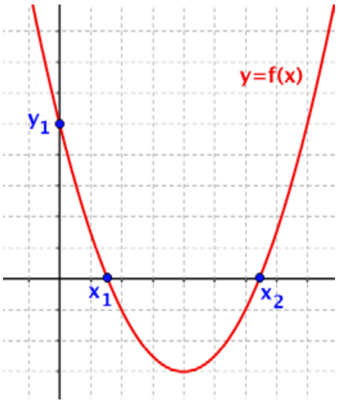
Puntos de corte con los ejes

Se denominan **puntos de corte** o puntos de intersección con los ejes coordenados a los puntos en los cuales la gráfica de la función corta al eje de abscisas y/o al eje de ordenadas.

- **Cortes con el eje OX**: Para determinar los puntos de corte con el eje de abscisas se iguala a cero la función y se resuelve la ecuación resultante:

Dada $y = f(x) \to$ Si $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Soluciones: $x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \Rightarrow$ Puntos de corte: $(x_1, 0), (x_2, 0) \ldots, (x_n, 0)$



- **Corte con el eje OY**: Para determinar el punto de corte con el eje de ordenadas (será uno como máximo) se sustituye la x por cero y se halla el valor de y:

Dada $y = f(x) \to$ Si $x = 0 \Rightarrow y_1 = f(0) \Rightarrow$ Punto de corte: $(0, y_1)$

Ejemplos

- Si consideramos de nuevo $f(x)=x^2+2x-3$, hallamos los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Corte con el eje } OY\text{:}\quad f(0)=0^2+2\cdot 0-3=-3$$

$$\text{Corte con el eje } OX\text{:}\quad x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=+1 \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte con los ejes son los puntos:

$$(-3,0),\quad (0,-3)\quad y\quad (+1,0)$$

- Volvamos a la función $f(x)=x^x$. Al intentar resolver tanto $x = 0$ como $y = 0$ llegamos a ecuaciones sin solución:

$$\text{Corte con el eje } OY\text{:}\ x=0\notin \text{Dom } f$$

$$\text{Corte con el eje } OX\text{:}\ x^x=0 \text{ no tiene solución}$$

Sin embargo, sí podemos calcular el límite cuando x tiende a cero por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0 = \text{Indeterminación}$$

que resolvemos tomando logaritmos:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = L \Rightarrow \ln L = \ln(\lim_{x\to 0^+} x^x) = \lim_{x\to 0^+}(\ln x^x) = \lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{\infty} = \text{Ind.}$$

y, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

valor que coincide con el que podemos observar en la gráfica de $f(x)$.

Simetrías

Nos interesa estudiar las simetrías de una función de cara a simplificar el proceso de representación gráfica. Si la función es simétrica, para representar la gráfica correspondiente basta con estudiarla en la parte de las abscisas positivas.

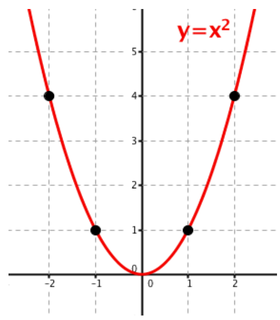
- **Simetría respecto al eje OY**: Una función es simétrica respecto al eje OY si se cumple que:

$$f(x)=f(-x)\quad \forall\, x\in \text{Dom } f$$

Las funciones con este tipo de simetría se llaman **funciones pares**. Una función con este tipo de simetría define una simetría especular respecto al eje OY.

Ejemplo

- La función $f(x)=x^2$ es una función simétrica respecto al eje OY, como se puede observar viendo su gráfica.



Algebraicamente se cumple que:

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

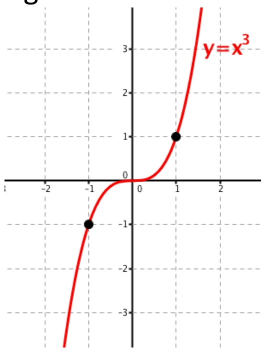
- **Simetría respecto al origen**: Una función es simétrica respecto al origen de coordenadas si:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in \text{Dom}\, f$$

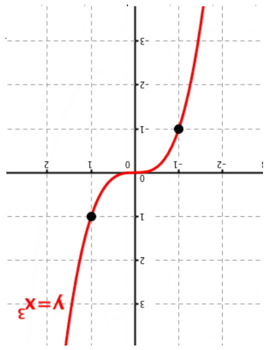
Las funciones con este tipo de simetría se llaman **funciones impares**. Una función con este tipo de simetría define una **inversión respecto del origen de coordenadas**, pero desde un punto de vista práctico, dado que estamos trabajando con funciones en el plano, podemos buscar un giro de centro en el origen y amplitud 180°.

Ejemplo

- La función $f(x) = x^3$ es una función simétrica respecto al origen, como se puede observar viendo su gráfica.



Girando 180° con un eje que pasa por el origen



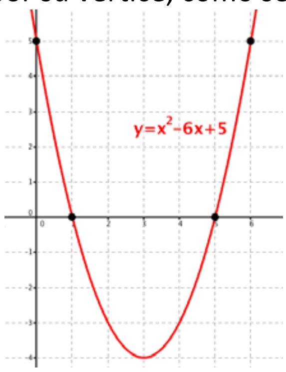
Algebraicamente se cumple que:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Hay funciones que no son pares ni impares y que no presentan ningún tipo de simetría. Otras funciones, algunas de ellas ya estudiadas, aunque no son ni pares ni impares son simétricas respecto a otras rectas.

Ejemplo

- La función $f(x) = x^2 - 6x + 5$, o en general todas las funciones cuadráticas, son simétricas respecto a la recta vertical que pasa por su vértice, como se puede ver observando su gráfica:



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

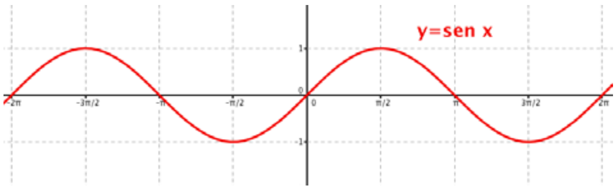
Periodicidad

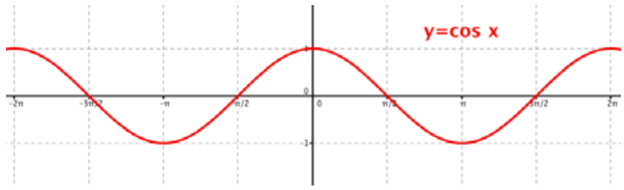
Una función $f(x)$ se dice que es **periódica** de período T, si para todo x perteneciente a su dominio se cumple que $f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \ldots = f(x + k\cdot T)$, con k un número entero. Para poder representar las funciones periódicas basta con estudiarlas en el intervalo $[0\,,T]$.

Las funciones periódicas más fáciles de determinar a partir de su expresión cartesiana son las que están formadas únicamente por funciones trigonométricas con argumentos lineales, pero hay muchas más.

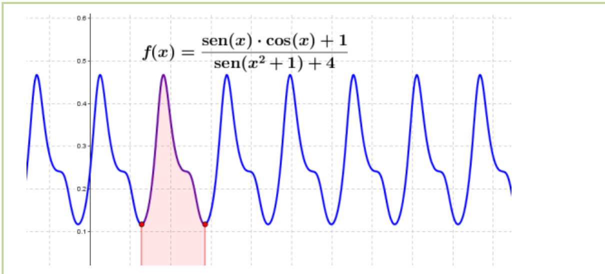
Ejemplos

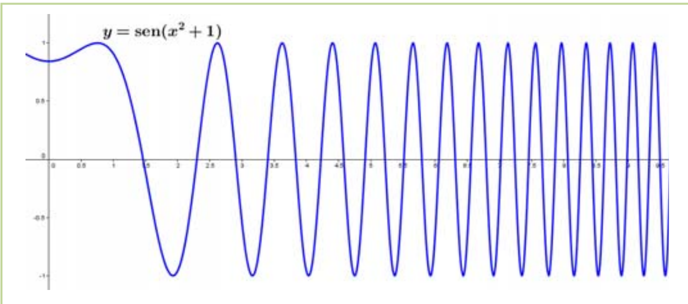
- Las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $f(x) = \cos x$ son periódicas de período $T = 2\pi$, por lo que sus gráficas se estudiarían en el intervalo $[0,2\pi]$.





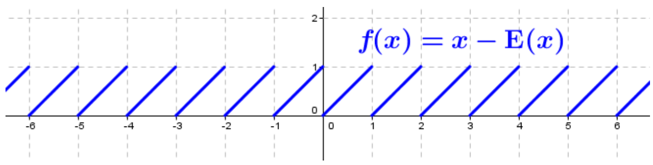
- $f(x) = \dfrac{\text{sen } x \cdot \cos x + 1}{\text{sen}(4x+3)+4}$ es periódica de período $T = \pi$, como puede verse en su gráfica, en la que vemos cómo la región sombreada se repite indefinidamente.



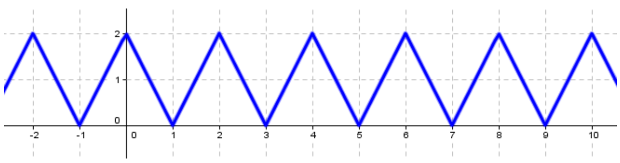


- Sin embargo, $f(x) = \text{sen}(x^2+1)$ no es periódica al tener un argumento de grado dos, y vemos cómo las oscilaciones están cada vez más próximas.

- La función mantisa, que devuelve la parte decimal de un número y se define restando a cada número su parte entera: $M(x) = x - E(x)$ es periódica con $T = 1$:



- Otras funciones pueden ser periódicas por el contexto al que hace referencia. Por ejemplo, el ciclo de explosión o combustión de un motor, la modelización de un circuito de calefacción, la cuenta corriente de una persona a lo largo de un mes,…:



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Asíntotas y ramas parabólicas

Recuerda que:

El curso pasado, en el capítulo de límites y continuidad estudiamos las asíntotas y las ramas parabólicas. Ahora vamos a recordarlo.

En la gráfica de una función, los tramos en los que x toma valores muy grandes (x tiende a más o menos infinito) se llaman **ramas infinitas** de la función.

Si la gráfica se aproxima cada vez más a una dirección hablamos de que la gráfica tiene una **asíntota**. En caso contrario decimos que tiene una **rama parabólica**.

Por tanto, una **asíntota** a una curva es una recta a la cual tiende la función en el infinito de la x o en el de $f(x)$.

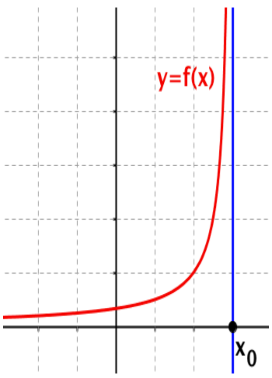
Según sea la forma de esta recta podemos hablar de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

- ***Asíntotas verticales:*** Se dice que una recta $x = x_0$ es una asíntota vertical cuando se verifica una de las relaciones siguientes:

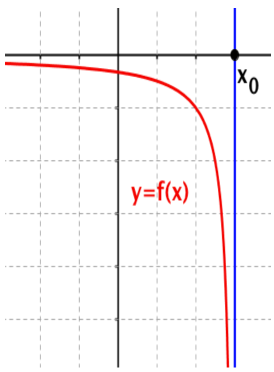
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Es decir, para que exista una asíntota vertical en x_0 al menos uno de los límites laterales tiene que ser infinito.

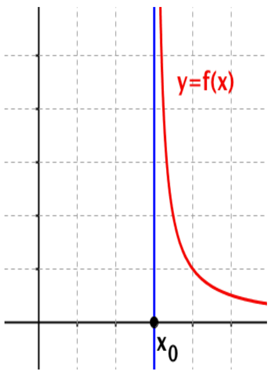
Las distintas posibilidades son las siguientes:



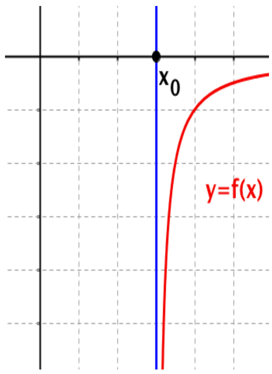
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

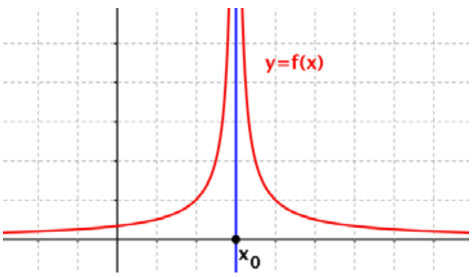


$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

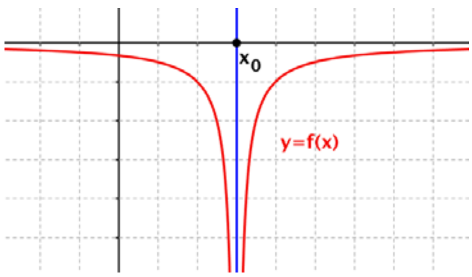


$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

Los anteriores son límites laterales. También tenemos las siguientes situaciones:



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

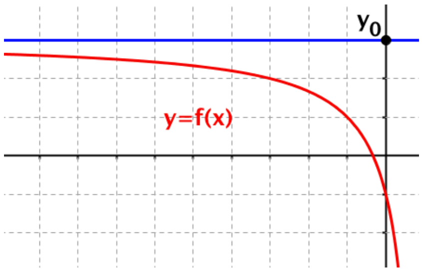
Una función puede tener una asíntota vertical en los valores de x para los cuales la función no es real, es decir, los puntos que nos han salido en el estudio del dominio.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

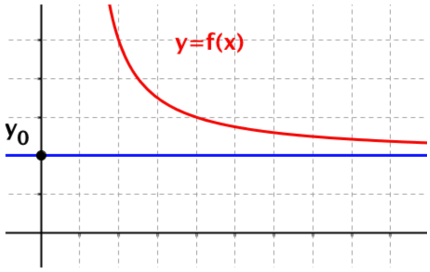
Una función puede no tener asíntotas verticales (por ejemplo, las funciones polinómicas) o tener cualquier número de ellas. Las ramas de la curva que se aproximan a una asíntota vertical se llaman **ramas infinitas verticales.**

La gráfica de una función no suele cortar a una asíntota vertical, salvo en el caso de funciones definidas a trozos como: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$.

- **Asíntotas horizontales:** Una recta de ecuación $y = y_0$ es asíntota horizontal de la función cuando existe, al menos, uno de los siguientes límites:



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$

Para determinar, por tanto, la existencia y la ecuación de una asíntota horizontal basta con hallar los límites cuando x tiende a más o menos infinito. Los valores de dichos límites serán las ecuaciones de la asíntota.

Una función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales.

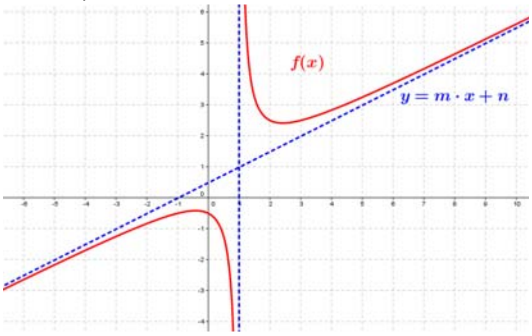
Las ramas de la curva que se aproximan a una asíntota horizontal se llaman **ramas infinitas horizontales.**

- **Asíntotas oblicuas:** Una asíntota oblicua es una recta de la forma $y = m\cdot x + n$, con $m \neq 0$, a la cual tiende a aproximarse la función en el infinito.

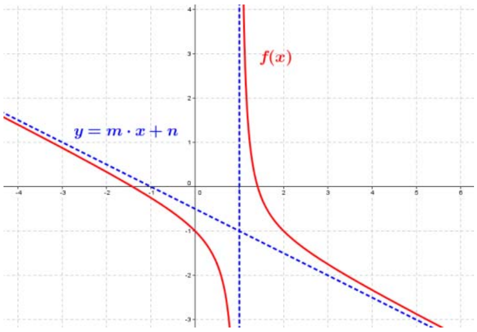
Para determinar la ecuación de la asíntota oblicua tenemos que hallar su pendiente, m, y su ordenada en el origen, n. Estos valores se obtienen calculando los siguientes límites:

- $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. Para que exista la asíntota, este límite debe ser un número real distinto de cero.
- Si $m\in\mathbb{R}^*$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)$

Una función puede tener una asíntota oblicua en un sentido si no tiene asíntota horizontal en ese sentido. Además, en el caso de tener asíntota oblicua, tendrá como máximo dos.



$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}>0$



$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}<0$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

La rama de la función que se acerca a una asíntota oblicua se llama **rama hiperbólica**.

- **Ramas parabólicas:** Dada una función $f(x)$, diremos que una de sus ramas infinitas es una rama parabólica si no se acerca a ninguna recta y se cumple alguna de estas igualdades.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Una función tiene ramas parabólicas si no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

Ejemplo

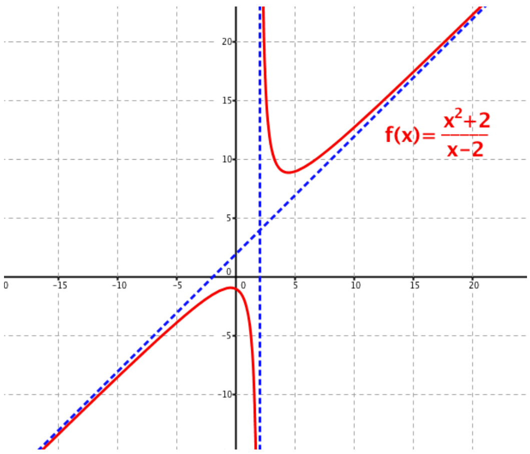
- *Calcula las asíntotas de la función* $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$.
  - Asíntotas verticales:

    Como $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+2}{x-2} = \infty$, la función tiene una asíntota vertical, $x = 2$.
  - Asíntotas horizontales:

    Como $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2}{x-2} = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2}{x-2} = -\infty$, la función no tiene asíntotas horizontales.
  - Asíntotas oblicuas:

    Como no hay asíntotas horizontales, analizamos que pueda haber asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = +1$$



El valor de m es un real no nulo, así que hallamos el valor de n:

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{x-2} = 2$$

Por tanto, $y = x + 2$ es una asíntota oblicua.

La representación gráfica confirma los resultados obtenidos

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

1.2. Información extraída de la primera y segunda derivada

Monotonía. Crecimiento y decrecimiento

Recuerda que:

Una función $y = f(x)$ es **creciente** en un intervalo (a, b) cuando para todo par de puntos $x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Si la función es creciente en un intervalo, la tasa de variación media para dos puntos cualesquiera del mismo es mayor que cero, es decir:

Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

luego:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ y, por tanto, la derivada es no negativa.

Una función $y = f(x)$ es **decreciente** en un intervalo (a, b) cuando para todo par de puntos $x_1, x_2 \in (a,b)$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Si la función es decreciente en un intervalo, la tasa de variación media para dos puntos cualesquiera del mismo es menor que cero, es decir:

Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$

luego:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ y, por tanto, la derivada es negativa o cero.

Por tanto, dada una función $y = f(x)$, derivable en el intervalo (a, b):

Si $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$, $f(x)$ es creciente en el intervalo.

Si $f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$, $f(x)$ es decreciente en el intervalo.

Si $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$, $f(x)$ es constante en el intervalo.

La observación de la gráfica de una función no permite determinar con precisión los intervalos donde la función es creciente o donde es decreciente. Por ello, para calcular los intervalos de monotonía de una función $y = f(x)$, supuesta la existencia de la derivada conviene seguir estos pasos:

1. Calculamos $f'(x)$.
2. Hallamos los puntos que anulan $f'(x)$, que determinarán los intervalos de monotonía en el dominio de la función.
3. Calculamos el signo de $f'(x)$ en dichos intervalos. En los intervalos donde $f'(x) > 0$ la función es creciente, y donde $f'(x) < 0$, es decreciente.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Ejemplo

- *Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

Seguimos los pasos que acabamos de enumerar:

1. Calculamos la derivada: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$
2. Hallamos los valores de x que anulan la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

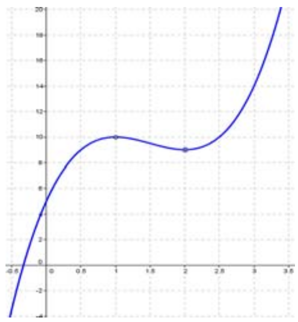
Estos puntos determinarán los intervalos de crecimiento, que son: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

3. Estudiamos el signo que toma la primera derivada en cada uno de los intervalos que hemos determinado. Para ello basta con tomar un valor cualquiera para x dentro de cada intervalo:
   - $(-\infty, 1) \rightarrow$Consideramos el punto $x = 0 \Rightarrow$ $f'(0) = 12 > 0 \Rightarrow$ $f(x)$ es creciente.
   - $(1, 2) \rightarrow$ Consideramos el punto $x = 1'5 \Rightarrow$ $f'(1'5) = -1'5 < 0 \Rightarrow$ $f(x)$ es decreciente.
   - $(2, +\infty) \rightarrow$ Consideramos el punto $x = 3 \Rightarrow$ $f'(3) = 12 > 0 \Rightarrow$ $f(x)$ es creciente.

4. Podemos resumir la información anterior en una tabla:

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

que, como no puede ser de otro modo, coincide con lo que encontramos al representar la función con GeoGebra:



Puntos críticos. Máximos y mínimos

En el capítulo anterior hemos visto las aplicaciones de la derivada, entre las que se explica qué ocurre cuando la derivada es nula:

Una función $y = f(x)$ derivable en $x = a$ tiene un **máximo o mínimo relativo** en el punto $x = a$ cuando $f'(a) = 0$.

La función tiene un máximo relativo en el punto $x = a$ si $f(a) > f(x)$ para valores de x en un entorno reducido de a, y tiene un **mínimo relativo** en el punto $x = a$ si $f(a) < f(x)$ para valores de x en un entorno reducido de a.

La recta tangente a la función en los máximos o mínimos relativos es horizontal, su pendiente vale 0, ya que la derivada de la función en dichos puntos es igual a cero.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Ejemplo

- *Determina los máximos y mínimos relativos de la función* $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

Ya calculamos la derivada en el ejemplo anterior: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$, y hallamos los valores de x que la anulan:

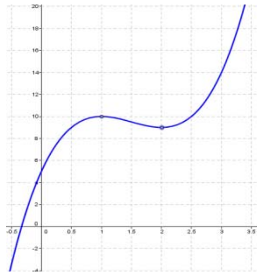
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Por tanto, $x = 1$ y $x = 2$ son los puntos críticos de la función.

Aunque ya tenemos la gráfica de $f(x)$ en la página anterior, vamos a analizar qué ocurre en un entorno de ambos puntos:

x	0'9	0'95	1	1'05	1'1
$f(x)$	9'968	9'99225	10	9'99275	9'972

x	1'9	1'95	2	2'05	2'1
$f(x)$	9'028	9'00725	9	9'00775	9'032

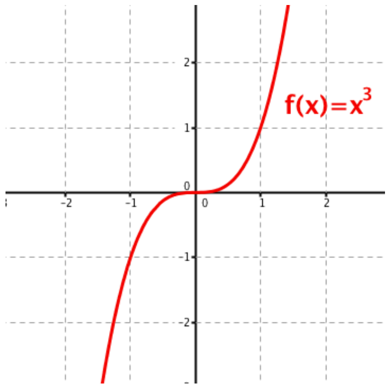


Por tanto, $(1, 10)$ es un máximo relativo y $(2, 9)$ es un mínimo relativo.

A la derecha tenemos la representación de la gráfica de la función, y es fácil observar que el mínimo relativo **no** es el punto más bajo de la gráfica, es mínimo *sólo en relación con los puntos muy próximos* a él.

De la misma forma, el máximo relativo **no** es el punto más alto de la gráfica *sólo en relación con los puntos muy próximos* a él.

Hemos visto en el ejemplo que la condición de anular la derivada no hace que dichos puntos sean los valores más altos o bajos que toma la función en todo su dominio, ni siquiera asegura que cambie la monotonía de la función. Es por eso que se les da el nombre de **máximos y mínimos relativos**.



Pero la derivada puede anularse en un punto y la función puede no tener en él máximo ni mínimo relativo. Es decir, ni siquiera que la derivada se anule en un punto garantiza que cambie la monotonía de la función. Así sucede con la función $f(x) = x^3$, cuya derivada es $f'(x) = 3x^2$.

$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$, de modo que la función es siempre creciente.

$f'(x)$ se anula en el punto $x = 0$, pero en la gráfica (a la derecha) vemos que no tiene máximo relativo ni mínimo relativo en ese punto.

Los puntos del dominio en los cuales la derivada es cero o bien no está definida, se llaman **puntos críticos**.

Por tanto, los posibles máximos y mínimos relativos se encuentran necesariamente en el conjunto de puntos críticos.

Para caracterizar un punto crítico disponemos de dos criterios:

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

❖ *Criterio de la derivada primera:*

Al analizar el signo de la derivada determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Sea la función $y = f(x)$ derivable en el punto $x = a$:

- Si para valores muy próximos a a por la izquierda se verifica que $f'(x) > 0$ (la función es creciente) y para valores muy próximos a a por la derecha se cumple que $f'(x) < 0$ (la función es decreciente), entonces la función tiene un máximo relativo en el punto $x = a$.
- Si para valores muy próximos a a por la izquierda se verifica que $f'(x) < 0$ (la función es decreciente) y para valores muy próximos a a por la derecha se cumple que $f'(x) > 0$ (la función es creciente), entonces la función tiene un mínimo relativo en el punto $x = a$.
- Si tanto para valores muy próximos a a por la izquierda como para valores muy próximos a a por la derecha, $f'(x)$ no cambia de signo, la función no tiene ni máximo ni mínimo relativo en $x = a$.

❖ *Criterio de la derivada segunda:*

El criterio de la derivada segunda para determinar los máximos y mínimos relativos permite obtener la naturaleza del punto crítico con un único cálculo.

Sea la función $y = f(x)$ derivable dos veces en el punto $x = a$ y con $f'(a) = 0$:

- Si $f''(a) < 0$, la función tiene un máximo relativo en el punto $x = a$.
- Si $f''(a) > 0$, la función tiene un mínimo relativo en el punto $x = a$.
- Si $f''(a) = 0$, todavía no podremos afirmar nada acerca de la función en el punto $x = a$.

Ejemplo

- *Determina la naturaleza de los puntos críticos de la función* $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

Criterio de la derivada primera:

Al analizar el signo de la derivada, $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$, determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Intervalo	$(-\infty, 1)$	(1, 2)	(2, +∞)
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	↗	↘	↗

Por tanto, en $x = 1$ la función tiene un máximo relativo y en $x = 2$ un mínimo relativo

Criterio de la derivada segunda:

Hallamos la derivada segunda: $f''(x) = 12x - 18$ y sustituimos los valores obtenidos:

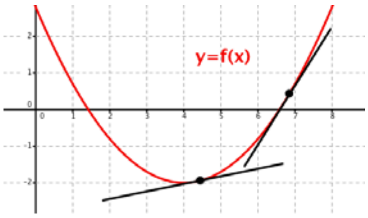
- $f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow x = 1$ es un máximo relativo
- $f''(2) = +6 > 0 \Rightarrow x = 2$ es un mínimo relativo

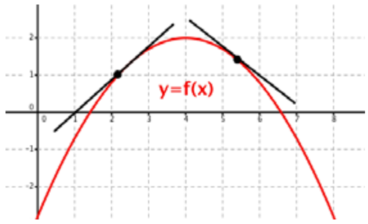
Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Curvatura. Concavidad y convexidad

Una función $y = f(x)$ es **cóncava** en un intervalo (a, b) si en todos los puntos del intervalo la curva está por encima de las tangentes en dichos puntos.

Una función $y = f(x)$ es **convexa** en un intervalo (a, b) si en todos los puntos del intervalo la curva está por debajo de las tangentes en dichos puntos.





El proceso de trazar tangentes y comprobar su posición respecto a la función es demasiado laborioso para determinar la curvatura de $f(x)$.

Por ello, para determinar los intervalos de concavidad y convexidad de una función $y = f(x)$, supuesta la existencia de la derivada segunda, seguiremos estos pasos:

1. Calculamos $f''(x)$.
2. Hallamos los puntos que anulan $f''(x)$, que determinarán los intervalos de cambio de curvatura en el dominio de la función.
3. Calculamos el signo de $f''(x)$ en dichos intervalos. En los intervalos donde $f''(x) > 0$ la función es cóncava, y donde $f''(x) < 0$, es convexa.

Ejemplo

- *Analiza la concavidad y convexidad de la función* $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

Ya hallamos antes la derivada segunda: $f''(x) = 12x - 18$, y la igualamos a cero:

$$f''(x) = 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Definimos dos intervalos, $(-\infty, \frac{3}{2})$ y $(\frac{3}{2}, +\infty)$. Como con la derivada primera, para analizar el signo de la derivada segunda tomamos un valor en cada intervalo:

- $(-\infty, \frac{3}{2}) \rightarrow$ Consideramos el punto $x = 0 \Rightarrow f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa.
- $(\frac{3}{2}, +\infty) \rightarrow$ Consideramos el punto $x = 2 \Rightarrow f''(2) = +6 > 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava.

Como antes, podemos recopilar la información en una tabla:

Intervalo	$(-\infty, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$		

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Puntos de inflexión

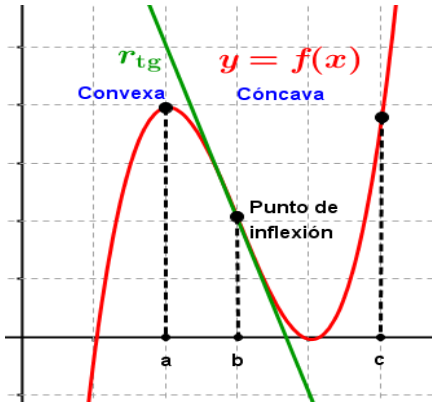
Se llaman **puntos de inflexión** de una curva a aquellos en los que se produce un cambio de concavidad. La curva pasa de ser cóncava a ser convexa o viceversa, y la tangente en dichos puntos atraviesa a la curva.

Cuando una función es cóncava en un intervalo, su derivada segunda es positiva, y cuando es convexa, su derivada segunda es negativa, por tanto, en un punto de inflexión el valor de la derivada segunda debe ser igual a 0. Las raíces de la derivada segunda *pueden* ser las abscisas de los puntos de inflexión.

Si observamos la gráfica adjunta, vemos que en el punto de abscisa a la recta tangente estaría por encima de la curva, por lo que la función es convexa.

En el punto de abscisa c la recta tangente estaría por debajo de la curva, por lo que la función es cóncava.

Sin embargo, en el punto b la recta tangente atraviesa a la curva, por lo que b será un punto de inflexión.



La condición de anulación de la derivada segunda es necesaria pero no suficiente. Para confirmar la existencia de un punto de inflexión en $x = a$ podemos seguir dos caminos:

1. Comprobamos que hay cambio de signo de $f''(x)$ cuando x toma valores a la izquierda y a la derecha de a.
2. Calculamos la tercera derivada, $f'''(x)$, y comprobamos que $f'''(a) \neq 0$. Si $f'''(a) = 0$ estaremos ante un caso dudoso y se deben estudiar las derivadas de orden superior.

Ejemplo

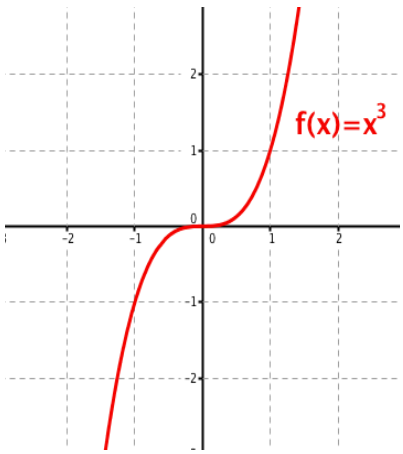
- *Si retomamos el caso de la función* $f(x) = x^3$, cuyas derivadas sucesivas son:

$f'(x) = 3x^2$ $\quad$ $f''(x) = 6x$ $\quad$ y $\quad$ $f'''(x) = 6$

$f'(x) > 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}^*$, así que la función es siempre creciente.

$f''(x)$ se anula en el punto $x = 0$, y $f'''(x) \neq 0$, luego (0, 0) es un punto de inflexión. Su tangente es la recta $y = 0$. Además:

- $f''(x) > 0$ si $x > 0$, $f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}^+$.
- $f''(x) < 0$ si $x < 0$, $f(x)$ es convexa en $\mathbb{R}^-$.



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

1.3. Estudio de regiones

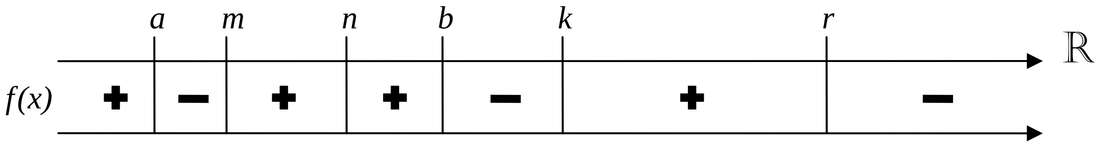
Una última fuente de información para realizar la representación gráfica de una función es el estudio de las regiones del plano en las que está definida. Se trata de determinar el signo de la función en los diferentes intervalos encontrados al hallar el dominio y los puntos de intersección con el eje OX.

Para hacer este estudio se consideran los factores correspondientes a los puntos de corte con el eje OX y las asíntotas verticales. En el caso de que alguno de estos factores esté elevado a exponente par no es necesario considerarlo, pues no cambia el signo en la función al pasar de la izquierda a la derecha del punto correspondiente a dicho factor.

Imaginemos una función racional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, para la que habremos factorizado tanto el numerador como el denominador. Podremos, por ejemplo, expresarla de la forma:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-a)(x-b)^2\ldots(x-k)^3}{(x-m)(x-n)^2\ldots(x-r)}$$

Y dividimos la recta real de la forma:



y vamos analizando el signo de la función en cada intervalo que se ha definido.

Ejemplo

- *Estudia las regiones en las que está definida la función* $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x^2-4}$.

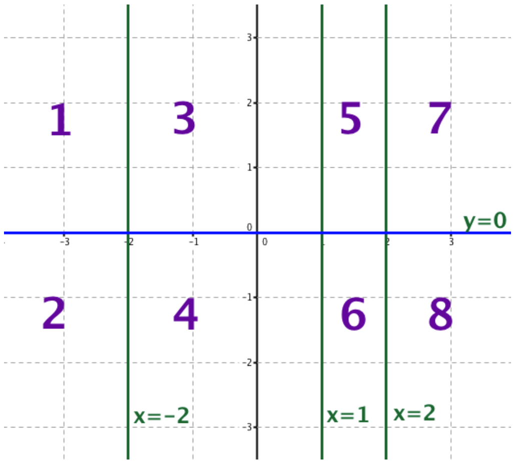
  Factorizamos el numerador y el denominador:

$$f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x+2)(x-2)}$$

  Entre los factores del numerador aparece el correspondiente a la raíz $x = 0$ elevado al cuadrado. Por tanto, no lo consideramos para el estudio del signo, ya que este factor siempre es positivo.

  El plano nos queda dividido en ocho regiones por las rectas $x = –2$, $x = 1$ y el eje OX de la siguiente forma:

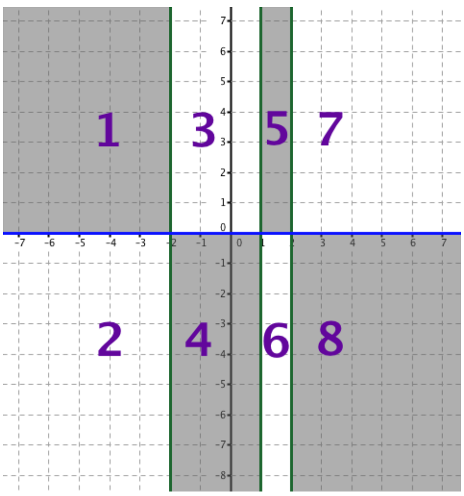
Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

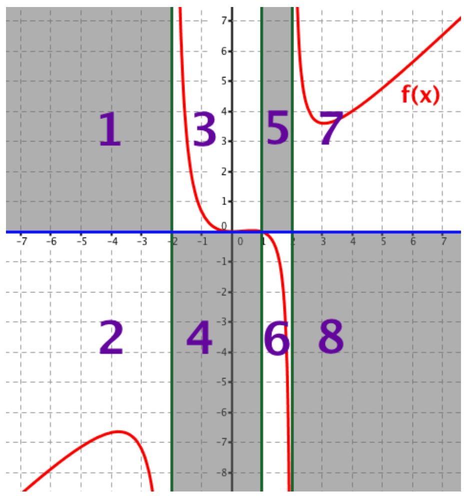


Para determinar el signo de la función en cada intervalo, se toma cualquier valor del mismo y se sustituye en la función.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, +1)$	$(+1, +2)$	$(+2, +\infty)$
$f(x_0)$	$f(-3)=\frac{-36}{5}$	$f(-1)=\frac{2}{3}$	$f(1'5)=\frac{-9}{14}$	$f(3)=\frac{18}{5}$
$f(x)$	Negativa	Positiva	Negativa	Positiva

Este punto, combinado con todos los estudiados anteriormente, nos será de una gran utilidad a la hora de representar gráficamente una función. En nuestro caso, la función tendrá la siguiente representación gráfica:





Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2. ESTUDIO DE LOS DIFERENTES TIPOS DE FUNCIONES

Llegados a este punto, es conveniente tener un conocimiento previo de las características y aspecto de ciertos tipos de funciones.

2.1. Funciones polinómicas

Son de la forma: $y = a\,x^n + b\,x^{n-1} + c\,x^{n-2} + \ldots + k$

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.
- Si todos sus términos son de grado par, son simétricas respecto al eje Y, y si todos sus términos son de grado impar son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- No son periódicas.
- No tienen asíntotas de ningún tipo. Por tanto, tienen ramas parabólicas.

Actividad resuelta

Representa la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

- Dominio: $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$
- Cortes con los ejes:
  - Eje X: $x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-2,\, 0) \\ (+1,\, 0) \end{cases}$
  - Eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = +2 \Rightarrow (0,\, +2)$
- Simetría: Las potencias de x son impares, pero hay un término independiente (x^0, las constantes, tienen simetría par), luego no tiene simetría.
- Regiones de existencia:

  Con los cortes con los ejes, consideramos los intervalos (–∞, –2), (–2, +1) y (+1, +∞)

Intervalo	(–∞, –2)	(–2, +1)	(+1, +∞)
$f(x_0)$	$f(-3) = 16$	$f(0) = 2$	$f(2) = 4$
$f(x)$	Positiva	Negativa	Positiva

- Monotonía: Hallamos la derivada: $f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

  e igualamos a cero: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$

  Consideramos los intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$ y $(+1, +\infty)$.

Intervalo	(–∞, –1)	(–1, +1)	(+1, +∞)
$f'(x_0)$	$f'(-2) = 9 > 0$	$f'(0) = -3 < 0$	$f'(2) = 9 > 0$
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- Máximos y mínimos:

  A partir de la tabla anterior deducimos que la función tiene un máximo en el punto de abscisa $x = -1$ y un mínimo en el de $x = +1$.

  - Si $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4 \rightarrow$ Máximo en (–1, 4)
  - Si $x = +1 \Rightarrow f(+1) = 0 \rightarrow$ Mínimo en (+1, 0)

  Comprobamos con la derivada segunda $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$. Entonces:

  - $f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ Se confirma el máximo en (–1, 4)
  - $f''(+1) = +6 > 0 \rightarrow$ Se confirma el mínimo en (+1, 0)

- Curvatura: Ya hallamos antes la derivada segunda, la igualamos a cero:

$$6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

  Consideramos los intervalos: (–∞, 0) y (0, +∞).

Intervalo	(–∞, 0)	(0, +∞)
$f''(x_0)$	$f''(-1) = -6 < 0$	$f''(1) = +6 > 0$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

- Puntos de inflexión:

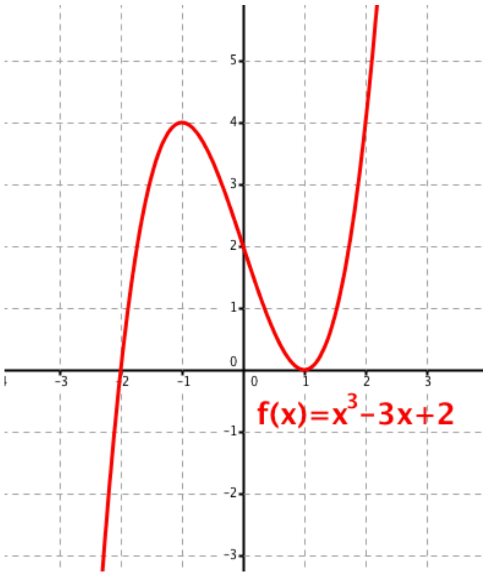
  A partir de la tabla deducimos que la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Ya hallamos antes el valor de f cuando $x = 0 \Rightarrow f(0) = +2 \Rightarrow (0, +2)$.

  Podemos comprobar su naturaleza con la derivada tercera:

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f'''(x) = 6 \neq 0$$

  Es, por tanto, un punto de inflexión.

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.2. Funciones racionales

Son de la forma: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

- No están definidas en los puntos que anulan el denominador.
- Tienen las siguientes asíntotas:
  - Una asíntota vertical en los puntos que hacen $Q(x) = 0$, excepto si $P(x) = 0$, para el que deberemos resolver la indeterminación.
  - Una asíntota horizontal $y = 0$ si grado $P(x) <$ grado $Q(x)$.
  - Una asíntota horizontal $y = k \neq 0$ si grado $P(x) =$ grado $Q(x)$.
  - Una asíntota oblicua si grado $P(x) =$ grado $Q(x) + 1$.
  - Ramas parabólicas si grado $P(x) >$ grado $Q(x) + 1$.
- Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen la misma simetría, $f(x)$ es simétrica respecto al eje Y; y si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen diferente simetría, $f(x)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas. Si una de ellas no es simétrica, $f(x)$ tampoco lo es.

Actividad resuelta

- *Representa gráficamente la función* $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.
  - Dominio: Anulamos el denominador:

$$x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

    Por tanto, Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$.
  - Cortes con los ejes:
    - Eje X: $f(x) = \dfrac{2x}{x+1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$
    - Eje Y: ya hemos visto que $y = 0$ cuando $x = 0$.
  - Simetría: Las potencias de x son impares, pero hay un término independiente, luego no tiene simetría. Podemos comprobarlo:

$$f(-x) = \frac{2\cdot(-x)}{(-x)+1} == \frac{-2x}{-x+1} = \frac{2x}{x-1}\begin{cases}\neq f(x)\\ \neq -f(x)\end{cases}$$

  - Regiones de existencia:

    Los cortes con los ejes y el dominio definen los intervalos (–∞, –1), (–1, 0) y (0, +∞).

Intervalo	(–∞, –1)	(–1, 0)	(0, +∞)
$f(x_0)$	$f(-2) = 4$	$f(-0'5) = -2$	$f(1) = 1$
$f(x)$	Positiva	Negativa	Positiva

  - Asíntotas:
    - Horizontales: analizamos el límite en el infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ es una asíntota horizontal}$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- o Verticales: analizamos qué ocurre en $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{"0"} = \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

- o Como tiene asíntotas horizontales, no tendrá asíntotas oblicuas.

- Monotonía: hallamos la derivada: $f(x) = \dfrac{2x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

  y vemos que nunca se anula. Del dominio definimos los intervalos: $(-\infty,-1)$ y $(-1,+\infty)$.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x_0)$	$f'(-2) = 2 > 0$	$f'(0) = 2 > 0$
$f(x)$	Creciente ↗	Creciente ↗

- Máximos y mínimos: Como la derivada no se anula, no hay máximos ni mínimos relativos.
- Curvatura: Hallamos la derivada segunda:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

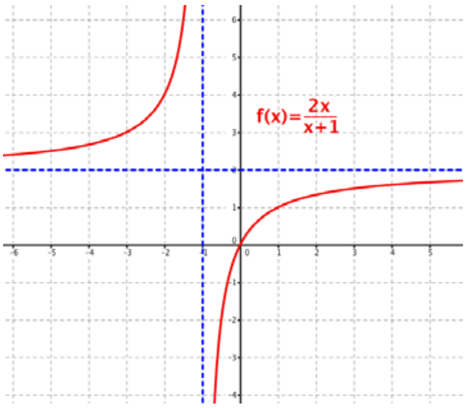
  que tampoco se anula en el dominio de la función. Consideramos, como antes, los intervalos: $(-\infty, -1)$ y $(-1,+\infty)$.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1,+\infty)$
$f''(x_0)$	$f''(-2) = +4 > 0$	$f''(0) = -4 < 0$
$f(x)$	Cóncava	Convexa

- Puntos de inflexión:

  Como la derivada segunda no se anula, no hay puntos de inflexión.

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



2.3. Funciones con radicales

Son funciones de la forma: $f(x)=\sqrt[n]{F(x)}$

- Si el índice es par, solo estarán definidas cuando el radicando sea mayor o igual que cero.
- La función $f(x)$ conserva el resto de aspectos analizables en $F(x)$: dominio, cortes, monotonía,…

Actividad resuelta

- *Representa gráficamente la función* $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.
  - Dominio: Al tener índice par, el radicando ha de ser mayor o igual que cero:

$$x^2-4\ge 0 \Rightarrow x^2\ge 4 \Rightarrow \begin{cases} x\le -2 \\ x\ge +2 \end{cases}$$

También podemos factorizar el radicando y analizar los signos:

$$x^2-4=(x+2)\cdot(x-2)$$

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(+2, +\infty)$
$(x-2)$	–	–	+
$(x+2)$	–	+	+
x^2-4	+	–	+
$f(x)$	Existe	———	Existe

Por tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}-(-2,+2) = (-\infty,-2]\cup[+2,+\infty)$

  - Cortes con los ejes:
    - Eje X: $f(x)=\sqrt{x^2-4}=0 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} (-2,\ 0) \\ (+2,\ 0) \end{cases}$
    - Eje Y: $x = 0$ no pertenece al dominio, por tanto no corta al eje OY.
  - Simetría: x^2-4 es par, luego $f(x)$ también lo es:

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-4}=\sqrt{x^2-4}=f(x)\Rightarrow f(x) \text{ es par}$$

  - Regiones de existencia:

Como $f(x)$ es una raíz de orden par, es siempre positiva en su dominio:

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2, 2)$	$(+2,+\infty)$
$f(x)$	Positiva	———	Positiva

  - Asíntotas:
    - Verticales: No tiene, ya que x^2-4 es continua en todo $\mathbb{R}$.
    - Horizontales: analizamos los límites en el infinito

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty \Rightarrow \text{no tiene asíntotas horizontales}$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- Como no tiene asíntotas horizontales, analizamos las asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-\dots}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 \text{ si } x\to+\infty \\ -1 \text{ si } x\to-\infty \end{cases}$$

Entonces:

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty} [\sqrt{x^2-4} \mp x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4}\mp x)(\sqrt{x^2-4}\pm x)}{(\sqrt{x^2-4}\pm x)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\left(\sqrt{x^2-4}\pm x\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4}{\left(\sqrt{x^2-4}\pm x\right)} = 0$$

Entonces, hay **dos** asíntotas oblicuas:

$y = x$ cuando $x \to +\infty$ e $y = -x$ cuando $x \to -\infty$

- Monotonía: hallamos la derivada:

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

Al intentar anularla, obtendríamos $x = 0$, que no pertenece al dominio. Entonces:

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(+2,+\infty)$
$f'(x_0)$	$f'(-3) = \frac{-3}{\sqrt{5}} < 0$	$f'(3) = \frac{+3}{\sqrt{5}} > 0$
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗

- Máximos y mínimos:

Como la derivada no se anula en el dominio, no hay máximos ni mínimos relativos.

- Curvatura: Hallamos la derivada segunda:

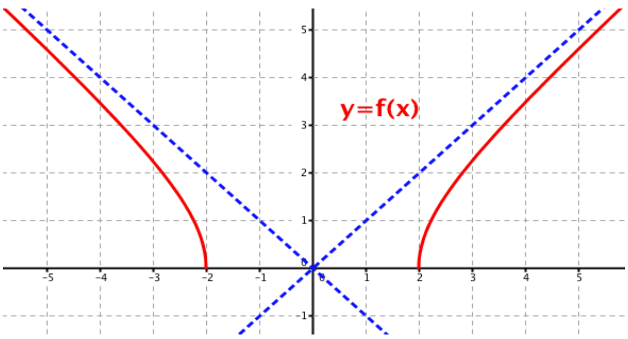
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - x\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2} = \dots = \frac{-4}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}$$

que tampoco se anula en el dominio de la función, y se ve fácilmente que es siempre negativa ya que el signo de la raíz cuadrada es positivo. Por tanto, $f(x)$ es siempre convexa

- Puntos de inflexión:

Como la derivada segunda no se anula, no hay puntos de inflexión.

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



2.4. Funciones exponenciales

Son de la forma: $f(x) = e^{F(x)}$

- $f(x)$ nunca se anula y es siempre positiva: $f(x) > 0 \ \forall \ x \in \text{Dom } f$.
- La función $f(x)$ conserva varios aspectos de $F(x)$: dominio, monotonía, curvatura,...

Actividad resuelta

- *Estudia y representa gráficamente la función* $f(x) = e^{-x^2+2x}$.
  - Dominio: El exponente es un polinomio, por tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$
  - Cortes con los ejes:
    - Eje X: $f(x) = e^{-x^2+2x} = 0$, no hay puntos de corte
    - Eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$, corta al eje OY en $(0,\ 1)$
  - Simetría: $x^2 - 2x$ no tiene simetría, luego $f(x)$ tampoco es par o impar:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2+2(-x)} = e^{-x^2-2x} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

  - Asíntotas:
    - Verticales: No tiene, ya que $x^2 - 2x$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
    - Horizontales: analizamos los límites en el infinito

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2+2x} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal en } \pm\infty$$

    - Como tiene asíntotas horizontales, no tendrá asíntotas oblicuas.
  - Monotonía: hallamos la derivada:

$$f(x) = e^{-x^2+2x} \Rightarrow f'(x) = (-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x}$$

y la anulamos:

$$(-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x} = 0 \Rightarrow -2x+2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Así, definimos los intervalos: $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Intervalo	$(-\infty, +1)$	$(+1, +\infty)$
$f'(x_0)$	$f'(0) = 2 > 0$	$f'(2) = -2 < 0$
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘

  - Máximos y mínimos:

A partir de la tabla anterior deducimos que la función tiene un máximo en $x = +1$.

$$f(+1) = e \rightarrow \text{Máximo en } (+1,\ e)$$

Comprobamos con la derivada segunda:

$$f'(x) = (-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x} \Rightarrow f''(x) = (4x^2 - 8x + 2)\cdot e^{-x^2+2x}.$$

Entonces:

$$f''(+1) = -2e < 0 \rightarrow \text{Se confirma el máximo en } (+1,\ e)$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- Curvatura: Ya hallamos antes la derivada segunda, la igualamos a cero:

$$\left(4x^2-8x+2\right)\cdot e^{-x^2+2x}=0\Rightarrow 4x^2-8x+2=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

Entonces:

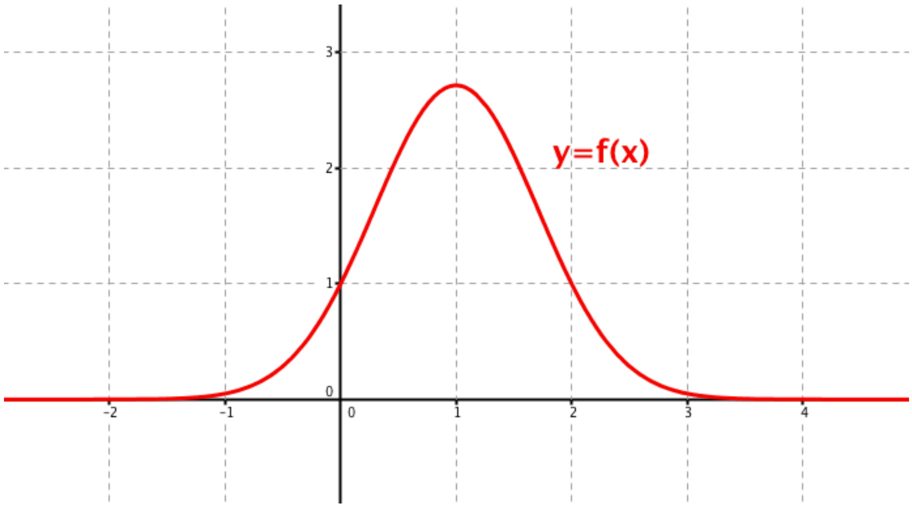
Intervalo	$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
$f''(x_0)$	$f''(0)=2>0$	$f''(1)=-2e<0$	$f''(2)=2>0$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

- Puntos de inflexión:

Hay dos puntos de inflexión, en $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ y $x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$:

- $f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{e}\Rightarrow\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$
- $f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{e}\Rightarrow\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



Actividades propuestas

1. Estudia las diferencias del comportamiento en el infinito de las funciones:

$$f(x)=x^2e^{-x^2}\ ,\ g(x)=5x\cdot e^{x-1}\ \text{y}\ h(x)=\frac{e^x}{x}$$

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verificando que $f'(x)>0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

a) Analiza el crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)=f\left(e^x\right)$.

b) ¿Tiene algún extremo relativo la función $h(x)=e^{-f(x)}$? Justifica las respuestas.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.5. Funciones logarítmicas

Son funciones de la forma: $f(x) = \ln[F(x)]$

- Sólo están definidas cuando el argumento es estrictamente mayor que cero.
- Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, las raíces de $F(x)$ son asíntotas verticales de $f(x)$.
- Los ceros de $f(x)$ son aquellos valores para los que $F(x) = 1$.
- La función $f(x)$ conserva el resto de aspectos analizables en $F(x)$: dominio, monotonía,…

Actividad resuelta

- *Estudia y representa gráficamente la función* $f(x) = \ln(x^2 - 3)$.
  - Dominio: El argumento debe ser positivo, por tanto:

$$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 > 3 \Rightarrow |x| > \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \\ x > +\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\right] = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(+\sqrt{3}, +\infty\right)$$

  - Cortes con los ejes:
    - Eje X: $\ln(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.
    - Eje Y: $x = 0 \notin \text{ Dom } f$.
  - Simetría: $x^2 - 3$ es par, luego $f(x)$ también lo es:

$$f(-x) = \ln\left[(-x)^2 - 3\right] = \ln(x^2 - 3) = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es par}$$

  - Regiones de existencia:

Con el dominio de $f(x)$ y con los cortes con los ejes, tenemos:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$\left(-2, -\sqrt{3}\right)$	$\left(+\sqrt{3}, +2\right)$	$(+2, +\infty)$
$f(x_0)$	$f(-3) = \ln 6 > 0$	$f(-1'9) = -0'5$	$f(1'9) = -0'5$	$f(3) = \ln 6 > 0$
$f(x)$	Positiva	Negativa	Negativa	Positiva

  - Asíntotas:
    - Verticales: Como dijimos, las raíces de $F(x)$ son asíntotas verticales de $f(x)$:

$$\lim_{x\to -\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\to -\sqrt{3}^-} \ln(x^2 - 3) = \ln 0^+ = -\infty \Rightarrow x = -\sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to \sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x\to \sqrt{3}^+} \ln(x^2 - 3) = \ln 0^+ = -\infty \Rightarrow x = +\sqrt{3}$$

    - Horizontales: analizamos los límites en el infinito

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x^2 - 3) = +\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal}$$

    - Buscamos asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x} = 0$$, porque x es dominante frente al logaritmo.

Como $m = 0$, **NO** tiene sentido buscar el valor de n.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Entonces, $f(x)$ NO tiene asíntotas oblicuas (ni horizontales). Tiene rama parabólica.

- Monotonía: hallamos la derivada:

$$f(x)=\ln\left(x^2-3\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2-3}$$

y la anulamos:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-3}=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0\notin \text{Dom } f.$$

Así, definimos los intervalos:

Intervalo	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$
$f'(x_0)$	$f'(-2)=-4<0$	$f'(2)=4>0$
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗

- Máximos y mínimos:

Como $x=0\notin \text{Dom } f$, la función no tiene un máximo ni mínimo relativo.

- Curvatura: Hallamos la derivada segunda:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-3}\Rightarrow f''(x)=\frac{-2x^2-6}{\left(x^2-3\right)^2}$$

e igualamos a cero:

$$\frac{-2x^2-6}{\left(x^2-3\right)^2}=0\Rightarrow -2x^2-6=0\Rightarrow x^2=-3\Rightarrow x\notin\mathbb{R}.$$

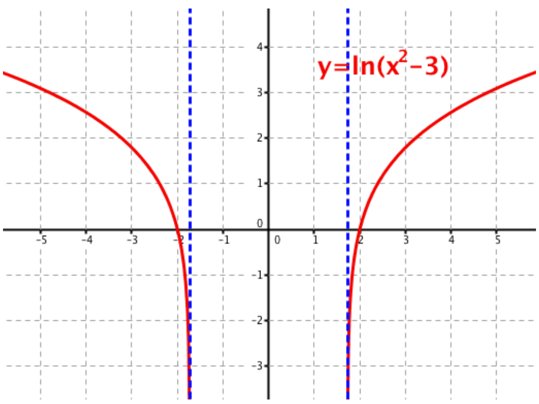
Así, definimos los intervalos:

Intervalo	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$
$f''(x_0)$	$f''(-2)=-14<0$	$f''(2)=-14<0$
$f(x)$	Convexa	Convexa

- Puntos de inflexión:

Como la derivada segunda no se anula, no hay puntos de inflexión.

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.6. Funciones trigonométricas

En cursos anteriores se estudiaron las gráficas de las seis funciones trigonométricas *básicas*, $y = \cos x$, $y = \text{sen } x$, $y = \sec x$, $y = \text{cosec } x$, $y = \text{tg } x$ e $y = \text{cotg } x$, así que no lo repetiremos aquí. Dependiendo de la función analizada, nos encontramos no sólo con los problemas de la función argumento, sino también con las propias peculiaridades de las trigonométricas.

Son tantas las situaciones posibles que pueden darse, que nos limitaremos a casos sencillos.

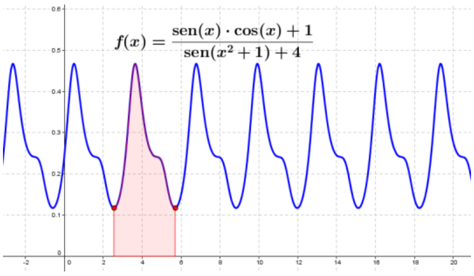
- Para $f(x) = \cos F(x)$ y $f(x) = \text{sen } F(x)$, el dominio de $f(x)$ coincide con el de $F(x)$.

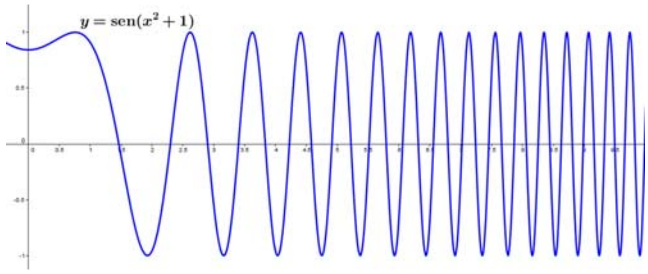
  Para el resto, a las discontinuidades de $F(x)$ se suman las intrínsecas a las trigonométricas:

♦ $f(x) = \text{cosec } F(x)$ y $f(x) = \text{cotg } F(x)$, encontramos asíntotas verticales cuando $F(x) = k\pi$, con $k \in Z$

♦ $f(x) = \sec F(x)$ y $f(x) = \text{tg } F(x)$, encontramos asíntotas verticales cuando $F(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in Z$

- Las funciones serán periódicas, como ya se explicó antes, si solo hay trigonométricas cuyo argumento sean funciones lineales, como vimos en los ejemplos del tema:





  En caso de encontrar periodicidad, podremos analizar únicamente uno de los tramos.

No obstante, con las gráficas de los ejemplos vemos que sólo se pueden analizar dando todos los pasos las funciones muy sencillas. En otro caso, debemos recurrir a las herramientas informáticas.

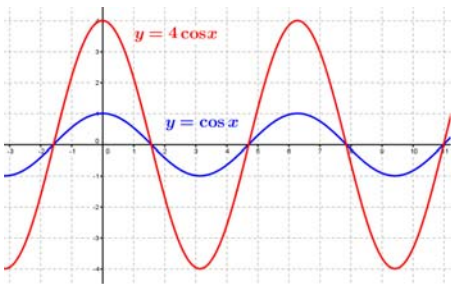
Actividades resueltas

- *Estudia y representa gráficamente la función* $f(x) = 2\cdot\cos 3x$.

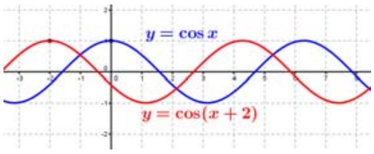
  Método 1:

  El curso pasado analizamos cómo se modificaba la gráfica de las funciones trigonométricas al añadir tres parámetros: $y = \cos x \longrightarrow f(x) = A\cdot\cos(kx+b)$

  - El valor de A modifica la amplitud de la gráfica: $-1 \le \cos x \le 1 \longrightarrow -A \le f(x) \le A$:

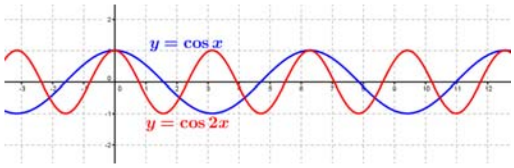


  - "b" desplaza la función b unidades a la izquierda (a la derecha si $b < 0$) en el eje OX:

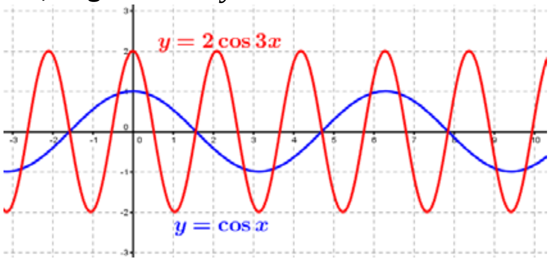


- El valor de k cambia la periodicidad de la función:

$$y = \cos x \,,\; T = 2\pi \longrightarrow f(x) = A \cdot \cos(kx + b) \,,\; T = \frac{2\pi}{k}$$



Combinando todos los pasos, la gráfica de $y = 2\cos 3x$ es:



Método 2:

Seguimos el procedimiento habitual:

- Dominio: La función coseno y el argumento existen para todo $\mathbb{R}$, por tanto:

$$\operatorname{Dom} f(x) = \mathbb{R}$$

- Periodicidad: aplicamos la definición

$$f(x) = f(x+T) \Rightarrow 2 \cdot \cos 3x = 2 \cdot \cos 3(x+T)$$
$$\cos 3x = \cos(3x + 3T)$$

Las funciones trigonométricas son periódicas de período 2π, por tanto:

$$3x + 3T = 3x + 2\pi \Rightarrow 3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

- Cortes con los ejes:
  - o Eje X: $2 \cdot \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pm\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, con $k \in Z$.
  - o Eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot \cos 0 = 2$.
- Simetría: La función coseno es par, por tanto:

$f(-x) = 2 \cdot \cos 3(-x) = 2 \cdot \cos(-3x) = 2 \cdot \cos 3x = f(x) \;\rightarrow\; f(x)$ también es par.

- Regiones de existencia:

Como la función es periódica, nos basta con estudiar el intervalo $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$:

Intervalo	$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$
$f(x_0)$	$f\left(\frac{\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} > 0$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{3\pi}{4} < 0$	$f\left(\frac{5\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{3} > 0$
$f(x)$	Positiva	Negativa	Positiva

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- Asíntotas: La función coseno no tiene asíntotas, así que $f(x)$ NO tiene asíntotas.
- Monotonía: hallamos la derivada:

$$f(x) = 2 \cdot \cos 3x \Rightarrow f'(x) = -6 \cdot \operatorname{sen} 3x$$

y la anulamos:

$$-6 \cdot \operatorname{sen} 3x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \tfrac{k\pi}{3}, \text{ con } k \in Z .$$

Así, definimos los intervalos:

Intervalo	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$
$f'(x_0)$	$f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = -6\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} < 0$	$f'\left(\frac{5\pi}{9}\right) = -6\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} > 0$
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗

- Máximos y mínimos:

En este caso, los puntos en los que se anula la derivada primera son $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$, para los que vemos que son, respectivamente, máximo y mínimo relativo.

Los confirmamos con la derivada segunda:

$$f'(x) = -6 \cdot \operatorname{sen} 3x \Rightarrow f''(x) = -18 \cdot \cos 3x$$

y vemos que:

$$f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \quad \text{y} \quad f''\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = +18 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

- Curvatura: Calculamos la derivada segunda y la igualamos a cero:

$$-18\cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \pm\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2k\pi}{3}, \text{ con } k \in Z .$$

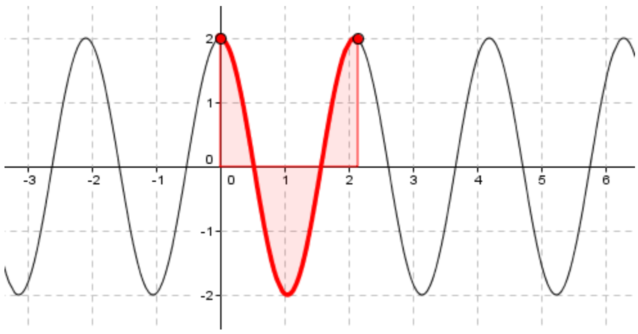
Así, definimos los intervalos:

Intervalo	$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$
$f''(x_0)$	$f''\left(\frac{\pi}{9}\right) > 0$	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$	$f''\left(\frac{5\pi}{9}\right) > 0$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

- Puntos de inflexión:

Las raíces de la función son los puntos de inflexión de abscisa: $x = 0, \pi/6, \pi/2$…

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$, aprovechando la periodicidad. A partir del recinto coloreado, obtenemos la función completa:



Igual que con las funciones polinómicas de grado dos (parábolas), es más cómodo seguir el procedimiento particular que el general.

2.7. Funciones definidas a trozos

Para representar una función definida a trozos, hay que estudiar cada una de las funciones que la definen en los intervalos correspondientes.

Actividad resuelta

- *Estudia y representa gráficamente la función*

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ x & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}.$$

- <u>Análisis general</u>: Las tres funciones implicadas existen y son continuas para cualquier valor de x, así que basta con analizar los puntos donde cambia la definición de la función:
- Veamos si la función es continua. Estudiamos la continuidad en $x = -1$ y en $x = +1$:

Continuidad en $x = -1$	**Continuidad en $x = +1$**
$\exists\ f(-1)\,?\qquad f(-1)=1$	$\exists\ f(+1)\,?\qquad f(+1)=1$
$\exists \lim\limits_{x\to -1} f(x)\,?$	$\exists \lim\limits_{x\to +1} f(x)\,?$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-x)=+1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2\right)=+1\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to +1^-}\left(x^2\right)=+1 \\ \lim\limits_{x\to +1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to +1^+} x=+1\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to +1} f(x)$
$f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)\,?$	$f(+1)=\lim\limits_{x\to +1} f(x)\,?$
$f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$	$f(+1)=\lim\limits_{x\to +1} f(x)=1$
$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x = -1$	$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x = +1$

Tenemos que $f(x)$ es continua en $x = -1$ y en $x = +1$, luego es continua en todo $\mathbb{R}$. Para representarla, aprovechamos las características especiales de las tres funciones:

- Si $x \le -1$, la función es una recta decreciente. Para representarla, basta con tomar un par de puntos, siendo uno de ellos el extremo derecho:

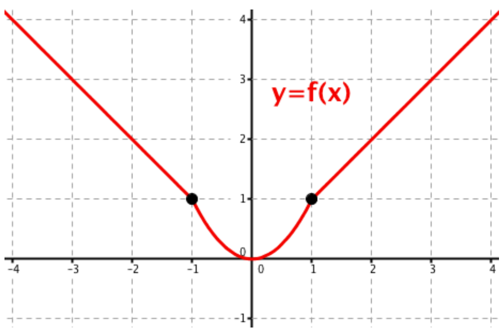
x	-4	$+4$
y	-4	$+4$

- Si $-1 \le x \le +1$, la función es una parábola. Tiene el vértice en el origen, y es abierta por arriba.

x	-1	0	$+1$
y	$+1$	0	$+1$

- Si $x \ge +1$, la función es una recta creciente. Tomamos un par de puntos:

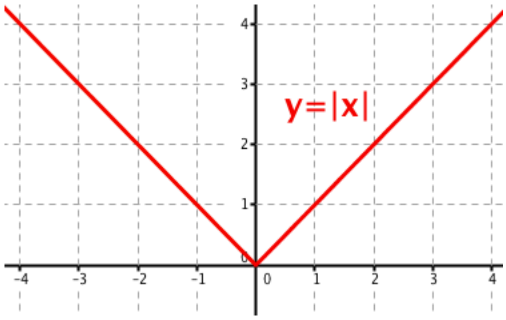
x	$+1$	$+4$
y	$+1$	$+4$



2.9. Funciones con valor absoluto

La función **valor absoluto** es una función definida a trozos:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ +x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



Y su característica principal es que nunca es negativa. La generalización de la función:

$$f(x) = |F(x)| = \begin{cases} -F(x) & \text{si} \quad F(x) < 0 \\ +F(x) & \text{si} \quad F(x) \geq 0 \end{cases}$$

implica analizar cada uno de los *trozos* para determinar cuándo $F(x)$ es negativa o, si el valor absoluto afecta a toda la expresión algebraica, bastará dibujar la gráfica de la función sin el valor absoluto y transformar su parte negativa en positiva.

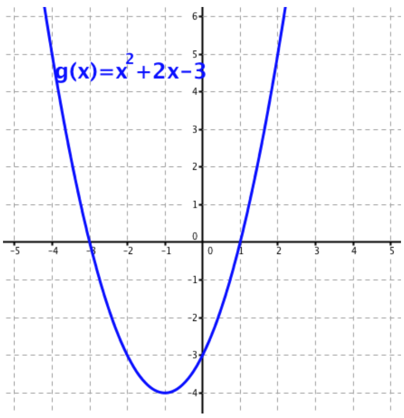
Actividad resuelta

- *Estudia y representa gráficamente la función* $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$
  - Como el valor absoluto afecta a toda la función, representamos la función sin él:

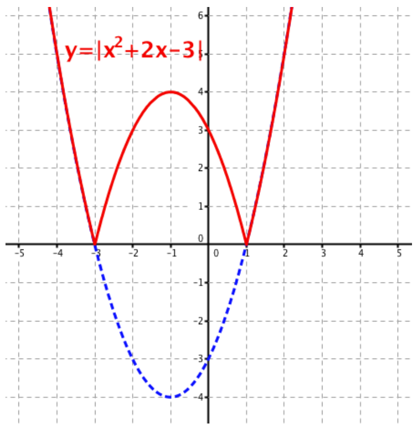
    $$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

  - Su representación gráfica es una parábola, por tanto:
    - Calculamos el vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \cdot 1} = -1 \Rightarrow g(-1) = -4 \Rightarrow V : (-1, -4)$
    - Como el término principal es positivo, $a = 1 > 0$, la parábola tiene forma de "U".
    - Corta a los ejes en:
      - Eje OY: $x = 0 \Rightarrow g(0) = -3 \Rightarrow (0, -3)$
      - Eje OX: $g(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3, 0) \\ (+1, 0) \end{cases}$
    - Hallamos $f(-2)$ con la simetría respecto a la vertical que pasa por el vértice:

X	–3	–2	**–1**	0	+1
Y	0	–3	**–4**	–3	0



Una vez representada la función sin el valor absoluto, dibujamos las partes negativas como positivas, haciendo una simetría respecto del eje X:



Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

CURIOSIDADES. REVISTA

María Gaetana Agnesi (1718 - 1799)

María Gaetana Agnesi es una matemática italiana cuya obra más importante, *Instituciones Analíticas*, fue traducida a varios idiomas y utilizada para aprender Matemáticas durante más de cincuenta años en muchos países de Europa. En ella trataba con sencillez y claridad temas, tan novedosos entonces, como el Cálculo Diferencial e Integral. Al final de su vida era famosa en toda Europa como una de las mujeres de ciencia más capaces del siglo XVIII. Un cráter de Venus lleva su nombre en su honor. En la Biblioteca Ambrosiana de Milán se guardan sus obras inéditas que ocupan veinticinco volúmenes.

Nació en Milán, en su país, al contrario que en otros países europeos, sí se aceptaba que las mujeres recibieran educación, y ella tuvo una esmerada formación. Fue una niña precoz y dotada, que con cinco años hablaba francés, y con nueve, conocía siete lenguas: italiano, latín, francés, griego, hebreo, alemán y español, por lo que recibió el apelativo de "Oráculo de siete idiomas".

Su padre, D. Pietro, era profesor en la Universidad de Bolonia. Tuvo 21 hijos e hijas, siendo María, la mayor. A D. Pietro le gustaba mostrar el talento de sus hijos en las reuniones que organizaba en sus salones. Muy pronto los sabios y eruditos y los intelectuales locales, empezaron a asistir al salón de los Agnesi para oír las disertaciones de María sobre temas filosóficos, científicos y matemáticos. A la edad de nueve años María estuvo durante una hora, ante una asamblea culta hablando en latín sobre el derecho de la mujer a estudiar ciencias y sobre cómo las artes liberales no eran contrarias al sexo femenino.

María nunca se casó. A los 21 años, quiso entrar en un convento. A instancias de su padre decidió quedarse en casa y consagrarse a las Matemáticas. El álgebra y la geometría, declaraba, son las únicas partes del pensamiento donde reina la paz.

Se considera a María la primera profesora de universidad ya que en 1748 se encargó de los cursos de su padre y dos años más tarde, en otoño de 1750, después de publicar su obra de las *Instituciones analíticas*, el Papa le dio el nombramiento para ocupar la cátedra de matemáticas superiores y filosofía natural de la Universidad de Bolonia.

Su libro, ***Instituzioni Analitiche***, fruto de diez años de trabajo, lo había comenzado con 20 años y lo terminó antes de cumplir los 30, con un total de unas mil páginas.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

La curva de Agnesi

María, como hemos visto, fue reconocida como matemática en su época, y sin embargo su reputación histórica fue distorsionada por el hecho de que, en sus *Instituzioni Analitiche,* trabajara con la "*curva de Agnesi*" o curva sinusoidal versa, "*versiera*" en italiano, que significa "virar", "girar", que se tradujo al inglés, por un error del traductor, por "*avversiera*", como la "*bruja de Agnesi*". Colson, profesor de Cambridge, *"encontró este trabajo tan excelente que, a una edad avanzada, decidió aprender italiano con el único fin de traducir ese libro y que la juventud inglesa pudiera beneficiarse de él, como lo hacen los jóvenes de Italia"*, tan excelente juzgaba la obra.

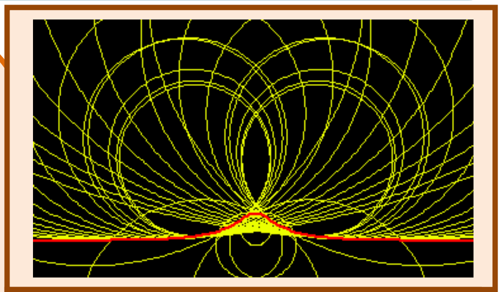
La curva de Agnesi es el lugar geométrico de los puntos P que están a igual distancia de la recta u que el punto M, y a la misma distancia de la recta r que el punto N, cuando M recorre la circunferencia.

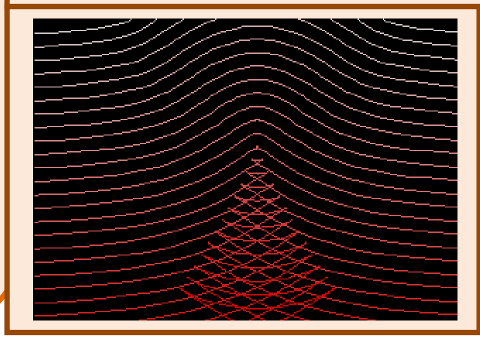
Su ecuación es:

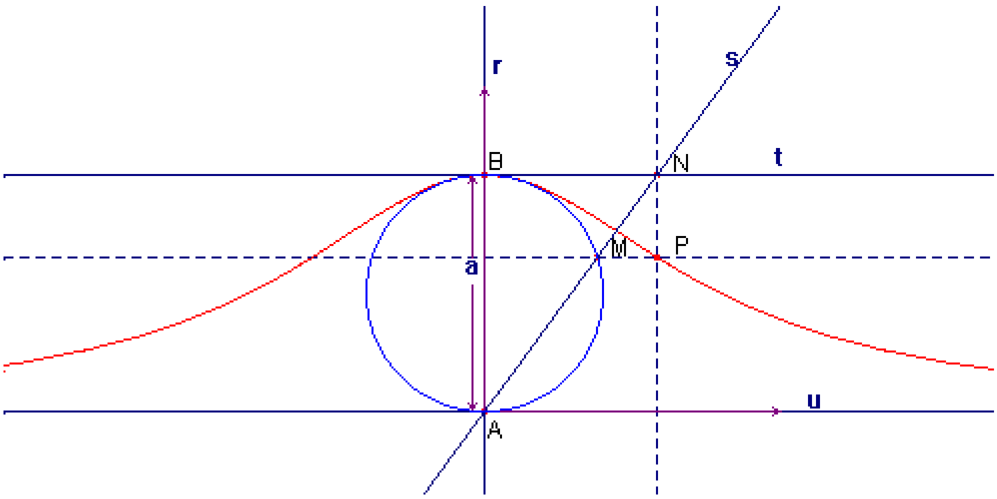
$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

Función que ya sabes dibujar. Es una función par, creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$, por lo que tiene un máximo en el punto $(0, a)$.

Tiene a $y = 0$ como asíntota horizontal.







Esta curva, fue discutida por *Fermat* en 1703.

Se ha establecido recientemente que es una aproximación de la distribución del espectro de la energía de los rayos X y de los rayos ópticos, así como de la potencia disipada en los circuitos de alta frecuencia de resonancia.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Función de Dirichlet

La **función de Dirichlet** es una función que **no es continua** en ninguno de sus puntos.

Se define: $f(x) = \begin{cases} 1 & para\ x\ racional \\ 0 & para\ x\ irracional \end{cases}$

Dirichlet

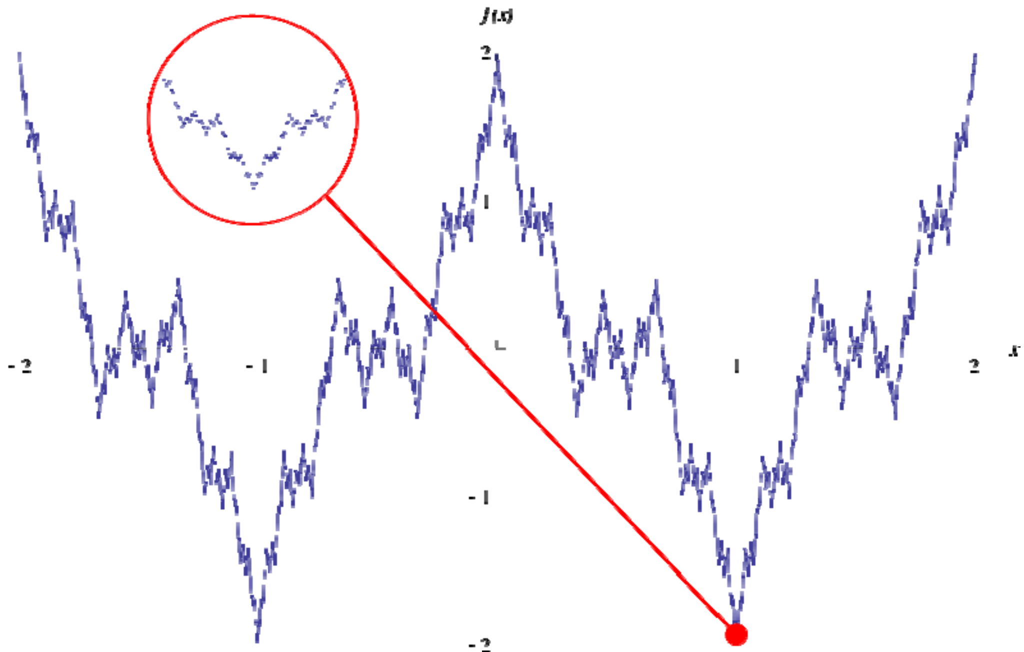
Dirichlet (1805 – 1859) es un matemático alemán que trabajó con *Fourier* para intentar explicar cómo era posible que una función pudiera representarse como una suma infinita de funciones trigonométricas, lo que *Fourier* había demostrado experimentalmente en sus estudios sobre el calor, pero que todavía no se podía explicar matemáticamente.

Fourier

Función de Weierstrass

La **función de *Weierstrass*** es **continua** en todo punto y **no es derivable** en ningún punto.

Tiene dimensión fractal mayor que uno.



Función de Weierstrass. Fuente: Wikipedia

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

RESUMEN

Para representar una función seguiremos los siguientes pasos:	
1. Dominio	Descartaremos denominadores nulos, raíces de orden par de números negativos y logaritmos cuyo argumento sea menor o igual que cero.
2. Cortes con los ejes	Intentaremos resolver: • Corte con el eje OY: Si $x = 0 \in \text{Dom} f \Rightarrow (0, f(0))$ • Corte/s con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \{(x_1,0),(x_2,0),\ldots,(x_k,0)\}$
3. Simetría	Diremos que: • $f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$, y $f(x)$ tiene simetría especular respecto a OY. • $f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$, y $f(x)$ es simétrica respecto al origen.
4. Periodicidad	$f(x) = f(x+T)\ \forall x \in \text{Dom} f$
5. Asíntotas	• **Verticales**: $x = a$ es una asíntota vertical si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ • **Horizontales**: $y = k$ es una asíntota horizontal si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$. • **Oblicuas**: $y = m\cdot x + n$ es una asíntota oblicua si $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$ $\quad n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - m\cdot x] \in \mathbb{R}$
6. Monotonía	• $f(x)$ es **creciente** en los intervalos donde $f'(x) > 0$. • $f(x)$ es **decreciente** en los intervalos donde $f'(x) < 0$.
7.Puntos críticos	Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo relativo. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo relativo.
8. Curvatura	• $f(x)$ es **cóncava** en los intervalos donde $f''(x) > 0$. • $f(x)$ es **convexa** en los intervalos donde $f''(x) < 0$.
9. Puntos de inflexión	Si la función $y = f(x)$ tiene un **punto de inflexión** en $x = a$, y existe la segunda derivada, entonces $f''(a) = 0$

En los casos *degenerados* en los que se anulan las derivadas sucesivas $f'(a)$ y $f''(a)$, seguiremos derivando hasta encontrar una derivada n–sima no nula, $f^{n)}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n = par, $x = a$ es un **máximo relativo** si $f^{n)}(a) < 0$ y un **mínimo relativo** si $f^{n)}(a) > 0$.
- Si n = impar, $x = a$ es un **punto de inflexión**.

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1.- Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ b) $f(x) = x^4 + 2x^3$ c) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$

d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ e) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

g) $f(x) = \dfrac{0{,}5x^3}{x^2-4}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ i) $f(x) = x^2 e^x$

j) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ k) $f(x) = x^2 e^{-x}$ l) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

m) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ n) $f(x) = \ln(x^2+1)$ ñ) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

2.- Considera la función $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$

a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.

b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

3.- Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x) = (x-2)^2(x+1)$. Indica dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

4.- Representa gráficamente y estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < -\dfrac{1}{2} \\ -x^2 + 3x & \text{si} \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le 3 \\ |x+3| & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

5.- Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{|x-2|}{|x-1|} - 1$, estudiando su continuidad.

6.- Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál será ese beneficio?

7.- La producción de cierta hortaliza en un invernadero ($Q(x)$ en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la expresión $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$.

a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

8.- Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

9.- Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

10.- Se quiere fabricar una caja de volumen máximo que sea el doble de larga que de ancha y que, además, la suma del ancho más el largo más el alto sea igual a un metro. Calcula las medidas que debe tener la caja y cuál será su volumen.

11.- Se desea construir el marco de una ventana rectangular de 6 m2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,50 euros y el del tramo vertical 3 euros.

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?

12.- Se quiere construir un recipiente cónico cuya generatriz mida 10 cm y que tenga capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

13.- Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?

14.- Determina el radio de la base y la altura de un cilindro de 54 cm^2 de área total para que su volumen sea máximo.

15.- En la oficina central de Correos de cierto país están expuestas las tarifas del servicio de cartas, que son las siguientes:

– Cartas hasta 20 gramos de peso: 17 céntimos de euro.

– Por cada 10 g o fracción de exceso de peso hay que añadir 5 céntimos más.

a) Escribe la fórmula de la función $y = f(x)$ (donde x representa el peso de cada carta en gramos e y el precio que se tiene que pagar para enviarla), hasta 50 g.

b) Representa gráficamente la función e indica en qué puntos de su dominio es discontinua y por qué.

16.- El coste total de producción de x unidades de un producto es $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$. Se define la función coste medio por unidad como:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

¿Cuántas unidades hay que producir para que el coste por unidad sea mínimo?

17.- Una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tiene en funcionamiento (n) de acuerdo con la expresión:

$$B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n\,.$$

Determinar razonadamente:

a) El número de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

18.- Sea la función $y = 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1}$

a) Indica dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Realiza la representación gráfica de la misma.

19.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x+4)^2 + 4 & si \quad x < -2 \\ x^2 - 4 & si \quad x \geq -2 \end{cases}$

a) Dibuja su gráfica aproximada y analiza su continuidad y derivabilidad.

b) Calcula los máximos y mínimos absolutos y relativos de la función en el intervalo $[-8,8]$.

20.- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando que $f'(x) > 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Analiza el crecimiento y decrecimiento de la función $g(x) = f(e^x)$.

d) ¿Tiene algún extremo relativo la función $h(x) = e^{-f(x)}$? Justifica las respuestas.

21.- Obtén y representa una función polinómica de tercer grado $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que tenga un mínimo en el punto $(1,1)$ y un punto de inflexión en el punto $(0,3)$.

21.- La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x + 3} & \text{si} \quad x > 15 \end{cases}$$

a) Estudia y representa la función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justifica que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos.

b) Justifica que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.

AUTOEVALUACIÓN

1. El dominio de definición de la función $f(x) = 2^{\frac{sen(x+3)}{x^2-4}}$ es:

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$ b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$ c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{4\}$ d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pi/2\}$

2. Los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-3)}$ son:

a) (–1, 0), (4, 0), (0, –4/3) b) (3, 0), (0, 4) c) (1, 0), (–4, 0), (0, 4/3) d) (1, 0), (4, 0), (0, –4/3)

3. Indica cuál de las siguientes funciones no tiene ningún tipo de simetría:

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$, c) $y = e^x$ d) $y = sen(x)$

4. Las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}$ son:

a) $x = 3$, $x = 4$, $y = 1$ b) $x = 2$, $x = 1$, $y = 1$ c) $x = -3$, $x = -4$, $y = 1/6$ d) $x = 3$, $x = 4$, $y = x-2$

5. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < 0 \\ x^3 - 12x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ tiene máximos y mínimos en los puntos de abscisa siguientes:

a) $x = 0$, $x = 2$ b) $x = 2$ c) $x = 3$, $x = 2$ d) $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$

6. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa:

a) $x = 2$ b) $x = 0$ c) $x = 3$ d) $x = -2$

7. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) El dominio de las funciones polinómicas es siempre toda la recta real

b) Las funciones definidas a trozos nunca son continuas

c) Las funciones exponenciales están definidas en la misma región que su exponente

d) Las funciones: $y = e^x$; $y = sen(x)$; $y = cos(x)$ están definidas en toda la recta real

8. La función $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}}$ no está definida en los intervalos indicados:

a) (1, 2), (3, 4) b) [1, 2], [3, 4] c) [1, 2], (3, 4) d) (1, 2), [3, 4]

9. La función $f(x) = \ln\left(\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}\right)$ tiene como asíntota horizontal:

a) $y = 0$ b) $y = 1$ c) No tiene d) $y = 1/6$

10. La función $f(x) = 2 \cdot \cos 3x$ tiene como amplitud y periodo:

a) $A = 2$, $T = 2\pi/3$ b) $A = 3$, $T = \pi$ c) $A = 4$, $T = 2\pi/3$ d) $A = 2$, $T = 2\pi$

Autora: Leticia González Pascual
Revisores: Álvaro Valdés y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Apéndice: Problemas de funciones en las P.A.A.U.

(1) Considera la función:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-4}{x^2}$$

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

b) Determina sus asíntotas.

c) Dibuja la gráfica de $y=f(x)$.

(2) Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^{-x^2}$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halla, si existen, los máximos y mínimos de la función.

c) Dibuja aproximadamente su gráfica.

(3) Se considera la función real $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, donde a, b y c son números reales. Encuentra los valores de a, b y c para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x=2$ y $x=4$ sean paralelas al eje OX, sabiendo además que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje OX.

(4) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & si \quad x\le 1 \\ ax+b & si \quad x>1\end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que la función sea derivable en todos los números reales.

b) Para esos valores de a y b halle los extremos de la función y dibuje su gráfica.

(5) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8 & si \quad x\le -2 \\ 2x+4 & si \quad -2<x\le 0 \\ a\cos x & si \quad x>0\end{cases}$

a) Estudia su continuidad en toda la recta real en función de a.

b) Estudia su derivabilidad en toda la recta real en función de a.

c) Para $a=4$, haz un dibujo aproximado de su gráfica.

(6) Se considera la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$

a) Estudia el dominio de definición y calcule las asíntotas.

b) Estudia los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.

c) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

d) Esboza la gráfica de la función.

(7) Sabiendo que $f(x)=\begin{cases}4 & si \quad x\le 0\\ 4-x^2 & si \quad x>0\end{cases}$

a) Estudia su continuidad en el punto $x=0$.

b) Usando la definición de derivada calcula, si existe, la derivada de la función *f* en $x=0$.

c) Dibuja la gráfica de la función.

(8) Dada la función $y=5x\cdot e^{x-1}$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

c) Dibuja aproximadamente su gráfica.

(9) Sea $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}$

a) Determina el dominio de definición, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

b) Halla las asíntotas y represente aproximadamente la gráfica de la función.

(10) Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-1} & si \quad x<1 \quad x\neq -1\\ -x^2+3x-2 & si \quad x\ge 1\end{cases}$.

a) Halla un valor de la función en $x=-1$ que la haga continua en ese punto.

b) Analiza su continuidad y derivabilidad en toda la recta real.

c) Traza su gráfica aproximada.

(11) Representa la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$ analizando el dominio de existencia, el crecimiento y el decrecimiento, los máximos y los mínimos, la concavidad y la convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas.

(12) a) Representa gráficamente las funciones $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=|x|$.

b) Utiliza las gráficas anteriores para obtener las de las funciones $y=f(g(x))$ e $y=g(f(x))$.

(13) Un modelo simplificado de la altura a la que se encuentra un proyectil conduce a la siguiente expresión ($f(x)$ representa la altura, en metros, a la que se encuentra el proyectil a los *x* segundos de ser lanzado):

$$f(x)=250-\frac{250}{x+1}-10x, \quad 0\le x\le 24$$

a) Dibuja la gráfica de la función. ¿En qué instante el proyectil empieza a caer?

b) ¿Podríamos derribar con él un objeto que vuela a 250 metros de altura?

(14) a) Calcula para qué valor de α la función $f(x)=(x-\alpha)^2+\cos(x)$ tiene un extremo en el punto de abscisa $x=0$. ¿De qué tipo de extremo se trata?

b) Para el valor de α calculado, determina los cortes de la curva con los ejes y los dominios de monotonía.

(15) El tiempo que un empleado tarda en realizar una tarea varía durante los cuatro primeros meses de contrato según su experiencia. Así, la función que relaciona el tiempo empleado en realizar la tarea con la experiencia del operario es ($f(x)$ representa el tiempo, en horas, que tarda en realizar la tarea un empleado que lleva contratado un tiempo x, medido en meses):

$$f(x)=\begin{cases} 12-x^2 & si \quad 0<x\le 2 \\ (x-4)^2+4 & si \quad 2<x\le 4 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función f. ¿Es el tiempo necesario para realizar la tarea una función continua del tiempo de experiencia?

b) ¿En qué momento el tiempo necesario para realizar la tarea es mínimo? ¿Cuánto tiempo le lleva finalizar la tarea en ese instante? ¿Consigue el empleado finalizar la tarea en menos de 3 horas en algún momento durante los primeros cuatro meses de contrato?

(16) Para un determinado modelo de coche la relación existente entre la velocidad a la que circula y el consumo viene dada a través de la siguiente expresión ($f(x)$ representa el consumo en litros cada 100 km a una velocidad de x km/h):

$$f(x)=2+\frac{x}{90}+\frac{90}{x}, x>10$$

a) Dibuja la gráfica de la función. ¿Cuál es la velocidad óptima a la que se debe circular para consumir la menor cantidad de combustible posible?

b) ¿En algún instante el consumo aumenta al aumentar la velocidad? ¿Es posible conducir con un consumo de 3 litros cada 100 km?

(17) El porcentaje de ocupación de una cafetería entre las 13 y las 21 horas se explica bastante bien por la siguiente función ($P(x)$ representa el porcentaje de ocupación a las x horas).

$$P(x)=(x^2-55x)\cdot(x+1)+1015x-5542, \quad 13\le x\le 21$$

a) Indica los intervalos de tiempo en que la ocupación crece y aquellos en que decrece.

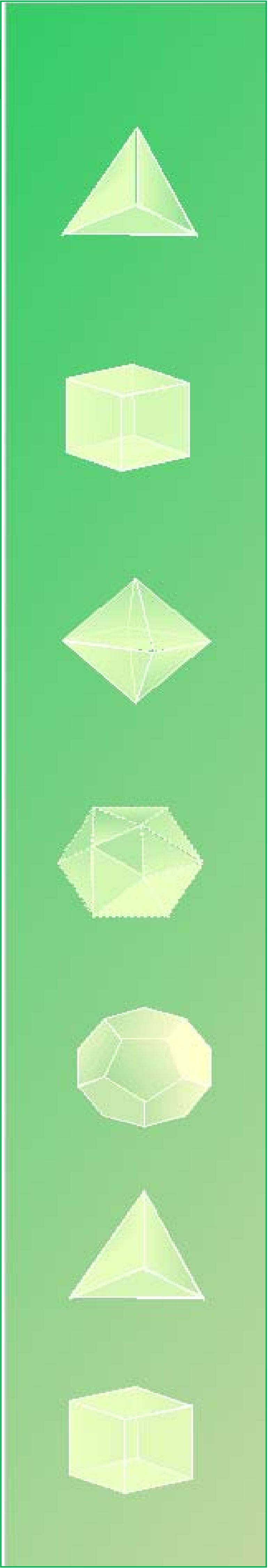
b) Dibuja la función. ¿Cuándo se alcanza el porcentaje de ocupación más alto? ¿y el más bajo? ¿Cuánto valen?

c) ¿La función tiene algún máximo o mínimo relativo que no sea absoluto?

(18) Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & si \quad x<3 \\ x^2-1 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$.

a) Determina los valores de a para los que la función es continua.

b) Representa gráficamente la función.



MATEMÁTICAS II
2º Bachillerato
Capítulo 10: Integrales

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *software* libre (GeoGebra y GIMP)

Índice

Resumen

A estas alturas de tu vida estudiantil has aprendido muchos símbolos matemáticos. Posiblemente este sea el último que aprenderás en el instituto, el símbolo de integral:

$$\int$$

Fue introducido por el matemático alemán *Gottfried Leibniz* en 1675, basándose en la palabra latina *summa*, 'suma', escrito ſumma, tomando sólo la inicial. Por tanto, este símbolo es una S, y la integral no deja de representar una suma.

El término "Cálculo integral", por su parte, fue introducido por *Jakob Bernoulli* en 1690.

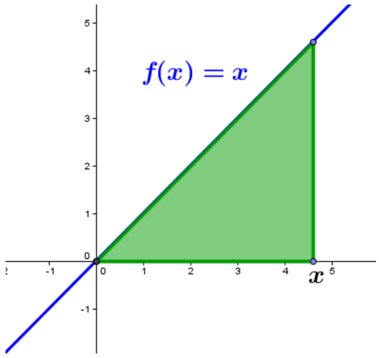
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Actividades de introducción

- *Calcula el área de la región limitada por la función* $f(x) = x$ *entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa* x.

Solución:

Si representamos la función $f(x) = x$ y dibujamos la superficie entre ella y el eje OX, obtenemos el triángulo rectángulo de la figura.



Sabemos que el área del triángulo es: $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

Tanto la base como la altura valen x unidades, por tanto:

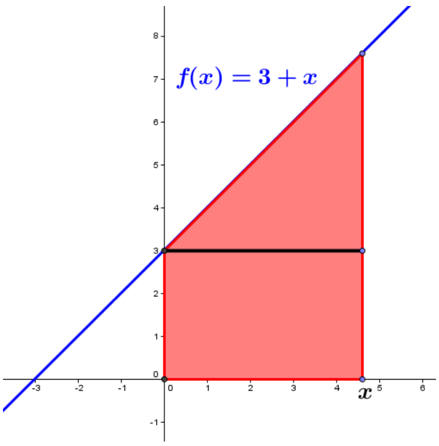
$$\text{Área} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto, el área bajo la curva $f(x) = x$ se calcula como $\mathrm{A}(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

- *Calcula el área de la región limitada por la función* $f(x) = 3 + x$ *entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa* x.

Solución:

Como antes, representamos la función $f(x) = 3 + x$ y dibujamos la superficie entre ella y el eje OX. Ahora obtenemos el trapecio rectángulo de la figura.



Si dividimos la figura en un rectángulo de altura 3 u y un triángulo, el área se calcula como:

$$\text{Área} = 3 \cdot x + \frac{x \cdot x}{2} = 3x + \frac{x^2}{2}$$

Por tanto, el área bajo la curva $f(x) = 3 + x$ se calcula como:

$$\mathrm{A}(x) = 3x + \frac{x^2}{2}.$$

- *Repite los procedimientos anteriores para calcular el área de la región limitada por las funciones* $f(x) = a$, $f(x) = a \cdot x$ y $f(x) = a \cdot x + b$ (con a y $b \in \mathbb{R}$) *entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa* x.

Analiza:

- Deriva las expresiones obtenidas en los ejercicios anteriores y razona qué relación hay entre las funciones $\mathrm{A}(x)$ y $f(x)$.
- Recuerda la interpretación de área como "*suma de las unidades cuadradas encerradas por una figura*". Aplícala para determinar el área de la función $f(x) = 16 - x^2$, representándola en una cuadrícula y contando el número de cuadrados bajo ella para diferentes valores de x.
- Razona qué ocurre con el área cuando la función $f(x)$ es negativa en el intervalo analizado.

1. PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN. LA INTEGRAL INDEFINIDA

1.1. Definición de primitiva

Se llama **función primitiva** de una función $f(x)$ a otra función $F(x)$ tal que la derivada de $F(x)$ es $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$

Ejemplo:

- *La función* $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$ *es una primitiva de* $f(x) = 3x^2 - x + 3$, *ya que* $F'(x) = f(x)$.

Teniendo en cuenta las propiedades de la derivada, se verifica que si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, cualquier otra función primitiva de $f(x)$ es de la forma $F(x) + C$, con $C \in \mathbb{R}$.

En efecto; consideramos la función $F(x) + C$, tal que $F'(x) = f(x)$ y $C \in \mathbb{R}$. Si derivamos:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

Por tanto, $F(x) + C$ es primitiva de $f(x)$.

1.2. Definición de integral indefinida

La **integral indefinida** de una función $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas, y se representa como $\int f(x)dx$. Se lee "integral de $f(x)$ diferencial de x".

Por tanto, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

A C se la denomina **constante de integración**, y el dx nos indica que estamos integrando respecto de x.

Esto que ahora no parece tener demasiada importancia, sí la tendrá más adelante, ya que está relacionado con la regla de la cadena que vimos en el capítulo anterior y, en el futuro, aprenderás a realizar integrales en varias variables.

Por otro lado, si recordamos lo visto en la actividad inicial y lo explicado en el "Resumen" acerca del origen del símbolo de integral, la expresión de la integral indefinida es la estilización de la expresión:

Suma de $f(x)$ por Δx cuando $\Delta x \to 0$,

es decir:

$\int f(x)dx =$ "la suma del área de todos los rectángulos de altura $f(x)$ y base infinitesimal (dx)"

Ejemplos:

- $\int 4x^3 dx = x^4 + C$ *porque* $(x^4 + C)' = 4x^3$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ *porque* $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

1.3. Propiedades de la integral

Las propiedades de las derivadas justifican muchas de las propiedades de las integrales.

Suma (y resta) de integrales

Sabiendo que si $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Producto por un número real

Sabiendo que si $h(x) = k \cdot f(x) \Rightarrow h'(x) = k \cdot f'(x)$:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Ejemplos:

- $\int (5x^4 + 2x)dx = \int 5x^4 dx + \int 2x\,dx = x^5 + x^2 + C$ *porque* $(x^5 + x^2 + C)' = 5x^4 + 2x$.
- $\int 7\cos x\,dx = 7\int \cos x\,dx = 7\,\text{sen}\,x + C$ *porque* $(7\,\text{sen}\,x + C)' = 7\cos x$

Actividades resueltas

- *Determina los valores de a, b y c para los que* $F(x) = ax^3 + be^x + cx$ *es una primitiva de la función* $f(x) = 7x^2 - 5e^x + 3$.

  Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

  $$F'(x) = f(x) \Rightarrow 3ax^2 + be^x + c = 7x^2 - 5e^x + 3 \Rightarrow \{a = \tfrac{7}{3}, b = -5, c = 3\}$$

- *Determina a y b para que* $F(x) = a\ln x^3 + bx$ *sea una primitiva de* $f(x) = \ln x^2 - 5$.

  Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

  $$F'(x) = f(x) = a\frac{3x^2}{x^3} + b \neq \ln x^2 - 5 \Rightarrow \text{Es imposible}$$

- *Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función* $f(x) = 3 + 8x + 15x^2$. *Encuentra la función del coste total,* $F(x)$*, si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva* F *de f que verifica que* $F(0) = 100$.

  Como F es una primitiva de $f(x) = 3 + 8x + 15x^2$:

  $$F(x) = \int f(x)dx = \int (3 + 8x + 15x^2)dx = 5x^3 + 4x^2 + 3x + C$$

  Nos dicen que $F(0) = 100$:

  $$F(0) = 100 \Rightarrow 5 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + C = 100 \Rightarrow C = 100$$

  Entonces:

  $$F(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 100$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Actividades propuestas

1. Calcula las siguientes primitivas:

a) $\int 4x^3 dx$ b) $\int 3x^2 dx$ c) $\int 5x^4 dx$ d) $\int \left(5x^4 - 4x^3 + 3x^2\right) dx$

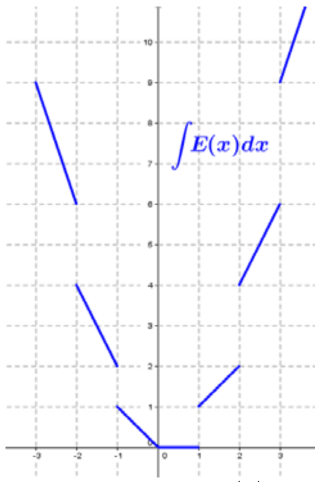
2. Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, calcula la primitiva de $f(x)$ que verifica $F(0) = 4$.

3. Comprueba si $F(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 5$ es una primitiva de $f(x) = 12x^2 + 4x + 3$. En caso negativo, explica por qué.

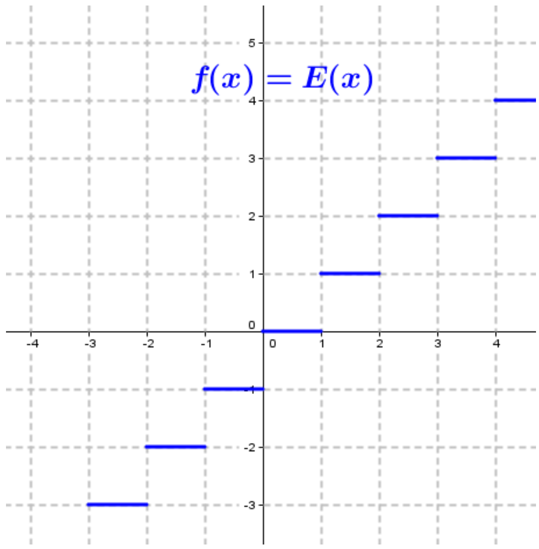
4. Determina los valores de a, b, c y d para los que $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es una primitiva de la función $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

5. Al resolver una primitiva, Javier y Ricardo han utilizado métodos diferentes y, como era de esperar, han obtenido expresiones distintas. Después de revisarlo muchas veces y no encontrar ningún error en los cálculos, le llevan el problema a la profesora para ver quién tiene bien el ejercicio.
Para su sorpresa, la profesora les dice que ambos tienen bien el problema. ¿Cómo es posible?

6. Razona por qué la gráfica siguiente:



es una primitiva de la función "parte entera de x", $E(x)$, (salvo en los puntos de discontinuidad donde no es derivable):



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2. INTEGRALES DE FUNCIONES ELEMENTALES

2.1. Integral del diferencial de x. Integrales inmediatas

El término dx está relacionado, como su propio nombre indica, con el concepto de diferencial visto en el capítulo anterior. Teniendo en cuenta que la derivada y la integral son operaciones inversas una de la otra, es inmediato deducir que:

$$\int dx = x + C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Esta idea nos permite definir las integrales inmediatas:

Integrales inmediatas son las que se obtienen directamente por la propia definición de integral.

Si recordamos la regla de la cadena para la derivación:

$$F(x) = f(u) \Rightarrow F'(x) = f'(u) \cdot u'$$

podemos reescribirla en forma diferencial como:

$$F(x) = f(u) \Rightarrow dF = f'(u) \cdot du$$

y, calculando su integral:

$$\int f'(u) \cdot du = \int dF = F(x) + C$$

Ejemplos:

- $\int (5x^4 + 6x) \cdot e^{x^5+3x^2}\, dx = \int e^{x^5+3x^2}\, d(x^5 + 3x^2) = \int e^u\, du = e^u + C = e^{x^5+3x^2} + C$
- $\int \sqrt[3]{x+3}\, dx = \int (x+3)^{1/3}\, d(x+3) = \dfrac{(x+3)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x+3)^4} + C$
- $\int \dfrac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \dfrac{dx}{x} = \int \ln x\, d(\ln x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

2.2. Integral de la función constante

La integral de una constante es igual a esa constante multiplicada por x.

$$\int k\, dx = k \cdot x + C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}.$$

En efecto; consideramos la función $F(x) = k\,x + C$, con $C \in \mathbb{R}$. Si derivamos:

$$F'(x) = (k\,x + C)' = k + 0 = k$$

También podríamos demostrarlo con lo visto en 1.3.2 y en 2.1:

$$\int k\, dx = k \cdot \int dx = k \cdot x + C$$

Ejemplos:

- $\int 3\, dx = 3x + C$
- $\int (-8)\, dx = -8x + C$
- $\int \frac{3}{5}\, dx = \frac{3}{5} x + C$
- $\int 2\sqrt{3}\, dx = 2\sqrt{3}\, x + C$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.3. Integrales de funciones potenciales

Ya conocemos la derivada de la función potencial:

$$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1} \quad \text{con } n\in\mathbb{R}$$

También conocemos que:

$$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

Es fácil razonar el proceso inverso:

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \text{ si } n\neq -1 \text{ y con } C\in\mathbb{R}.$$

Ejemplos:

- $\int x^5\,dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+C=\frac{x^6}{6}+C$
- $\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{1/3}\,dx=\frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$
- $\int \frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}\,dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{-1}{2x^2}+C$

El caso $n=-1$ corresponde al logaritmo neperiano:

$$\int \frac{1}{x}dx=\int x^{-1}dx=\ln|x|+C \quad \text{con} \quad C\in\mathbb{R}.$$

Donde el valor absoluto se debe a que tenemos que plantear todas las posibles funciones cuya derivada sea la función del integrando, y se cumple que:

$$f(x)=\ln|x|=\begin{cases}\ln(-x) & \text{si } x<0\\ \ln x & \text{si } x>0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{-1}{-x} & \text{si } x<0\\ \frac{1}{x} & \text{si } x>0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \quad \forall x\neq 0$$

Estas dos fórmulas se pueden generalizar a partir de la regla de la cadena, como vimos antes:

$$\int [f(x)]^n\cdot f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C \text{ si } n\neq -1 \quad \text{y} \quad \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C \quad \text{con} \quad C\in\mathbb{R}.$$

Ejemplos:

- $\int \frac{-4}{9-4x}dx=\ln|9-4x|+C$
- $\int (x^2+2)^5\cdot x\,dx=\frac{1}{2}\int (x^2+2)^5\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int [f(x)]^5\cdot f'(x)dx=\frac{1}{2}\frac{[f(x)]^6}{6}+C=\frac{(x^2+2)^6}{12}+C$
- $\int \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}dx=\ln|\operatorname{sen} x+\cos x|+C$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.4. Integrales de funciones exponenciales

Partiendo de la derivada de las funciones exponenciales:

$$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \quad \text{y} \quad f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=\ln a\cdot a^x$$

deducimos:

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \text{y} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad \text{con } C\in\mathbb{R} \text{ y } a\neq 1.$$

Y su generalización con la regla de la cadena:

$$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C \quad \text{y} \quad \int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}+C \quad \text{con } C\in\mathbb{R} \text{ y } a\neq 1.$$

Ejemplos:

- $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}+C$
- $\int 7^{2x^2} 4x dx = \frac{7^{2x^2}}{\ln 7}+C$
- $\int 8e^{8x} dx = e^{8x} + C$
- $\int 9e^x dx = 9\int e^x dx = 9e^x + C$
- $\int e^{5x}dx = \int \frac{e^{5x}\cdot 5}{5}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}\cdot 5dx = \frac{1}{5}e^{5x}+C$

  Necesitamos la derivada del exponente. Lo solucionamos multiplicando y dividiendo por 5
- $\int x^2\cdot e^{x^3}dx = \int \frac{x^2\cdot e^{x^3}\cdot 3}{3}dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3}e^{x^3}+C$

  Necesitamos la derivada del exponente, es decir, $3x^2$. Tenemos el x^2, pero nos falta el 3. Para solucionarlo, multiplicamos y dividimos por 3
- $\int 2^{-\frac{x}{3}}dx = \int \frac{2^{-\frac{x}{3}}\cdot(-3)}{-3}dx = -3\int -\frac{1}{3}\cdot 2^{-\frac{x}{3}}dx = -3\cdot\frac{2^{-\frac{x}{3}}}{\ln 2}+C$

  Necesitamos la derivada del exponente, es decir, $-\frac{1}{3}$.
  Para ello, dividimos y multiplicamos por –3.

2.5. Integrales de funciones trigonométricas

$\int \text{sen } x\,dx = -\cos x + C$	y	$\int \text{sen } f(x)\cdot f'(x)dx = -\cos f(x) + C$	con $C\in\mathbb{R}$.
$\int \cos x\,dx = \text{sen } x + C$	y	$\int \cos f(x)\cdot f'(x)dx = \text{sen } f(x) + C$	con $C\in\mathbb{R}$.
$\int \sec^2 x\,dx = \text{tg } x + C$	y	$\int \sec^2 f(x)\cdot f'(x)dx = \text{tg } f(x) + C$	con $C\in\mathbb{R}$.

Ejemplos:

- $\int \text{sen }(x-7)dx = -\cos(x-7)+C$
- $\int 4x\cdot\text{sen}\left(2x^2\right)dx = -\cos\left(2x^2\right)+C$
- $\int \frac{\cos(\ln 2x)}{x}dx = \int \cos(\ln 2x)\cdot\frac{1}{x}dx = \text{sen}(\ln 2x)+C$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2.6. Integrales cuyo resultado son funciones trigonométricas inversas

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \text{arc sen } x + C \\ -\text{arc cos } x + C \end{cases}$ y $\int \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)dx = \text{arc sen } f(x) + C$ con $C \in \mathbb{R}$.

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \text{arc tg } x + C \\ -\text{arc cotg } x + C \end{cases}$ y $\int \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)dx = \text{arc tg } f(x) + C$ con $C \in \mathbb{R}$.

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \text{arc sec } x + C \\ -\text{arc cosec } x + C \end{cases}$ y $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}} = \text{arcsec}[f(x)] + C$ con $C \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

- $\int \frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot 4dx = \text{arc sen}(4x) + C$
- $\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{3}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx = 3\int \frac{2}{2\sqrt{1-(2x)^2}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2dx = \frac{3}{2}\text{arc sen}(2x) + C$
- $\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)} \cdot \frac{6x}{x^2+1}dx = 3\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)} \cdot \frac{2x}{x^2+1}dx = 3 \cdot \text{arc tg}[\ln(x^2+1)] + C$

Actividades resueltas

- *Calcula las siguientes primitivas:*
  - $\int x\sqrt{2x^2+5}\,dx$. Observamos que la derivada del radicando es 4*x*, así que multiplicamos y dividimos entre 4:

$$\int x\sqrt{2x^2+5}\,dx = \tfrac{1}{4}\int 4x \cdot \sqrt{2x^2+5}\,dx = \tfrac{1}{4}\int \sqrt{2x^2+5} \cdot 4x\,dx$$

Entonces, esta primitiva es equivalente a $\int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2\sqrt{u^3}}{3} + C$:

$$\int x\sqrt{2x^2+5}\,dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{(2x^2+5)^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{6} + C$$

  - $\int \frac{1}{(1+e^{-2x}) \cdot e^x}dx$. La función *más importante* es la exponencial, y vemos que la expresión más compleja se encuentra en un denominador en una forma similar al arco tangente.

La reescribimos como:

$$\int \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot \frac{1}{e^x}dx = \int \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot e^{-x}dx = \int \frac{1}{1+(e^{-x})^2} \cdot e^{-x}dx$$

Y se confirma la hipótesis. Multiplicando y dividiendo entre (–1), para completar la derivada de e^{-x}:

$$\int \frac{1}{(1+e^{-2x})e^x}dx = -\int \frac{1}{1+(e^{-x})^2} \cdot (-e^{-x})dx = -\int \frac{1}{1+u^2} \cdot du = -\text{arc tg}(e^{-x}) + C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

3.1. Integración por cambio de variable

La integración por cambio de variable busca transformar la primitiva dada en una más sencilla, y puede hacerse de dos formas diferentes:

Caso 1. Identificar una parte del integrando con una nueva variable *t*.

Ejemplo:

- $\int (3x+2)^4\,dx$. No es necesario un cambio de variable, pero vamos a mostrar el mecanismo:

  Hacemos el binomio igual a *t* y diferenciamos ambos términos:

$$\left| \begin{array}{l} 3x+2=t \\ 3dx=dt \to dx=\dfrac{dt}{3} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int (3x+2)^4\,dx = \int t^4 \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^4 dt$$

  Resolvemos la primitiva en la forma habitual:

$$\frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5}+C = \frac{t^5}{15}+C$$

  Finalmente, deshacemos el cambio:

$$\int (3x+2)^4\,dx = \frac{(3x+2)^5}{15}+C$$

El caso más frecuente es aquél en el que observamos una función *complicada* y su derivada:

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx$$

Una vez identificada, el cambio de variable consiste en llamar a dicha función *t* y diferenciar:

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx \to \left| \begin{array}{c} g(x)=t \\ g'(x)\,dx=dt \end{array} \right\rangle$$

La integral se transforma en otra que integraremos:

$$\int f(t)\,dt = F(t)+C$$

Para, finalmente, deshacer el cambio:

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,dt = F[g(x)]+C$$

Ejemplo:

- $\int \left(3\,\text{tg}^2 x+2\,\text{tg}\, x+1\right)\dfrac{dx}{\cos^2 x}$. La derivada de la tangente es $(\text{tg}\, x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, y así:

  Hacemos la tangente igual a *t*, diferenciamos ambos términos e integramos:

$$\left| \begin{array}{l} \text{tg}\, x=t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int \left(3\,\text{tg}^2 x+2\,\text{tg}\, x+1\right)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(3t^2+2t+1\right)dt = t^3+t^2+t+C$$

  Deshacemos el cambio y obtenemos:

$$\int \left(3\,\text{tg}^2 x+2\,\text{tg}\, x+1\right)\frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}^3 x+\text{tg}^2 x+\text{tg}\, x+C$$

Muchas veces se convertirá en una integral inmediata y, como en los ejemplos, no habría sido necesario dicho cambio.

Caso 2. El cambio será de la forma $x = g(t)$, donde $g(t)$ se elegirá de forma adecuada para simplificar el integrando. Se diferencia la igualdad:

$$\int f(x)\,dx \to \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{array} \right\rangle$$

Sustituimos en la integral, integramos y deshacemos el cambio hallando la función inversa de g:

$$\int f[g(t)]\,g'(t)\,dt = F(t) + C \to \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ \Rightarrow t = g^{-1}(x) \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int f(x)\,dx = F\left[g^{-1}(x)\right] + C$$

Ejemplo:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. La expresión del radical es similar a la relación que existe entre las funciones trigonométricas, así que *intentamos* el cambio:

$$\left| \begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\left[1-(\operatorname{sen} t)^2\right]^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{(\cos^2 t)^3}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t}$$

Esta primitiva es inmediata:

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C$$

Finalmente, deshacemos el cambio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ t = \operatorname{arc\,sen} x \end{array} \right\rangle = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x) + C$$

En este caso, la expresión final es bastante *fea*, pero podemos mejorarla. Si en lugar de deshacer el cambio directamente buscamos la relación entre el seno y la tangente:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}$$

Obtenemos:

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} + C \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

Hay muchos cambios ya estudiados, de uso frecuente para casos concretos. Será el método que explicaremos en los apartados 3.3 y siguientes.

Actividades resueltas

- $\int \sqrt{5x+3}\,dx$. Como antes, es una integral inmediata, pero vamos a repetir el procedimiento:

Hacemos el binomio igual a t y diferenciamos:

$$\left| \begin{array}{l} 5x+3 = t \\ 5dx = dt \to dx = \frac{1}{5}dt \end{array} \right\rangle \Rightarrow \int \sqrt{5x+3}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot \tfrac{1}{5}dt = \tfrac{1}{5}\int \sqrt{t}\cdot dt$$

Resolvemos la primitiva: $\frac{1}{5}\int \sqrt{t}\cdot dt = \frac{1}{5}\int t^{1/2}dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2} + C = \frac{2}{15}\sqrt{t^3} + C$

Y deshacemos el cambio: $\int \sqrt{5x+3}\,dx = \frac{2}{15}\sqrt{(5x+3)^3} + C$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

- $\int \frac{1}{1+\ln^2\left(x^2+1\right)} \cdot \frac{6x}{x^2+1} dx$. La derivada del logaritmo es:

$$\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]' = \frac{2x}{x^2+1}$$

que se encuentra en la fracción que precede al diferencial de x. Hacemos el cambio:

$$\left| \begin{array}{l} \ln\left(x^2+1\right) = t \\ \frac{2x\,dx}{x^2+1} = dt \end{array} \right\rangle = \int \frac{1}{1+t^2} \cdot 3dt = 3 \cdot \text{arc tg } t + C = 3 \cdot \text{arc tg}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right] + C$$

- Resuelve $\int x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx$ haciendo el cambio de variable $x+1=t^2$

Hacemos el cambio que nos indican:

$$\int x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx = \left| \begin{array}{c} x+1=t^2 \Rightarrow x=t^2-1 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right\rangle = \int \left(t^2-1\right)^2 \cdot \sqrt{t^2} \cdot 2t\,dt$$

Desarrollamos el cuadrado, simplificamos e integramos:

$$\int \left(t^2-1\right)^2 \cdot \sqrt{t^2} \cdot 2t\,dt = \int \left(t^4-2t^2+1\right) \cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int \left(t^6-2t^4+t^2\right)dt = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{7}t^7 - \tfrac{2}{5}t^5 + \tfrac{1}{3}t^3\right) + C$$

Y, finalmente, deshacemos el cambio:

$$\int x^2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} x+1=t^2 \\ t=\sqrt{x+1} \end{array} \right\rangle = \frac{2}{7}\left(\sqrt{x+1}\right)^7 - \frac{4}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$$

Actividades propuestas

7. Calcula las siguientes primitivas utilizando el cambio indicado:

a) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$ haciendo $x = t^{12}$.

b) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ haciendo $e^x = t$.

c) $\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}} dx$ haciendo $1+2x = t^2$

d) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ haciendo $x+\sqrt{x^2-1} = t$

e) $\int \left(2\,\text{sen}^3\,x + 3\,\text{sen}^2\,x - \text{sen}\,x + 3\right)\cos\,x\,dx$ haciendo $\text{sen}\,x = t$

f) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ haciendo $x = \text{sen}\,t$

8. Elige el cambio de variable que simplifica las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3+1}{\left(x^4+2x\right)^3} dx$

b) $\int \frac{e^{\text{arctg}x}}{1+x^2} dx$

c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \cdot \ln x} dx$

d) $\int 2x^3\sqrt{x^4-49} \cdot dx$

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}+2} dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.2. Integración por partes

La **integración por partes** es un método que nos permite calcular la integral del producto de dos funciones de naturaleza diferente, una **fácilmente derivable** y otra **fácilmente integrable**. Los casos más frecuentes son arcos, logaritmos, polinomios, exponenciales y trigonométricas (senos y cosenos), que nos permiten crear la regla mnemotécnica A–L–P–E–S.

Con el método de integración por partes transformaremos integrales de la forma

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx$$

donde $v'(x)$ es la función fácil de integrar, en otra expresión más sencilla en la que aparece una nueva integral más fácil de calcular que la de partida.

Se utiliza la siguiente fórmula:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$$

que se suele escribir de forma abreviada como:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Existen muchas reglas mnemotécnicas para recordar esta fórmula, recogemos tres de ellas:

- **S**alieron **U**nidos **D**e **V**iaje **Y** **U**n **V**iajero **M**enos **S**e **V**ino **D**e **U**jo. Ujo es un hermoso pueblo asturiano
- **S**usanita **U**n **D**ía **V**io **U**n **V**aliente **S**oldado **V**estido **D**e **U**niforme.
- **S**ergio **U**n **D**ía **V**io **U**na **V**aca **S**orda **V**estida **D**e **U**niforme.

Demostración:

Consideramos el producto de funciones $u(x)\cdot v(x)$ y calculamos su derivada:

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Integramos ambos miembros de la igualdad:

$$\int [u(x)\cdot v(x)]'dx = \int [u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)]dx \Rightarrow \int [u(x)\cdot v(x)]'dx = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

De donde:

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

Despejando, resulta:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$$

También puede obtenerse a partir de la diferencial del producto:

$$d(u\cdot v) = du\cdot v + u\cdot dv \Rightarrow u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$$

Integramos ambos miembros de la igualdad:

$$\int d(u\cdot v) = \int (du\cdot v + u\cdot dv) = \int v\cdot du + \int u\cdot dv$$

Y obtenemos: $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Observaciones:

1. Como norma general, se elige como "u" a la primera función de la palabra ALPES y como dv al resto del integrando, pudiendo darse el caso de tener que plantear $dv = dx$.

Ejemplo:

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,tg} x \to du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx \to v = \int dx = x \end{array} \right\rangle = \operatorname{arc\,tg} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \cdot \ln\left|1+x^2\right| + C$$

2. Sabremos que estamos aplicando correctamente el método si obtenemos una integral más simple que la inicial.

Ejemplo:

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \to v = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \end{array} \right\rangle = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

3. El proceso de integración por partes puede aplicarse varias veces. En ese caso se debe mantener la elección inicial de u y v. Si se invierte, volveremos a la integral de partida.

Ejemplo:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \to du = 2x\, dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\rangle = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x\, dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\rangle = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \left[x \cdot e^x - \int e^x dx\right] = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2\int e^x dx =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C = \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^x + C$$

4. Si la integral inicial es el producto de una exponencial por una trigonométrica, se obtiene lo que se denominan *integrales cíclicas*. Al aplicar por segunda vez el método de integración por partes, se obtiene la integral de partida, y se debe resolver como una ecuación:

Ejemplo:

$$\int e^{2x} \cdot \cos 3x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{2x} \to du = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos 3x\, dx \to v = \int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sen} 3x \end{array} \right\rangle =$$

$$= e^{2x} \cdot \tfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \int \tfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \cdot 2e^{2x} dx = \tfrac{1}{3} \cdot e^{2x} \operatorname{sen} 3x - \tfrac{2}{3} \cdot \int e^{2x} \operatorname{sen} 3x \cdot dx =$$

Repetimos: $\left| \begin{array}{l} u = e^{2x} \to du = 2e^{2x} dx \\ dv = \operatorname{sen} 3x\, dx \to v = \int \operatorname{sen} 3x\, dx = -\frac{1}{3} \cdot \cos 3x \end{array} \right\rangle =$

$$\int e^{2x} \cdot \cos 3x \cdot dx = \tfrac{1}{3} \cdot e^{2x} \operatorname{sen} 3x - \tfrac{2}{3} \cdot \left[e^{2x} \cdot \left(-\tfrac{1}{3} \cos 3x\right) - \int \left(-\tfrac{1}{3} \cos 3x\right) \cdot 2e^{2x} \cdot dx\right] \Rightarrow$$

$$\int e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot dx=\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\mathrm{sen}\ 3x+\tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x-\tfrac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\cdot dx$$

Observamos que obtenemos la integral de partida. Si denotamos $I=\int e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot dx$:

$$I=\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\mathrm{sen}\,3x+\tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x-\tfrac{4}{9}I\Rightarrow I+\tfrac{4}{9}I=\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\mathrm{sen}\,3x+\tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x$$
$$\tfrac{13}{9}I=\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\mathrm{sen}\,3x+\tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x\Rightarrow I=\tfrac{9}{13}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\cdot e^{2x}\mathrm{sen}\,3x+\tfrac{2}{9}\cdot e^{2x}\cos 3x\right)$$

Entonces, sustituyendo I por su expresión y desarrollando las fracciones:

$$\int e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot dx=\frac{e^{2x}}{13}\cdot(3\cdot\mathrm{sen}\,3x+2\cdot\cos 3x)+C$$

5. El método de integración por partes no es excluyente. Podemos utilizarlo después de vernos *obligados* a realizar un cambio de variable, o tener que realizar un cambio de variable después de haber aplicado la integración por partes.

Ejemplo:

$$\int\frac{x\cdot e^{\mathrm{arcsen}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\left|\begin{array}{l}\mathrm{arcsen}\,x=t\to x=\mathrm{sen}\,t\\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt\end{array}\right\rangle\Rightarrow\int x\cdot e^{\mathrm{arcsen}\,x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\mathrm{sen}\,t\cdot e^t dt$$

Que se resuelve como en el ejemplo anterior, y proporciona:

$$\int\mathrm{sen}\ t\cdot e^t dt=\tfrac{1}{2}e^t\cdot(\mathrm{sen}\ t-\cos\ t)+C$$

Antes de deshacer el cambio, expresamos el coseno como:

$$\int\mathrm{sen}\,t\cdot e^t dt=\tfrac{1}{2}e^t\cdot\left(\mathrm{sen}\,t-\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}\right)+C$$

Entonces:

$$\int\frac{x\cdot e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\tfrac{1}{2}e^{\mathrm{arc\,sen}\,x}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)+C$$

6. Existen otras integrales que se resuelven por partes y que no están recogidas en “la regla de los ALPES”. La estrategia general es buscar una función “fácilmente integrable” y otra “fácilmente derivable” para simplificar la primitiva inicial.

Ejemplo:

$$\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\left|\begin{array}{l}u=x\to du=dx\\ \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=dv\to v=\dfrac{-1}{2\cdot(1+x^2)}\end{array}\right\rangle\Rightarrow\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\frac{-x}{2\cdot(1+x^2)}-\int\frac{-dx}{2\cdot(1+x^2)}$$

Y la segunda integral es inmediata:

$$\int\frac{dx}{2\cdot(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+C$$

Por tanto:

$$\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\frac{-x}{2\cdot(1+x^2)}+\frac{1}{2}\mathrm{arc\ tg}\ x+C$$

Actividad resuelta

- $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Esta primitiva puede resolverse de varias formas diferentes:

1. Por partes:

La dificultad es encontrar la función *fácilmente integrable*. En este caso, la elección es:

$$\left|\begin{array}{l} dv = x\sqrt{x^2-1}\,dx \to v = \frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{3/2} \\ u = x^2 \to du = 2x\,dx \end{array}\right\rangle \Rightarrow \int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{3}x^2\left(x^2-1\right)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\int x\left(x^2-1\right)^{3/2}dx$$

La segunda primitiva es más simple que la primera, así que estamos en el buen camino:

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{3}x^2\left(x^2-1\right)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\int x\left(x^2-1\right)^{3/2}dx = \tfrac{1}{3}x^2\left(x^2-1\right)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{5}\left(x^2-1\right)^{5/2} + C$$

Es decir:
$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{3}x^2\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3 - \tfrac{2}{15}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5 + C$$

2. Por cambio de variable:

El cambio de variable que buscamos es el que permite eliminar la raíz del integrando:

$$\left|\begin{array}{l} x^2-1=t^2 \to x^2 = t^2+1 \\ 2x\,dx = 2t\,dt \to x\,dx = t\,dt \end{array}\right\rangle \Rightarrow \int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2-1}\,xdx = \int\left(t^2+1\right)\cdot t\cdot tdt = \int\left(t^4+t^2\right)dt$$

Resolvemos la primitiva: $\int\left(t^4+t^2\right)dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3 + C$

Las dos expresiones son diferentes, pero es sencillo manipularlas para hacerlas iguales.

Actividades propuestas

9. Determina si las siguientes integrales son inmediatas o no:

a) $\int\left(4x^3+3x^3-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ b) $\int\dfrac{\ln x}{x}dx$ c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$

d) $\int\dfrac{e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e) $\int\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ f) $\int\dfrac{\ln(x+1)}{x}dx$ g) $\int \operatorname{tg} x\cos x\,dx$

h) $\int\dfrac{\left(x^2-1\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ i) $\int e^{x^2}dx$ j) $\int x^2\cdot e^{x^2}dx$ k) $\int\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}dx$

10. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(e^{3x}+e^{2x}+e^x\right)e^x\,dx$ b) $\int(\ln x+2)\dfrac{dx}{x}$ c) $\int\ln(\cos x)\operatorname{tg} x\,dx$

d) $\int\dfrac{x\,dx}{1+x^4}$ i) $\int\dfrac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ j) $\int x\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}dx$

11. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(x^2+x+1\right)e^x dx$ b) $\int\ln x\,dx$ c) $\int x\cos x dx$

d) $\int\operatorname{arc\,sen} x\,dx$ e) $\int\operatorname{sen} ax\cdot e^{bx}dx$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

f) Curiosidad – idea feliz: Resuelve la primitiva $\int\cos(\ln x)\,dx$.

Para ello, multiplica y divide el integrando por x: $\int\dfrac{\cos(\ln x)}{x}\cdot x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x \to du = \ldots \\ dv = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx \to v = \ldots \end{array}\right\rangle$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.3. Integración de funciones racionales

Abordamos ahora las integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, con $Q(x)$ un polinomio mónico o normalizado (el coeficiente principal vale uno: $Q(x) = x^n + b\,x^{n-1} + c\,x^{n-2} + \ldots$).

El primer paso es descartar que sea inmediata. Una vez descartado que es inmediata, el procedimiento para integrarlas se basa en determinar las raíces del denominador y descomponerla como suma de fracciones algebraicas cuyas integrales resulten más sencillas de calcular.

Se nos pueden plantear las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} \text{Grado } P(x) < \text{Grado } Q(x) \begin{cases} Q(x) \text{ sólo tiene raíces reales simples} \\ Q(x) \text{ tiene una raíz real múltiple} \\ Q(x) \text{ tiene raíces reales simples y múltiples} \\ Q(x) \text{ tiene raíces complejas} \end{cases} \\ \text{Grado } P(x) \geq \text{Grado } Q(x) \end{cases}$$

Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador

Sea $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con $\text{grado } P(x) < \text{grado } Q(x)$.

3.3.1. El denominador solo tiene raíces reales simples

Sean a, b,… n las raíces de $Q(x)$, polinomio mónico como ya se dijo. Entonces, podemos factorizarlo en la forma $Q(x) = (x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-n)$. El procedimiento consiste en descomponer el cociente como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{N}{x-n}$$

con $A, B, \ldots, N \in \mathbb{R}$. Así, expresamos la integral de partida como suma de integrales inmediatas:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \ldots + \int \frac{N}{x-n} dx = A\cdot \ln|x-a| + B\cdot \ln|x-b| + \ldots + N\cdot \ln|x-n| + C$$

Ejemplo:

- $\int \frac{5}{x^2+3x-4} dx =$

  Calculamos las raíces del denominador y factorizamos el denominador:

  $$x^2+3x-4=0 \Rightarrow x = \cdots = \begin{cases} +1 \\ -4 \end{cases} \Rightarrow x^2+3x-4 = (x+4)\cdot(x-1)$$

  Por tanto, expresamos la fracción como suma de fracciones simples:

  $$\frac{5}{x^2+3x-4} = \frac{5}{(x-1)\cdot(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$$

  Calculamos los coeficientes:

  $$\frac{5}{(x-1)\cdot(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4} \Rightarrow 5 = A\cdot(x+4) + B\cdot(x-1)$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Y calculamos A y B dando a x los valores de las raíces encontradas:

- Si $x=-4 \Rightarrow 5=0\cdot A-5\cdot B \Rightarrow B=-1$
- Si $x=1 \Rightarrow 5=5\cdot A+0\cdot B \Rightarrow A=1$

De aquí ya obtenemos las dos integrales logarítmicas:

$$\int \frac{5}{x^2+3x-4}dx=\int \frac{5}{(x-1)\cdot(x+4)}dx=\int \frac{A}{x-1}dx+\int \frac{B}{x+4}dx=\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{-1}{x+4}dx=$$

$$=\int \frac{1}{x-1}dx-\int \frac{1}{x+4}dx=\ln|x-1|-\ln|x+4|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right|+C$$

3.3.2. El denominador tiene una única raíz real múltiple

Si a es la raíz múltiple de $Q(x)$, se puede escribir $Q(x)=(x-a)^n$. En este caso, la descomposición es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{N}{(x-a)^n} \quad \text{con } A,B,\ldots,N\in\mathbb{R}.$$

Así, expresamos la integral de partida como suma de integrales inmediatas de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int \frac{A}{x-a}dx+\int \frac{B}{(x-a)^2}dx+\ldots+\int \frac{N}{(x-a)^n}dx$$

Que son potencias de exponente negativo, es decir:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int \frac{A}{x-a}dx+\int \frac{B}{(x-a)^2}dx+\ldots+\int \frac{N}{(x-a)^n}dx=A\cdot\ln|x-a|-\frac{B}{x-a}+\ldots-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{N}{(x-a)^{n-1}}+C$$

Ejemplo:

- $$\int \frac{x+2}{x^3-6x^2+12x-8}dx=$$

Factorizamos el denominador usando el método de *Ruffini* o el teorema del resto:

$$x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$$

Por tanto, expresamos:

$$\frac{x+2}{x^3-6x^2+12x-8}=\frac{x+2}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3} \Rightarrow x+2=A\cdot(x-2)^2+B\cdot(x-2)+C$$

Ahora calculamos A, B y C dando valores a x:

- Si $x=2 \Rightarrow 4=0\cdot A+0\cdot B+C \Rightarrow C=4$

Para hallar A y B podemos dar cualesquiera otros dos valores:

- Si $x=3 \Rightarrow 5=A+B+C \Rightarrow 5=A+B+4 \Rightarrow A+B=+1$
- Si $x=1 \Rightarrow 3=A-B+C \Rightarrow 3=A-B+4 \Rightarrow A-B=-1$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{l} A+B=+1 \\ A-B=-1 \end{array}\right\} \underset{Sumando}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} A+B=+1 \\ 2A=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=0 \\ B=1 \end{array}\right\}$

Entonces, tenemos:

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^3}dx=\int \frac{1}{(x-2)^2}dx+\int \frac{4}{(x-2)^3}dx=\int (x-2)^{-2}dx+4\int (x-2)^{-3}dx=$$

$$=\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+4\cdot\frac{(x-2)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}+C$$

¡Ojo! No confundir la C del sistema con la constante de integración.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.3.3. El denominador tiene raíces reales simples y múltiples

Este caso es una combinación de los dos anteriores. La fracción se descompone en sumandos cuyo numerador es una constante, y los denominadores son los factores de $Q(x)$ en el caso de las raíces simples y las potencias sucesivas de la factorización en el caso de las raíces múltiples. Es decir, si

$$Q(x)=(x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c)^n\cdot(x-d)^m$$

La descomposición es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{C}{(x-c)^n}+\frac{D}{(x-c)^{n-1}}+\ldots+\frac{E}{x-c}+\frac{F}{(x-d)^m}+\frac{G}{(x-d)^{m-1}}+\ldots+\frac{H}{x-d}$$

con $A,B,\ldots,H\in\mathbb{R}$ los parámetros a obtener. La integral quedará descompuesta en una suma de logaritmos y fracciones algebraicas simples:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{C}{(x-c)^n}+\frac{D}{(x-c)^{n-1}}+\ldots+\frac{E}{x-c}+\frac{F}{(x-d)^m}+\frac{G}{(x-d)^{m-1}}+\ldots+\frac{H}{x-d}\right)dx$$

$$=A\cdot\ln|x-a|+B\cdot\ln|x-b|+\ldots-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{C}{(x-c)^{n-1}}-\ldots+E\cdot\ln|x-c|-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{F}{(x-d)^{m-1}}-\ldots+H\cdot\ln|x-d|+K$$

Donde K representa la constante de integración, para no confundirla con la C de la factorización.

Ejemplo:

$$\int\frac{x^2+3}{x^3-3x+2}dx=$$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Calculamos las raíces del denominador usando el método de *Ruffini* o el teorema del resto y factorizamos el denominador:

$$x^3-3x+2=(x-1)^2\cdot(x+2)$$

Por tanto, expresamos:

$$\frac{x^2+3}{x^3-3x+2}=\frac{x^2+3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow x^2+3=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$$

Ahora calculamos A, B y C dando valores a x:

- Si $x=1\Rightarrow 4=0\cdot A+3\cdot B+0\cdot C\Rightarrow B=\frac{4}{3}$
- Si $x=-2\Rightarrow 7=0\cdot A+0\cdot B+9\cdot C\Rightarrow C=\frac{7}{9}$

Para hallar A damos un valor cualquiera:

- Si $x=0\Rightarrow 3=(-2)\cdot A+2\cdot B+C\Rightarrow 3=-2\cdot A+2\cdot\frac{4}{3}+\frac{7}{9}\Rightarrow A=\frac{2}{9}$

Por tanto, tenemos:

$$\int\frac{x^2+3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}dx=\int\frac{A}{x-1}dx+\int\frac{B}{(x-1)^2}dx+\int\frac{C}{x+2}dx=\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$\frac{2}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{4}{3}\int(x-1)^{-2}dx+\frac{7}{9}\int\frac{1}{x+2}dx==\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$$

3.3.4. El denominador tiene alguna raíz compleja simple

Si el denominador $Q(x)$ contiene algún factor irreducible de la forma ax^2+bx+c, al descomponer la fracción en suma de fracciones algebraicas, a dichos factores les corresponderán sumandos de la forma:

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Antes de analizar la descomposición completa, vamos a resolver este tipo de primitivas:

Las integrales de la forma $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$, cuando el denominador no tiene raíces reales, se transformarán en una integral **logarítmica** y otra de **arco tangente**.

Para ello, se puede proceder de dos formas distintas:

Forma 1. Manipulación algebraica de la fracción.

El mecanismo consta de dos pasos: primero se transforma el numerador en la derivada del denominador y, a continuación, se convierte la expresión de segundo grado para llegar al arco tangente.

Ejemplo:

- $\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx$. Es automático comprobar que el denominador no tiene raíces reales.

En primer lugar, intentamos que el numerador sea la derivada del denominador.

$$\left(x^2+4x+13\right)' = 2x+4$$

Multiplicamos la x del numerador por el factor necesario, en este caso por 2:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+13}dx =$$

A continuación, sumamos y restamos para obtener el 4:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+2-2}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+13}dx =$$

Y separamos la integral como suma de dos, una con el término buscado y “el resto”:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - \int \frac{2}{x^2+4x+13}dx\right] = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+13}$$

En segundo lugar, trabajamos con la segunda integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$$

Se trata de identificar un cuadrado perfecto en el denominador. Vemos los términos x^2+4x, que nos recuerda al cuadrado perfecto: $(x+2)^2 = x^2+4x+4$, por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$$

Ya que buscamos una integral de la forma $\int \frac{u'}{u^2+1}du$, extraemos factor común al 9:

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \int \frac{dx}{9\left[\frac{(x+2)^2}{9}+1\right]} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Ya casi hemos terminado, hemos conseguido la forma de la derivada del arco tangente. Solo nos queda conseguir la derivada de la fracción obtenida:

$$\frac{1}{9}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}=\frac{1}{9}\cdot 3\int\frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$

Entonces:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx-\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$

Que son dos integrales inmediatas:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+4x+13\right)-\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$$

Forma 2. Cambio de variable.

Ahora nos basta con hacer un cambio de variable basado en la solución compleja que se obtiene al intentar resolver la ecuación de segundo grado del denominador.

$$ax^2+bx+c=0\Rightarrow x=\alpha\pm\beta i\longrightarrow x=\alpha+\beta\cdot t\Rightarrow dx=\beta\cdot dt$$

Ejemplo:

- $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx$.

Anulamos el denominador:

$$x^2+4x+13=0\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 13}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-4\pm 6i}{2}\Rightarrow x=-2\pm 3i$$

El cambio de variable es, por tanto:

$$x=-2+3t\Rightarrow dx=3\,dt$$

Entonces:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=\int\frac{(-2+3t)+1}{(-2+3t)^2+4\cdot(-2+3t)+13}\cdot 3dt$$

Desarrollamos las expresiones y obtenemos:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=3\cdot\int\frac{3t-1}{9t^2+9}dt=\frac{3}{9}\int\frac{3t-1}{t^2+1}dt=\frac{1}{3}\cdot\left[\int\frac{3t\,dt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}\right]=$$

Que son, directamente, las integrales de un logaritmo y un arco tangente:

$$\frac{1}{3}\cdot\left[\int\frac{3t\,dt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}\right]=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right)-\operatorname{arctg}t\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C$$

Deshacemos el cambio:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1\right]-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{3}+C$$

Desarrollando el argumento del logaritmo obtenemos la integral del mecanismo anterior:

$$\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+13\right)-\frac{1}{2}\ln 9-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{3}+C$$

Una vez que sabemos cómo resolver esta primitiva, abordamos el caso general. Si el denominador $Q(x)$ contiene algún factor irreducible de la forma ax^2+bx+c, al descomponer la fracción en suma de fracciones algebraicas, a dichos factores les corresponderán sumandos de la forma:

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

y los factores correspondientes a las raíces reales se descompondrán como en los apartados anteriores:

Si $Q(x)=(ax^2+bx+c)\cdot(x-d)\cdot\ldots\cdot(x-e)^n\cdot\ldots$

La descomposición es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}+\frac{A}{x-d}+\ldots+\frac{B}{(x-e)^n}+\frac{C}{(x-e)^{n-1}}+\ldots+\frac{D}{x-e}\quad \text{con } A,B,\ldots,M,N\in\mathbb{R}.$$

Ejemplo:

- $\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+x-3}dx=$

  Calculamos las raíces del denominador usando el método de Ruffini o el teorema del resto y factorizamos el denominador:

	1	-3	1	-3
3		3	0	3
	1	0	1	0

$$x^3-3x^2+x-3=0\Rightarrow \text{Tenemos: } x^3-3x^2+x-3=(x-3)\cdot(x^2+1)$$

Por tanto, expresamos:

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+x-3}=\frac{x-5}{(x-3)\cdot(x^2+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\Rightarrow x-5=A(x^2+1)+(Mx+N)\cdot(x-3)$$

Ahora calculamos A, M y N dando valores a x; tenemos:

- Si $x=3\Rightarrow 3-5=10\cdot A+0\cdot(B)+C\Rightarrow A=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}$
- Si $x=0\Rightarrow 0-5=1\cdot A+(0\cdot M+N)\cdot(-3)\Rightarrow -5=A-3N\Rightarrow N=\frac{8}{5}$
- Si $x=2\Rightarrow 2-5=5\cdot A+(2\cdot M+N)\cdot(-1)\Rightarrow -3=5A-2M-N\Rightarrow M=\frac{1}{5}$

Tenemos, por tanto:

$$\int\frac{x-5}{(x-3)\cdot(x^2+1)}dx=\int\frac{A}{x-3}dx+\int\frac{Mx+N}{x^2+1}dx=\int\frac{-\frac{1}{5}dx}{x-3}+\int\frac{\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-3}dx+\frac{1}{5}\int\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{8}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-3}dx+\frac{1}{10}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{8}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|x-3|+\frac{1}{10}\ln|x^2+1|+\frac{8}{5}\operatorname{arc\,tg} x+C$$

Si hubiera más de un polinomio de grado dos con raíces complejas, la descomposición implica una fracción para cada término:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Hx+K}{ax^2+bx+c}+\frac{Mx+N}{a'x^2+b'x+c'}+\ldots\quad \text{con } H,K,M,N,\ldots\in\mathbb{R}.$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.3.5. El grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador

Sea $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ con grado $P(x) \geq$ grado $Q(x)$.

En este caso, en primer lugar dividiremos el numerador entre el denominador. De esta forma, la fracción se descompone en la suma de un polinomio y una fracción algebraica con el grado del numerador menor que el grado del denominador:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Ejemplo:

- $\int \frac{x^2 - x + 5}{x+3}dx =$

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -x & +5 & x+3 \\ \hline -x^2 & -3x & & x-4 \\ \hline & -4x & +5 & \\ & 4x & +12 & \\ \hline & & 17 & \end{array}$$

Dividiendo el numerador entre el denominador, tenemos:

$$\frac{x^2 - x + 5}{x+3} = x - 4 + \frac{17}{x+3}$$

Así:

$$\int \frac{x^2 - x + 5}{x+3}dx = \int (x-4)dx + \int \frac{17}{x+3}dx = \int (x-4)dx + 17\int \frac{1}{x+3}dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 17\ln|x+3| + C$$

El denominador $Q(x)$ no es un polinomio mónico

Si en la integral racional $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ el polinomio del denominador no es mónico (su coeficiente principal no es 1), la factorización se realiza del modo habitual en el que se factorizan los polinomios.

Ejemplo:

$$Q(x) = 2x^2 + x - 3 \mapsto Q(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow Q(x) = (x-1)\cdot\left(x + \tfrac{3}{2}\right)\cdot 2 = (x-1)\cdot(2x+3)$$

Para el cálculo de integrales se utiliza la factorización obtenida y se procede de la forma ya explicada:

Ejemplo:

- $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 3}$.

La descomposición resulta ser:

$$\frac{1}{2x^2 + x - 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+3} \Rightarrow 1 = A\cdot(x-1) + B\cdot(2x+3)$$

Resolvemos la ecuación como hicimos varias veces antes, y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{5} \\ B = \frac{-2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{dx}{2x^2 + x - 3} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln|2x+3| + C$$

Actividades propuestas

12. Halla las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2}$ c) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2}$ d) $\int \frac{x^3 dx}{(x+1)^2}$

e) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x}dx$ f) $\int \frac{3x^2+1}{(2x-1)\cdot(3x^2+2)}dx$ g) $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)}dx$

h) $\int \frac{x^3+2x^2+5x+3}{x^2+1}dx$ i) $\int \frac{(x+1)\cdot dx}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$ j) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

3.4. Integración de funciones trigonométricas.

Para integrar una función trigonométrica no inmediata, tenemos que clasificarla en una de las categorías que veremos a continuación. Es importante seguir el orden planteado; si no lo hacemos, obtendremos integrales mucho más complicadas de lo necesario.

Cuadrados de funciones trigonométricas

Si la función es el cuadrado de una función trigonométrica, podemos ahorrar mucho trabajo si las estudiamos antes que las demás:

1. **Cuadrados de seno y coseno**: Para resolver estas primitivas nos basamos en las expresiones:

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \quad \text{y} \quad \cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$$

Sumando y restando miembro a miembro:

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x \quad \text{y} \quad 1-\cos 2x=2\operatorname{sen}^2 x$$

Obtenemos las siguientes simplificaciones:

$$\int \cos^2 x\,dx=\tfrac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\tfrac{1}{2}\left(x+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)+C \quad \text{y}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx=\tfrac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\tfrac{1}{2}\left(x-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)+C$$

2. **Cuadrados de secante y cosecante**: Ya sabemos que son integrales inmediatas:

$$\int \sec^2 x\,dx=\operatorname{tg} x+C \quad \text{y} \quad \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\operatorname{cotg} x+C$$

3. **Cuadrados de tangente y cotangente**: Se convierten en integrales inmediatas fácilmente:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)dx=\operatorname{tg} x-x+C \quad \text{y} \quad \int \operatorname{cotg}^2 x\,dx=\int(\operatorname{cosec}^2 x-1)dx=-\operatorname{cotg} x-x+C$$

Actividad resuelta

- $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}$

Esta primitiva puede resolverse de varias formas diferentes. En este apartado usaremos las transformaciones *recién aprendidas*:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}=\int \frac{4\,dx}{4\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}=\int \frac{4\,dx}{(2\operatorname{sen} x\cdot\cos x)^2}=\int \frac{4\,dx}{\operatorname{sen}^2 2x}=-2\operatorname{cotg} 2x+C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.4.1. Funciones impares en seno de *x*

Si la integral es de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, (es decir, una función racional en *senx* y *cosx*) y verifica que $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ debemos aplicar el cambio $\cos x = t$.

Tras transformar las funciones trigonométricas con el cambio, obtendremos una función racional que resolveremos con los métodos anteriores.

Ejemplo:

- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}dx =$

  El exponente del seno es impar, por tanto es impar en seno:

  $$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}$$

  Por tanto:

  $$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{(-\operatorname{sen} x)^3}{1+\cos^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x} = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

  Aplicamos el cambio indicado, manipulando ligeramente la integral:

  $$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x\, dx = dt \end{array} \right\rangle = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\operatorname{sen} x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\operatorname{sen} x\, dx$$

  Entonces:

  $$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}(-dt) = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt$$

  Que podemos resolver como integral de una función racional:

  $$\int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right)dt = t - 2\operatorname{arctg} t + C$$

  Y deshacemos el cambio:

  $$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \cos x - 2\operatorname{arctg}(\cos x) + C$$

Cuando no es tan simple manipular el integrando, podemos utilizar las siguientes igualdades:

$\cos x = t$	$x = \arccos t \Rightarrow dx = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

Ejemplo:

- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}dx =$ Ahora vamos a utilizar las expresiones tabuladas para obtener la primitiva:

  $$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{1+t^2}\cdot\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2}{1+t^2}\cdot dt = -\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot dt = \int \frac{t^2-1}{1+t^2}\cdot dt$$

  Que es la misma integral que resolvimos antes (como no podía ser de otro modo)

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.4.2. Funciones impares en coseno de *x*

Si la integral es de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, y verifica que $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ debemos aplicar el cambio $\operatorname{sen} x = t$. Como antes, tenemos las siguientes igualdades:

$\operatorname{sen} x = t$	$x = \operatorname{arcsen} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

Ejemplos:

- $\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx =$

Comprobamos que el radicando es impar en coseno:

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = (-\cos x)^3 \cdot \operatorname{sen}^2 x = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

Aplicamos el cambio indicado:

$$I = \int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right\rangle = \int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x\, dx = \int t^2 \cdot (1-t^2)(dt)$$

Desarrollado el producto,

$$I = \int \left(-t^4 + t^2\right) dt = -\tfrac{1}{5} t^5 + \tfrac{1}{3} t^3 + C$$

Y deshacemos el cambio:

$$I = \int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\tfrac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + \tfrac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C$$

- $\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} =$

Es evidente que el radicando es impar en coseno, aplicamos el cambio:

$$\int \frac{dx}{\cos x} dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{sen} x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{matrix} \right\rangle = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{1-t^2}$$

La resolvemos como integral de una función racional:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow \ldots \frac{1}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t}$$

Entonces:

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

Y deshacemos el cambio:

$$\int \sec x\, dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + C$$

Curiosidad – idea feliz:

A veces, existen estrategias específicas para resolver primitivas más rápidamente.

Para esta primitiva, $\int \sec x\, dx$, si multiplico y divido entre $(\sec x + \operatorname{tg} x)$:

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

3.4.3. Funciones pares en seno de *x* y coseno de *x*

Si la integral es de la forma $\int R(\text{sen } x, \cos x)$, y verifica que $R(-\text{sen } x, -\cos x) = R(\text{sen } x, \cos x)$ debemos aplicar el cambio $\text{tg} x = t$. En este caso, podemos hallar la expresión para el seno y el coseno como:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\text{tg}^2 x + 1} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

y

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{\text{tg}^2 x + 1} = \frac{\text{tg}^2 x}{\text{tg}^2 x + 1} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

Que resumimos en la tabla siguiente:

$\text{tg} x = t$	$x = \text{arc tg } t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$	$\text{sen} x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$	$\cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

Ejemplo:

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$

  Es evidente que el radicando es par en seno y coseno:

$$R(\text{sen } x, \cos x) = \frac{1}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} \Rightarrow R(-\text{sen } x, -\cos x) = R(\text{sen } x, \cos x)$$

  Aplicamos el cambio indicado:

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \left| \begin{array}{c} \text{tg } x = t \to dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \text{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \to \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\rangle = \int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{t^2} dt$$

  Que es inmediata si la separamos en sumandos:

$$\int \frac{t^2+1}{t^2} dt = t - \frac{1}{t} + C \Rightarrow \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \text{tg } x - \frac{1}{\text{tg } x} + C = \text{tg } x - \text{cotg } x + C$$

Curiosidad – idea feliz:

Como antes, podemos seguir buscando *felices ideas* que simplifiquen integrales. Usando la relación fundamental de la trigonometría, $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = \text{tg} x - \text{cotg} x + C$$

O bien, como vimos anteriormente, acudir a las expresiones del ángulo doble como hicimos antes:

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \ldots = \int \frac{4\,dx}{\text{sen}^2 2x} = 2\int \text{cosec}^2 2x \cdot 2\,dx = -\text{cotg} 2x + C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.4.4. Cambio general

Si no pudimos resolver la integral con los cambios anteriores, deberemos aplicar el cambio universal:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

De aquí tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \frac{x}{2}=\operatorname{arc\,tg} t \Rightarrow x=2\cdot\operatorname{arc\,tg} t \Rightarrow dx=2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt \Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

Aplicando ahora las propiedades de las razones trigonométricas del ángulo doble, tenemos:

$$\operatorname{sen} x=2\cdot\operatorname{sen}\tfrac{x}{2}\cdot\cos\tfrac{x}{2}=2\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\tfrac{x}{2}=2\cdot\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cdot\cos^2\tfrac{x}{2}=2\cdot\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos^2\tfrac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\tfrac{x}{2}=2\cdot\cos^2\tfrac{x}{2}-1=2\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-1 \Rightarrow \cos x=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Tenemos, por tanto:

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$	$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$	$\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$	$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ejemplo:

- $\displaystyle\int\frac{dx}{1-\cos x}=$ Es fácil ver que no cumple ninguna de las tres condiciones anteriores, por tanto:

$$\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right\rangle=\int\frac{1}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{\frac{(1+t^2)-(1-t^2)}{1+t^2}\cdot(1+t^2)}dt=$$

$$=\int\frac{2}{1+t^2-1+t^2}dt=\int\frac{2}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C=-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+C$$

Curiosidad – idea feliz:

Para esta primitiva, si multiplico y divido por el conjugado del denominador, $(1+\cos x)$:

$$\int\frac{dx}{1-\cos x}=\int\frac{(1+\cos x)dx}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}=\int\frac{(1+\cos x)dx}{1-\cos^2 x}=\int\frac{(1+\cos x)dx}{\operatorname{sen}^2 x}=$$

Ahora separamos en dos sumandos, obtenemos sendas integrales inmediatas:

$$\int\frac{(1+\cos x)dx}{\operatorname{sen}^2 x}=\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}+\int\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}=-\operatorname{cotg} x-\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C=-\operatorname{cotg} x-\operatorname{cosec} x+C$$

En general, en las integrales de la forma:

$$\int\frac{dx}{a\operatorname{sen} x+b\cos x}$$

Haciendo $a=k\cdot\cos\alpha$ y $b=k\cdot\operatorname{sen}\alpha$, con k y α valores a obtener, la primitiva se transforma en:

$$\int\frac{dx}{a\operatorname{sen} x+b\cos x}=\int\frac{dx}{k\operatorname{sen} x\cos\alpha+k\cos x\operatorname{sen}\alpha}=\int\frac{dx}{k\operatorname{sen}(x+\alpha)}=\frac{1}{k}\int\operatorname{cosec}(x+\alpha)dx$$

que ya vimos cómo resolver en apartados anteriores.

Actividades propuestas

13. Halla las siguientes primitivas:

a) $\int \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x+1\right)dx$

b) $\int \frac{\operatorname{sen} 3x\,dx}{\sqrt[3]{\cos 3x}}$

c) $\int \frac{\operatorname{cotg} x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{(\cos 2x+1)^2}$

e) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

f) $\int \left(\operatorname{tg}^2 x + x + 1\right)dx$

g) $\int \frac{\operatorname{cotg} x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

h) $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$

i) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$

j) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

k) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

l) $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

m) $\int \cos^4 x\,dx$

n) $\int \cos(\ln x)dx$ *truco:* multiplica y divide por x: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} x\,dx$

ñ) $\int \frac{\left(1+\operatorname{sen}^2 x\right)dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$

o) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

p) $\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\,dx$

q) $\int \frac{dx}{13+12\cos x}$

Actividad resuelta – *Idea feliz*

- $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}$

En este ejemplo podríamos acudir a que el integrando es par en seno y coseno y aplicar el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Entonces:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x} = \int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x} = \int \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^2+\left(\frac{1}{t^2+1}\right)^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2t\left(t^2+1\right)}{t^4+1}dt = \ldots$$

Pero también podemos jugar un poco con el denominador, completando un cuadrado perfecto:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x+2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1-\frac{1}{2}4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x} = 2\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{2-\operatorname{sen}^2 2x}$$

La última idea feliz consiste en obtener el $\cos 2x$ en el denominador:

$$2\int \frac{\cos 2x\,dx}{2-\operatorname{sen}^2 2x} = 2\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+1-\operatorname{sen}^2 2x} = 2\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1+\cos^2 2x}$$

Y hemos obtenido una integral inmediata:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x} = 2\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1+\cos^2 2x} = -2\operatorname{arc\,tg}(\cos 2x)+C$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

3.5. Otras integrales

Los apartados anteriores dejan claro que el proceso de resolución de integrales no es tan fácil como el de derivación. Todas las simplificaciones que se pueden realizar después de derivar una función es lo que complica el cálculo de primitivas. Por tanto, en muchas ocasiones nos tendremos que limitar a *obedecer* los cambios aconsejados.

Además, existen funciones que no tienen primitiva o no puede expresarse en términos de funciones elementales. Incluso algunas de ellas sirven para definir otro tipo de funciones. Algunos ejemplos son:

$$\int e^{x^2}\,dx \quad , \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \quad , \quad \int \cos e^x\,dx \quad , \quad \int \cos x^2\,dx \quad \ldots$$

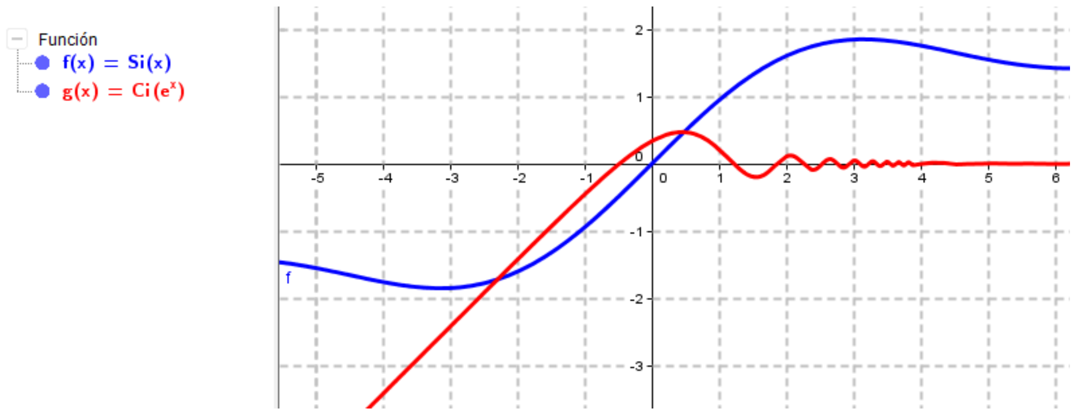
Podemos intentar *calcularlas* con GeoGebra, por ejemplo. Tecleamos en la barra de entrada:

1. `Integral[sen(x)/x]`
2. `Integral[cos(e^x)]`

Y observamos que aparecen expresiones como:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \mathrm{Si}(x) \quad , \quad \int \cos e^x\,dx = \mathrm{Ci}\left(e^x\right)$$

Donde Ci y Si son las siglas de *Cosine Integral* y *Sine Integral*, cuyas gráficas son:



Listamos a continuación los cambios de variable y mecanismos aconsejados para otras primitivas.

Integrales de funciones exponenciales

$$\int \mathrm{R}\left(a^x\right)dx \Rightarrow a^x = g(t) = t;\;\; dx = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{dt}{t}\text{, con } a \neq 1.$$

Integrales de funciones irracionales

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt[n]{x^m}, \sqrt[p]{x^q}, \sqrt[r]{x^s}, \ldots\right)dx \Rightarrow x = g(t) = t^{\text{m.c.m.}(n,p,r,\ldots)}$$

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)dx \Rightarrow x = g(t) = a\cdot \operatorname{sen} t$$

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)dx \Rightarrow x = g(t) = a\cdot \operatorname{tg} t$$

$$\int \mathrm{R}\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)dx \Rightarrow x = g(t) = a\cdot \sec t$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Actividad resuelta

- $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

El cambio aconsejado es $x = 2\operatorname{sen} t$, entonces:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = 2\operatorname{sen} t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{array} \right\rangle = \int \sqrt{4-(2\operatorname{sen} t)^2}\cdot 2\cos t\,dt = \int \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

Utilizando la relación fundamental de la trigonometría:

$$\int \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt$$

Que ya resolvimos antes:

$$4\int \cos^2 t\,dt = 2\int (1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)+C$$

Para deshacer el cambio, jugamos de nuevo con las expresiones trigonométricas,

$$\left| \begin{array}{c} x = 2\operatorname{sen} t \\ t = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} \end{array} \right\rangle \Rightarrow t+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t = t+\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos t\cdot\operatorname{sen} t = t+\operatorname{sen} t\cdot\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$$

y obtenemos:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\cdot\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}\right)+C$$

Otras integrales trigonométricas

- $\int \mathrm{R}(\operatorname{sen} mx, \cos nx)\,dx$: Se utilizan las expresiones:

$$\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b = \tfrac{1}{2}\cdot[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\cos a\cdot\cos b = \tfrac{1}{2}\cdot[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\operatorname{sen} a\cdot\cos b = \tfrac{1}{2}\cdot[\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)]$$

- $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{sen}^{n-1} x \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \end{array} \right\} = \ldots = -\dfrac{\operatorname{sen}^{n-1} x\cdot\cos x}{n}+\dfrac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

- $\int \cos^n x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos^{n-1} x \\ dv = \cos x\,dx \end{array} \right\} = \ldots = \dfrac{\cos^{n-1} x\cdot\operatorname{sen} x}{n}+\dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

- $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x\cdot(\sec^2 x - 1)\,dx = \dfrac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1}-\int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$ (análogamente con la cotangente)

- $\int \sec^n x\,dx = \int \sec^{n-2} x\cdot\sec^2 x\,dx$ (análogamente con la cosecante)

Si n par: $\int \sec^{n-2} x\cdot\sec^2 x\,dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)^{(n-2)/2}\cdot\sec^2 x\,dx$

Cambio de variable: $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \int \sec^n x\,dx = \int (1+t^2)^{(n-2)/2}\,dt$

Si n impar: Por partes, elegimos: $u = \sec^{n-2} x$ y $dv = \sec^2 x\,dx$

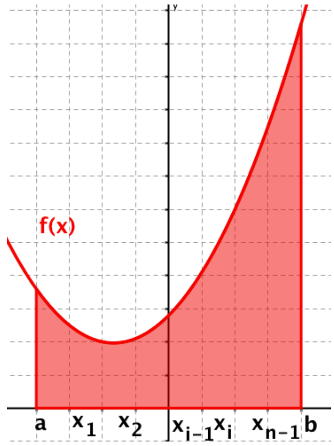
$$\Rightarrow \int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\left[\sec^{n-2} x\cdot\operatorname{tg} x+(n-2)\cdot\int \sec^{n-2} x\,dx\right]$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

4. EL PROBLEMA DEL CÁLCULO DEL ÁREA

4.1. Área bajo una curva

Dada una función $f(x)$ continua y no negativa en un intervalo $[a,b]$, su gráfica determina una región del plano que vendrá limitada por la función, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$.



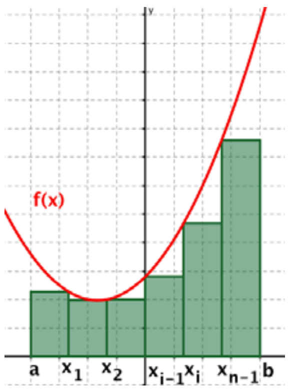
Veamos cómo podemos calcular de forma aproximada el **área** de dicha región:

Tomamos una partición del intervalo $[a,b]$. Consiste en dividir el intervalo en n partes, tomando para ello los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ verificando $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

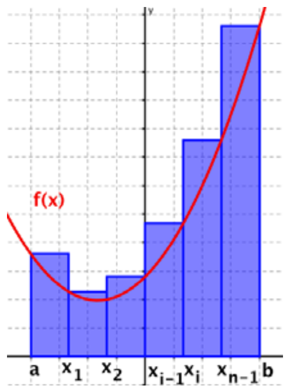
Así, tenemos los intervalos $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$.

A continuación, denotamos por m_i al mínimo valor que toma la función en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y por M_i al máximo valor que toma la función en el mismo intervalo.

Así, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ consideraremos dos posibles figuras, la creada con rectángulos de base $x_i - x_{i-1}$ y altura m_i y la creada con rectángulos de base $x_i - x_{i-1}$ y altura M_i. Sumando las áreas de los n rectángulos, obtenemos:



Suma inferior



Suma superior

En el primer caso obtenemos una **aproximación por defecto** del área encerrada bajo la curva:

$$s = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Esta suma se denomina **suma inferior** de la partición en el intervalo $[a,b]$.

En el segundo caso obtenemos una **aproximación por exceso** del área encerrada bajo la curva.

$$S = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Esta suma se denomina **suma superior** de la partición en el intervalo $[a,b]$.

Hemos obtenido dos aproximaciones del área A, una por defecto s y otra por exceso S. Se tiene que

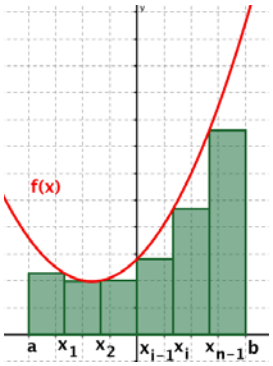
$$s \le A \le S$$

Si tenemos una partición P_1 del intervalo $[a,b]$, con suma inferior s_1 y suma superior S_1, diremos que otra partición P_2 del intervalo $[a,b]$ es más fina que P_1 si contiene todos los puntos de la partición P_1 y además otros puntos nuevos.

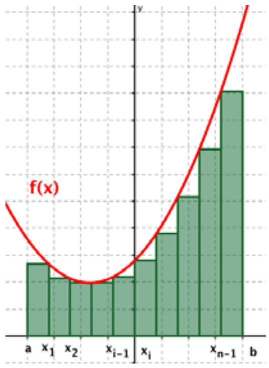
Para dicha partición P_2, tenemos una suma inferior s_2 y una suma superior S_2. Se verifica que:

$$s_1 \le s_2 \le A \le S_2 \le S_1$$

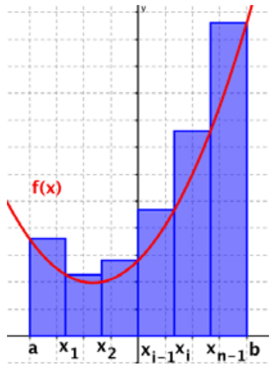
Es decir, al tomar una partición más fina, la suma inferior aumenta (siendo todavía menor o igual que el valor del área) y la suma superior disminuye (siendo mayor o igual que el valor del área).



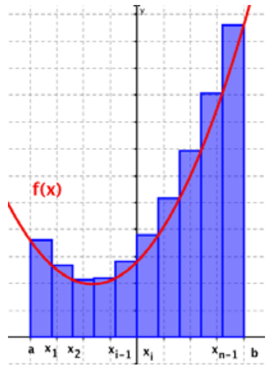
Partición P_1



Partición P_2



Partición P_1



Partición P_2

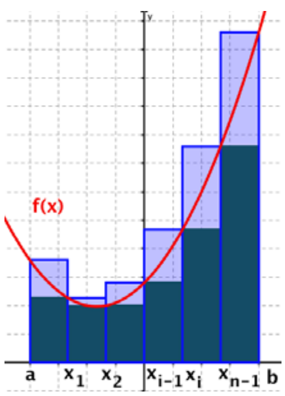
Esto significa que cuanto más fina sea la partición, más nos acercamos al verdadero valor del área.

Considerando una sucesión de particiones cada una más fina que la anterior, $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$, obtendremos $s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots$ la sucesión de áreas por defecto y $S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots$ la sucesión de áreas por exceso.

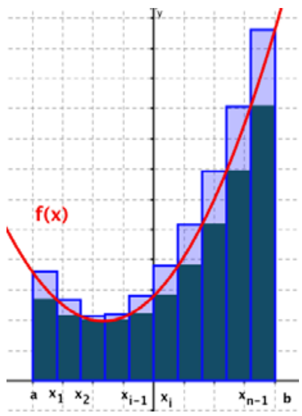
Cuando $n \to \infty$, la longitud de los intervalos de la partición se hace cada vez más pequeña, luego $x_i - x_{i-1} \to 0$. Así, cuando la función sea integrable, las sumas inferiores y superiores tenderán al área:

$$S_n - s_n \to 0$$

Esto significa que $\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$, y de aquí: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = A$



Suma inferior y superior con la partición P_1



Suma inferior y superior con la partición P_2

…

Área

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

4.2. Integral definida

Sea una función $f(x)$ continua y no negativa en un intervalo $[a,b]$.

Definimos la **integral definida** entre a y b de $f(x)$ como la expresión

$$\int_a^b f(x)dx$$

Su valor es **el área comprendida entre la gráfica** de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Los valores a y b se llaman **límites de integración**.

Hemos visto que dada una sucesión de particiones $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$ del intervalo $[a,b]$, cada una más fina de la anterior, con sumas inferiores $s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots$ y sumas superiores $S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots$, se verifica que dichas sumas tenderán al verdadero valor del área.

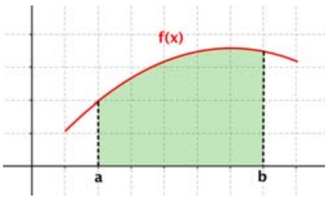
Se tiene que: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$, es decir, que la integral se puede interpretar como:

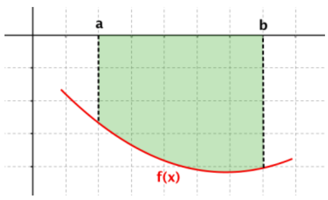
"la suma del área de todos los rectángulos de altura $f(x)$ y base infinitesimal (dx) comprendidos entre a y b"

Propiedades:

1. – Si los límites de integración son iguales, la integral definida vale cero. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. – Si la curva está por encima del eje X $(f(x) > 0)$, la integral es positiva, $\int_a^b f(x)dx > 0$, mientras que si la curva está por debajo del eje X $(f(x) < 0)$, se puede definir también la integral definida, que será negativa: $\int_a^b f(x)dx < 0$.





3. – Sea $c \in (a,b)$, entonces podemos descomponer la integral de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. – Si intercambiamos los límites de integración, la integral cambia de signo.

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

5. – Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo $[a,b]$, se tiene que:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{y} \quad \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

6. – Dada una función $f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$ y una constante $k \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

7. - Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a,b]$, verificando $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

4.3. Teorema del valor medio del cálculo integral

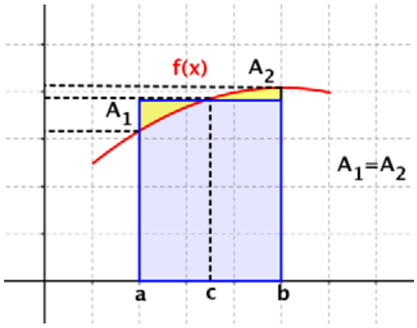
Dada una función *f* continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Interpretación geométrica:

Siendo la integral un área, la interpretación geométrica es simple:

Existe un punto $c \in (a,b)$ tal que el área encerrada entre la curva, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$ es igual al área de un rectángulo de base la amplitud del intervalo, $b-a$, y altura el valor que toma la función en el punto intermedio, $f(c)$.

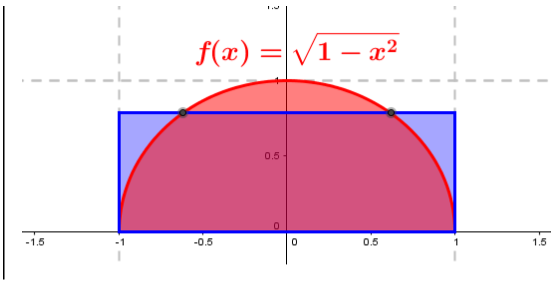


Ejemplo:

- *Encuentra los valores de c que verifican* $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$ *siendo* $f(x)$ *la semicircunferencia de centro el origen y radio* 1, *y a y b los puntos de corte de la misma con el eje* OX.

Sabemos que la ecuación de la circunferencia en el plano es $x^2+y^2=r^2$, así que para el problema que se nos plantea tenemos que $f(x)=+\sqrt{1-x^2}$ y los puntos de corte con el eje son $(-1,0)$ y $(+1,0)$.

Se trata de encontrar el rectángulo (azul) cuya área coincide con la de la semicircunferencia (roja), sabiendo que la base para ambas figuras está comprendida entre los puntos $(-1,0)$ y $(+1,0)$.



Entonces, siendo:

$$\mathrm{A}_{\text{rect}} = b\cdot h \quad \text{y} \quad \mathrm{A}_{\text{circ}} = \pi\cdot r^2$$

Debe verificarse:

$$\tfrac{1}{2}\pi\cdot r^2 = b\cdot h \Rightarrow \tfrac{1}{2}\pi\cdot 1^2 = 2\cdot h \Rightarrow h=\frac{\pi}{4}$$

El valor de *h* corresponde a la variable *y*, pero nos piden un valor de *x*. Por tanto:

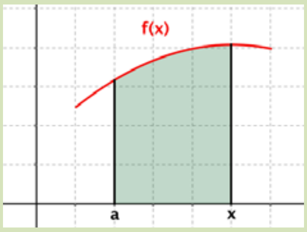
$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow x^2+h^2=1^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1-\left(\tfrac{\pi}{4}\right)^2}=\pm 0.61899$$

Que son los valores de *c* que nos piden.

4.4. Función integral o función área

Dada una función f continua en el intervalo $[a,b]$, para cualquier punto $x\in[a,b]$ se define la **función integral** o **función área** como:

$$F:[a,b]\to\mathbb{R}$$
$$x\to F(x)=\int_a^x f(t)dt$$



4.5. Teorema fundamental del cálculo integral

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

con $x\in[a,b]$ la función integral. Entonces F es derivable en (a,b) y

$$F'(x)=f(x)$$

para cualquier punto $x\in(a,b)$.

Demostración:

Aplicando la definición de derivada tenemos:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=$$

Separando la primera integral en dos sumandos (propiedad 3):

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x} f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral, $\exists c\in(x,x+h)$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt=f(c)\cdot(x+h-x)=f(c)\cdot h$$

Así:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c)\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0} f(c)$$

Como $c\in(x,x+h)$ y f es continua entonces $\lim_{h\to 0} f(c)=f(x)$ y, por tanto: $F'(x)=f(x)$.

Actividad resuelta

- *Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula* $f'(x)$ *si* $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^3}$

  Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral:

$$f(x)=\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(1+x^2)^3}$$

***Generalización* (1):**

Si en lugar de valores reales, los límites de integración son funciones reales de variable real, se aplica la regla de la cadena para obtener:

Sea f una función **continua** en el intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ y sea

$$F(x)=\int_a^{h(x)} f(t)dt$$

con $x\in[a,b]$ la función integral. Si $h(x)$ es **derivable**, entonces F es **derivable** en (a,b) y

$$F'(x)=f[h(x)]\cdot h'(x)$$

para cualquier punto $x\in(a,b)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

***Generalización* (2):**

Sea f una función **continua** en el intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ y sea

$$F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

con $x\in[a,b]$ la función integral. Si $h(x)$ y $g(x)$ son derivables, entonces F es **derivable** en (a,b) y

$$F'(x)=f[h(x)]\cdot h'(x)-f[g(x)]\cdot g'(x)$$

para cualquier punto $x\in(a,b)$.

Actividad resuelta

- *Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula* $f'(x)$ *si* $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{(1+t^2)^3}$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral:

$$f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{(1+t^2)^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\left(1+(x^3)^2\right)^3}\cdot 3x^2-\frac{1}{\left(1+(x^2)^2\right)^3}\cdot 2x=\frac{3x^2}{(1+x^6)^3}-\frac{2x}{(1+x^4)^3}$$

4.6. Regla de Barrow

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

y suele representarse como:

$$\int_a^b f(x)dx=\left(F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Demostración:

Se tiene que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Por otro lado, aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ también es una primitiva de $f(x)$. Al ser dos primitivas de la misma función, sólo se diferencian en una constante:

$$G(x)-F(x)=C\Rightarrow G(x)=F(x)+C$$

Evaluando las dos expresiones anteriores en el punto $x=a$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} G(x)=F(x)+C\Rightarrow G(a)=F(a)+C \\ G(x)=\int_a^x f(t)dt\Rightarrow G(a)=\int_a^a f(t)dt=0 \end{array}\right\}\Rightarrow F(a)+C=0\Rightarrow C=-F(a)$$

Evaluando ahora dichas expresiones anteriores en el punto $x=b$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} G(x)=F(x)+C\Rightarrow G(b)=F(b)+C\Rightarrow G(b)=F(b)-F(a) \\ G(x)=\int_a^x f(t)dt\Rightarrow G(b)=\int_a^b f(t)dt \end{array}\right\}\Rightarrow\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

Entonces, para aplicar la Regla de Barrow se siguen los siguientes pasos:

1. Calculamos una primitiva $F(x)$ de $f(x)$
2. Hallamos los valores de esa función entre *a* y *b*: $F(a)$ y $F(b)$
3. Calculamos la integral $\int_a^b f(x)dx = (F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Ejemplos:

- $\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx$.

  La función $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ es una función polinómica, luego es continua en todo $\mathbb{R}$, y por tanto es continua en el intervalo [1, 5].

  1. - Calculamos **una** primitiva de $f(x)$:

  $$\int (-x^2 + 6x - 5)dx = -\tfrac{1}{3}x^3 + 6 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 - 5x$$

  2. - Hallamos el valor de esa primitiva para los extremos del intervalo: $F(x) = -\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$

  $$F(1) = -\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 = -\frac{1}{3} + 3 - 5 = -\frac{7}{3} \quad \text{y} \quad F(5) = -\frac{5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 = \frac{25}{3}$$

  3. – Aplicamos la regla de Barrow:

  $$\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx = F(5) - F(1) = \frac{25}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{25}{3} + \frac{7}{3} = \frac{32}{3}$$

- $\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx$.

  La función $f(x) = x^2 - 4$ es una función polinómica, luego es continua en todo $\mathbb{R}$, y por tanto es continua en el intervalo [–2, +2].

  1. - Calculamos **una** primitiva de $f(x)$:

  $$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 4x$$

  2. - Hallamos el valor de esa primitiva para los extremos del intervalo y restamos:

  $$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx = \left(\tfrac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{+2} = \left(\tfrac{1}{3}(+2)^3 - 4 \cdot (+2)\right) - \left(\tfrac{1}{3}(-2)^3 - 4 \cdot (-2)\right) = \frac{-16}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-32}{3}$$

Actividades propuestas

14. Resuelve las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^6 (x^2 + x + 1)dx$ b) $\int_{-1}^{1} (x^2 + x + 1)dx$

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2 + 1}\,dx$ d) $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}dx$

e) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ f) $\int_1^e \ln x\,dx$

15. Halla el valor de c que verifica $\int_0^5 (2x+1)dx = f(c) \cdot (5-0)$ y razona su interpretación geométrica.

16. Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula $f'(x)$ si $f(x) = \int_2^{e^x} \frac{dt}{\ln x}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

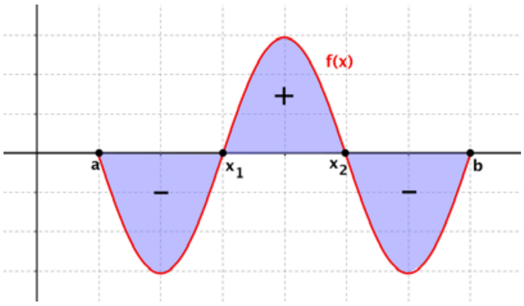
4.7. Aplicaciones de la integral definida

Área encerrada bajo una curva

Para calcular el área comprendida entra la gráfica de una función $f(x)$ y el eje de abscisas en un intervalo en el que la gráfica aparece por encima y por debajo del eje X, es necesario hallar cada una de las áreas por separado.

En los subintervalos en los que la gráfica está por debajo del eje X, la integral será negativa, y tomaremos el valor absoluto en toda la integral.

$$\text{Área} = \left| \int_a^{x_1} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_2}^{b} f(x)dx \right| = |F(x_1) - F(a)| + |F(x_2) - F(x_1)| + |F(b) - F(x_2)|$$



Desde el punto de vista práctico, si tenemos la representación gráfica de la función se puede plantear el área como suma o resta de las regiones donde la función es positiva o negativa, respectivamente.

Ejemplo:

- *Halla el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$, el eje X y las rectas $x = -3$ y $x = 4$.*

La función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ es una función polinómica, luego es continua en todo $\mathbb{R}$, y por tanto es continua en el intervalo [–3, 4].

La gráfica de $f(x)$ es una parábola cóncava (∪). Calculamos el vértice:

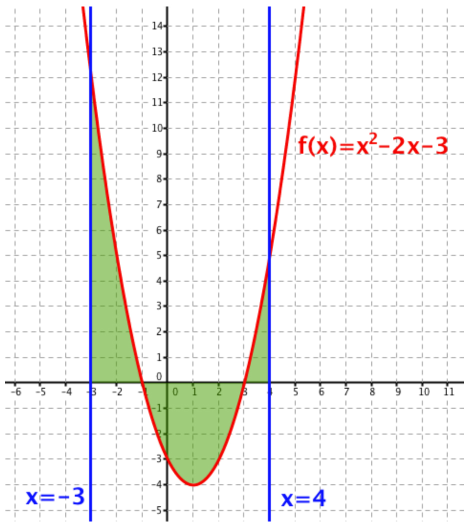
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{Si } x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 - 3 = -4$$

Tenemos: $V\,(1, -4)$

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X. Para ello, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \to (3, 0) \\ -1 \to (-1, 0) \end{cases}$$



Representando la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y las rectas $x = -3$ y $x = 4$ observamos que el área que queremos calcular se divide en tres regiones.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Hallamos una primitiva de $f(x)$:

$$\int \left(x^2 - 2x - 3\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

Hemos obtenido tres regiones. El área total será la suma del área de cada región:

$$\text{Área} = \left| \int_{-3}^{-1} \left(x^2 - 2x - 3\right) dx \right| + \left| \int_{-1}^{3} \left(x^2 - 2x - 3\right) dx \right| + \left| \int_{3}^{4} \left(x^2 - 2x - 3\right) dx \right| =$$

$$= \left| F(-1) - F(-3) \right| + \left| F(3) - F(-1) \right| + \left| F(4) - F(3) \right| = \left| \frac{5}{3} - (-9) \right| + \left| -9 - \frac{5}{3} \right| + \left| -\frac{20}{3} - (-9) \right| =$$

$$= \frac{32}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{71}{3} \text{ u}^2$$

Por tanto, el área de la región es igual a $\frac{71}{3}$ u^2

También podríamos plantear, ya que tenemos la representación gráfica de la función:

$$\text{Área} = \text{Área}_1 - \text{Área}_2 + \text{Área}_3 = \int_{-3}^{-1} \left(x^2 - 2x - 3\right) dx - \int_{-1}^{3} \left(x^2 - 2x - 3\right) dx + \int_{3}^{4} \left(x^2 - 2x - 3\right) dx$$

Es decir:

$$\text{Área} = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-3}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-1}^{+3} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{+3}^{+4} = \ldots$$

$$= \left(\frac{5}{3} - (-9) \right) - \left(-9 - \frac{5}{3} \right) + \left(-\frac{20}{3} - (-9) \right) = \frac{32}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{71}{3} \text{ u}^2$$

Propiedades:

1. – Si la función es impar, la integral definida en un intervalo simétrico respecto al origen es nula:

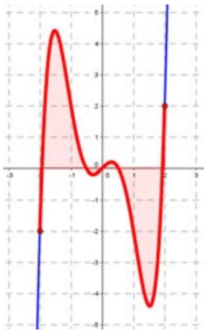
Si $f(x)$ es impar, $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0$

2. – Si la función es par, la integral definida en un intervalo simétrico respecto al origen es:

Si $f(x)$ es par, $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x) dx$

Para entender estas dos propiedades nos basta con ver las gráficas de cada tipo de función.

- Si la función es impar, es simétrica respecto al origen de coordenadas y define dos recintos de signo opuesto e igual área a ambos lados del origen. Al sumarla, el resultado es nulo.
- Si la función es par, es simétrica respecto al eje OY y define dos recintos de igual signo e igual área.


Función impar


Función par

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

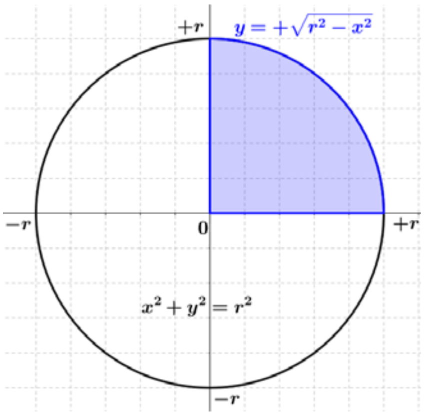
Actividad resuelta

- *Calcula el área de un círculo de radio r.*

Podemos elegir la ubicación de la circunferencia, así que la centramos en el origen. Para este caso, la ecuación de una circunferencia de radio r es:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Podemos aprovechar la simetría del problema y calcular el área a partir del recinto del primer cuadrante:



$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

La primitiva se resuelve con el cambio:

$$x = r \cdot \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = r \cdot \cos t \cdot dt$$

y proporciona:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(r^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{r} + x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \right) + C$$

Aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2 \cdot \left(r^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{r} + x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \right]_0^r =$$

$$A = 2 \cdot \left(r^2 \operatorname{arcsen} \frac{r}{r} + r \cdot \sqrt{r^2 - r^2} - r^2 \operatorname{arcsen} \frac{0}{r} + 0 \cdot \sqrt{r^2 - 0} \right) = 2 \cdot \left(r^2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

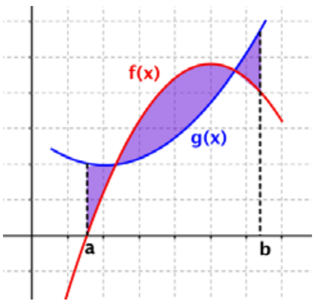
Es decir, llegamos a la conocida fórmula:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Área comprendida entre dos curvas

El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual que al área que se encierra entre la función diferencia $(f - g)(x)$ y el eje X en ese intervalo.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



Siendo $f(x) > g(x)$. Si no se determina qué función está *por encima* de la otra, podemos escribir la expresión general:

$$A = \int_a^b | f(x) - g(x) |\, dx$$

Sin embargo, desde el punto de vista práctico, en el caso en el que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tengan varios puntos de corte, será conveniente hallar las diferentes regiones y determinar las áreas por separado.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Ejemplo:

- *Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones* $f(x)=-x^2+4x$ *y* $g(x)=x$ *entre las rectas* $x=-1$ *y* $x=3$.

Las representaciones gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ son una parábola y una recta, respectivamente, así que es de esperar que haya dos cortes entre ellas y, por tanto, es posible que haya varias regiones diferenciadas a tener en cuenta.

La gráfica de $f(x)=-x^2+4x$ es una parábola convexa. Hallamos su vértice:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot(-1)}=\frac{-4}{-2}=2 \quad \text{Si } x=2\Rightarrow f(2)=-2^2+4\cdot 2=-4+8=4 \Rightarrow V\ (2,\,4)$$

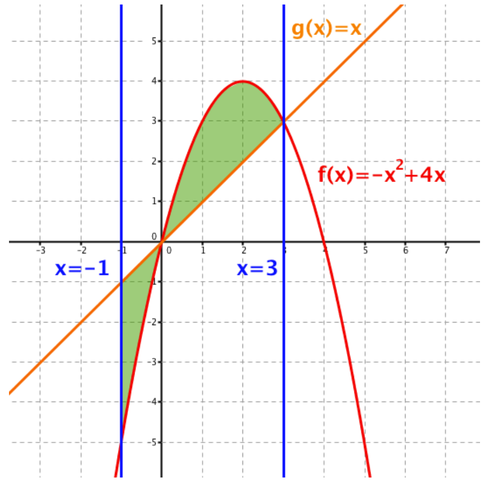
Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X, resolviendo la ecuación $f(x)=0$:

$$f(x)=0\Rightarrow -x^2+4x=0\Leftrightarrow x\cdot(-x+4)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

La gráfica de $g(x)=x$ es una recta. Para dibujarla, basta con obtener dos puntos:

x	0	3
y	0	3

Para determinar la región de la que queremos calcular el área, la representamos, junto con los límites de integración:



Buscamos los puntos de corte entre las dos funciones, resolviendo la ecuación $f(x)=g(x)$:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow -x^2+4x=x\Leftrightarrow -x^2+4x-x=0\Leftrightarrow -x^2+3x=0\Leftrightarrow x(-x+3)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

Por tanto, el área que queremos calcular será:

$$\text{Área}=\int_{-1}^{3}\left|(f-g)(x)\right|dx$$

Hallamos una primitiva de $(f-g)(x)$:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=-x^2+4x-x=-x^2+3x\Rightarrow$$
$$\int (f-g)(x)dx=\int\left(-x^2+3x\right)dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}$$

Hemos obtenido dos regiones. El área total será la suma del área de cada región:

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{0}\left(-x^2+3x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{3}\left(-x^2+3x\right)dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right|=$$

$$=\left|F(0)-F(-1)\right|+\left|F(3)-F(0)\right|=\left|0-\frac{11}{6}\right|+\left|\frac{9}{2}-0\right|=\frac{11}{6}+\frac{9}{2}=\frac{19}{3}\ \text{u}^2$$

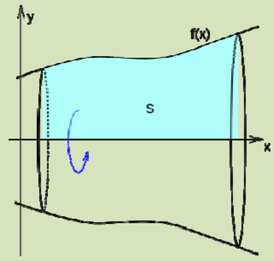
Por tanto, el área de la región es igual a $\frac{19}{3}$ u^2

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Volumen de un sólido de revolución

Una curiosidad relacionada con este apartado hace referencia a *Johannes Kepler*. Su segunda esposa, *Susana*, narraba en una carta que en la celebración de la boda, *Kepler* observó que el volumen de los barriles de vino se estimaba con una varilla introducida diagonalmente en el tonel por el agujero de la tapa. *Kepler* empezó a pensar en el razonamiento matemático que justifica ese proceso, y de ese modo comenzó el estudio de los volúmenes de los sólidos de revolución.

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces el volumen del sólido generado al girar la función en torno al eje OX:



se calcula mediante la función:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Ejemplo:

- *Halla el volumen del cono de altura 3 unidades definido al girar en torno al eje de abscisas la recta* $y = 3x$.

  Los datos del ejemplo nos hacen calcular la integral:

$$V = \pi\int_0^3 (3x)^2\,dx = 9\pi\int_0^3 x^2\,dx = 9\pi\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9\pi\cdot\left(\frac{3^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right) = 81\pi \text{ u}^3$$

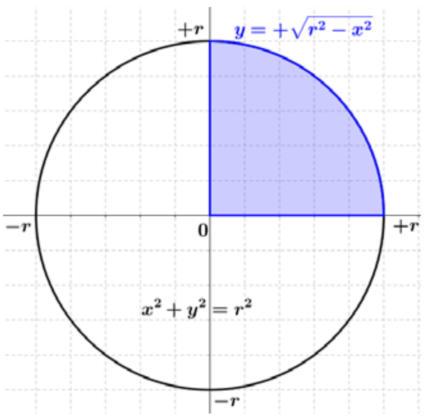
Actividad resuelta

- *Calcula el volumen de una esfera de radio* R.

  Como antes con el círculo, elegimos una circunferencia centrada en el origen, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$$

  Como antes, la simetría permite calcular el volumen a partir del recinto del primer cuadrante:



$$V = 2\cdot\int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\cdot\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx$$

Que es una primitiva inmediata y, aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$V = 2\cdot\left(R^2\cdot x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = 2\cdot\left[\left(R^2\cdot R - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2\cdot 0 - \frac{0^3}{3}\right)\right]$$

Con la que obtenemos la conocida fórmula:

$$V = \frac{4\pi}{3}\cdot R^3$$

CURIOSIDADES. REVISTA

Eudoxo de Cnido (390 aC – 337 aC)

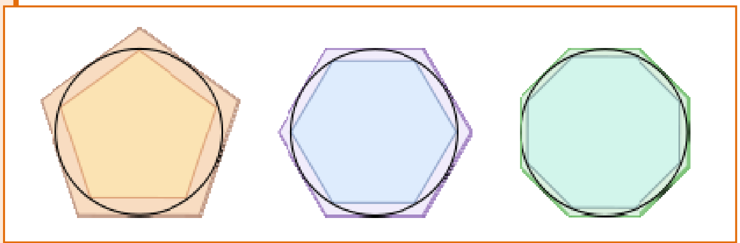
Eudoxo demostró que el volumen de una pirámide es la tercera parte del de un prisma de su misma base y altura; y que el volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro de su misma base y altura.

Para demostrarlo elaboró el llamado método de *exhausción*.

Método de exhausción

El **método de exhausción** es un procedimiento geométrico de aproximación a un resultado, con el cual el grado de precisión aumenta en la medida en que avanza el cálculo. El nombre proviene del latín exhaustiö (agotamiento, exhausto)

Se utiliza para aproximar el área de un círculo, o la longitud de una circunferencia, inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares con cada vez mayor número de lados.



Arquímedes

Arquímedes, escribió su tratado sobre *"El método de teoremas mecánicos"*, que se consideraba perdido hasta 1906. En esta obra, *Arquímedes* emplea el cálculo infinitesimal, y muestra cómo el método de fraccionar una figura en un número infinito de partes infinitamente pequeñas puede ser usado para calcular su área o volumen. Fue escrito en forma de una carta dirigida a *Eratóstenes de Alejandría*.

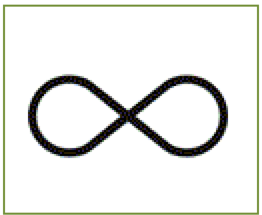
Observa cómo es la base de los conceptos que en el siglo XVII permitieron a *Isaac Newton* y a *Leibniz* unificar el cálculo diferencial con el cálculo integral, y cómo es el precursor del concepto de integral definida como las sumas inferiores y las sumas superiores de *Riemann*.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

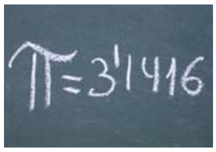
¿Has pensado alguna vez en la historia de los símbolos matemáticos?

Al principio las matemáticas eran *retóricas*, es decir, todos los cálculos se explicaban con palabras. Poco a poco empezaron a usarse *abreviaturas*, símbolos para representar las operaciones. Hoy las matemáticas están llenas de *símbolos*.

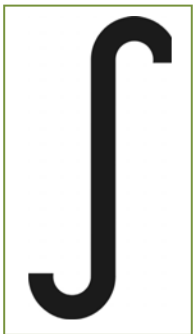
Por ejemplo, para indicar sumas y restas, primero se usaron letras como **p** y **m**, pero en el siglo XV comenzó a usarse los símbolos **+** y **–**. Para el producto se usó el aspa, **x**, de la cruz de San Andrés, pero ***Leibniz*** escribió a *Bernoulli* que ese símbolo no le gustaba pues se confundía con la x, y comenzó a usar el punto, **·**. Para el cociente, la barra horizontal de las fracciones es de origen árabe, y los dos puntos, de nuevo se los debemos a *Leibniz*, que los aconseja cuando se quiere escribir en una sola línea.



El símbolo de infinito, ∞, se debe a *John Wallis* y, a pesar de su parecido, no está relacionado con la cinta de Möebius, sino con la Lemniscata.



En 1706 se empezó a usar **π**, como inicial de la palabra griega "perímetro" y se popularizó con *Euler* en 1737.



El símbolo de la integral se lo debemos, de nuevo, a *Leibniz*, y es una estilización de la letra S, inicial de suma. También le debemos la notación dx, dy para el cálculo diferencial.

A ***Euler*** le debemos la invención de muchos símbolos y la popularización de otros: No sabemos por qué uso la letra *e* para representar al número **e**, base de los logaritmos neperianos, la letra **i**, para la unidad imaginaria compleja, Σ para el sumatorio, y la notación $\boldsymbol{f(x)}$ para las funciones.

En lógica y teoría de conjuntos se usan muchos y nuevos símbolos, como ∩, ∪, ⊃, ⊄, ⊂, ∈, ∉, {, }, ∧, ∨, ⇒, … que podemos deber a **George Boole.**

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

RESUMEN

CUADRO DE PRIMITIVAS	
$\int dx = x + C$	$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$
$\int (f(x) \pm g(x) \pm \ldots)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \pm \ldots$	$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$
$\int f^{n}(x) f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + C$, $n \neq -1$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$	$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$, $a \neq 1$, $a>0$
$\int \cos[f(x)] f'(x)\,dx = \operatorname{sen}[f(x)] + C$	$\int \operatorname{sen}[f(x)] f'(x)\,dx = -\cos[f(x)] + C$
$\int \sec[f(x)] \cdot \operatorname{tg}[f(x)] f'(x)\,dx = \sec[f(x)] + C$	$\int \sec^2[f(x)] f'(x)\,dx = \operatorname{tg}[f(x)] + C$
$\int \operatorname{cosec}^2[f(x)] f'(x)\,dx = -\operatorname{cotg}[f(x)] + C$	$\int \frac{f'(x)\,dx}{1+f(x)^2} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}[f(x)] + C \\ -\operatorname{arc\,cotg}[f(x)] + C \end{cases}$
$\int \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{1-f(x)^2}} = \begin{cases} \operatorname{arc\,sen}[f(x)] + C \\ -\arccos[f(x)] + C \end{cases}$	$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)\sqrt{f(x)^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{arcsec}[f(x)] + C \\ -\operatorname{arc\,cosec}[f(x)] + C \end{cases}$

Método de integración por cambio de variable	**1.** $\int g[f(x)] \cdot f'(x)\,dx \to t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)\,dx$ $\int g(t)\,dt = G(t) + C \Rightarrow F(x) = G[f(x)] + C$ **2.** $\int f(x)\,dx \to x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)\,dt$ $\int f[g(t)]\,g'(t)\,dt = G(t) + C \Rightarrow F(x) = G[g^{-1}(x)] + C$
Método de integración por partes	$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Regla de Barrow	$\int_a^b f(x)\,dx = (F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
Área entre una curva y el eje OX	$A = \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$
Área entre dos curvas	$A = \int_a^b \lvert f(x) - g(x)\rvert\,dx$
Volumen de revolución en torno al eje OX	$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Sabiendo que $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ y $\int f^n(x)\, f'(x) dx = \dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$, calcula:

1) $\int x^5 dx$ 2) $\int \dfrac{4}{x^5} dx$ 3) $\int \dfrac{dx}{x^2}$ 4) $\int 37\, dx$ 5) $\int 6x^7 dx$

6) $\int 5x^{1/4} dx$ 7) $\int 5\sqrt{x^3}\, dx$ 8) $\int (3-2x-x^4) dx$ 9) $\int (2x^5-5x+3) dx$

10) $\int (2+3x^3)^2 dx$ 11) $\int 2(x^2+2)^3 dx$ 12) $\int (1-x^3)^2 dx$ 13) $\int \dfrac{x^3-x+2}{x^3} dx$

14) $\int \left(-4x^{\frac{2}{3}}+2x\right) dx$ 15) $\int \left(3a-\dfrac{1}{3e^2}+2x^a\right) dx$ 16) $\int \left(-\dfrac{3}{x^3}+2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$

17) $\int \left(3x^5-\dfrac{4}{3x^2}+2\sqrt[5]{x^2}\right) dx$ 18) $\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$ 19) $\int \dfrac{x^3+5x^2-4}{x^2} dx$

20) $\int \left(5e^x+\dfrac{2x^3-3x^2+5}{4x^2}\right) dx$ 21) $\int \dfrac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$ 22) $\int \left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$

23) $\int \sqrt{x}(x^3+1) dx$ 24) $\int \left(\sqrt{x^5}-\dfrac{2}{3\sqrt{x}}\right) dx$ 25) $\int \sqrt{x}(3-5x) dx$

26) $\int \dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}} dx$ 27) $\int (3x+4)^2 dx$ 28) $\int (3x-7)^4 dx$

29) $\int x(x^2-4)^3 dx$ 30) $\int 3x(x^2+2)^3 dx$ 31) $\int (x^3+2)^2 x^2 dx$ 32) $\int (x^3+3)x^2 dx$

33) $\int (x-2)^{3/2} dx$ 34) $\int (a+x)^3 dx$ 35) $\int \left[(x+2)^3-(x+2)^2\right] dx$

36) $\int \sqrt{3x+12}\, dx$ 37) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+3}}$ 38) $\int \dfrac{dx}{(x-1)^3}$ 39) $\int (x^2-x)^4(2x-1) dx$

40) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^2 dx$ 41) $\int \dfrac{x^3}{(x^4-1)^2} dx$ 42) $\int \dfrac{x\, dx}{(x^2+4)^3}$ 43) $\int x\sqrt{x^2-7}\, dx$

44) $\int (x-1)(x^2-2x+3)^4 dx$ 45) $\int \dfrac{3x}{\sqrt{1+7x^2}} dx$ 46) $\int \dfrac{8x^2}{(x^3+2)^2} dx$

47) $\int \dfrac{3x dx}{\sqrt[3]{x^2+3}}$ 48) $\int x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}\, dx$ 49) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+5}} dx$ 50) $\int x^2(x^3-1)^{3/5} dx$

51) $\int \sqrt{x^2-2x^4}\, dx$ 52) $\int (e^x+1)^3 e^x dx$ 53) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

54) $\int x\cos^4 x^2 \operatorname{sen} x^2 dx$ 55) $\int \dfrac{x\ln(x^2+3)}{x^2+3} dx$ 56) $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx$

57) $\int \dfrac{e^x}{2e^x-3} dx$ 58) $\int \operatorname{tg}^5 x\cdot \sec^2 x\, dx$ 59) $\int \dfrac{\sec^2 3x}{\operatorname{tg} 3x} dx$ 60) $\int \dfrac{\ln x}{3x} dx$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

2. - Sabiendo que $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ y, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$ calcula:

1) $\int \frac{dx}{x+2}$ 2) $\int \frac{dx}{2x-3}$ 3) $\int \frac{dx}{x-1}$ 4) $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$ 5) $\int \frac{x^2}{1-2x^3} dx$ 6) $\int \frac{x^2}{1-x^3} dx$

7) $\int \frac{3x\ dx}{x^2+2}$ 8) $\int \frac{4}{3x+5} dx$ 9) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$ 10) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$

12) $\int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} + \sqrt{x} \right) dx$ 13) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$

15) $\int \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$ 16) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ 17) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx$ 18) $\int \operatorname{tg}\, x\, dx$

19) $\int \operatorname{cotg}\ x\, dx$ 20) $\int \frac{5}{x \ln x} dx$ 21) $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$

22) $\int \frac{2 \operatorname{sen}\ x \cos\ x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx$ 23) $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ 24) $\int x \operatorname{cotg}\ x^2 dx$

3. - Si $\int e^x dx = e^x + C$, $\int e^{f(x)} f'(x)\ dx = e^{f(x)} + C$, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ y $\int a^{f(x)} f''(x)\ dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$, calcula:

1) $\int 3^x dx$ 2) $\int a^{4x} dx$ 3) $\int e^{-x} dx$ 4) $\int 4 e^{3x} dx$

5) $\int 3x^2 e^{x^3+2} dx$ 6) $\int 4e^{4-x} dx$ 7) $\int x^2 e^{x^3} dx$ 8) $\int \left(e^x+1\right)^2 dx$

9) $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right)^2 dx$ 10) $\int \left(e^x + x^6\right)^2 dx$ 11) $\int e^{-x^2+2} x\, dx$ 12) $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$

13) $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$ 14) $\int x\, e^{\operatorname{sen}\ x^2} \cos\ x^2 dx$ 15) $\int e^{3 \cos 2x} \cdot \operatorname{sen}\ 2x\, dx$

16) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}} dx$ 17) $\int e^{\cos x} \cdot \operatorname{sen}\ x\, dx$ 18) $\int \left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x+3} \right) dx$

19) $\int e^{tg\, 2x} \sec^2 2x\, dx$ 20) $\int \frac{2x}{3} \cdot 3^{3+5x^2} dx$ 21) $\int \frac{x}{2} \cdot 2^{3-5x^2} dx$

4. - Sabiendo que $\int \operatorname{sen}\ x\, dx = -\cos\ x + C$, $\int f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x) dx = -\cos\ f(x) + C$, $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen}\ x + C$ y $\int \cos\ f(x) f'(x) dx = \operatorname{sen}\ f(x) + C$ calcula:

1) $\int \operatorname{sen}(2x+8) dx$ 2) $\int \operatorname{sen} \frac{x}{2} dx$ 3) $\int \cos\ 3x\, dx$

4) $\int x \operatorname{sen}\ x^2 dx$ 5) $\int \left(\frac{3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x}{4} \right) dx$ 6) $\int \operatorname{sen}\ 2x\, dx$

7) $\int e^x \cos\ e^x dx$ 8) $\int x \cos\left(2x^2\right) \cdot \operatorname{sen}\left(2x^2\right) dx$ 9) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

5. – Si $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+\mathrm{tg}^2 x)dx = \mathrm{tg}\, x + C$ y $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \int [1+\mathrm{tg}^2 f(x)] \cdot f'(x)dx = \mathrm{tg}\, f(x) + C$, calcula:

1) $\int x(1+\mathrm{tg}\, x^2)dx$ 2) $\int (1+\mathrm{tg}\, x)^2 dx$ 3) $\int \mathrm{tg}^2 3x\, dx$

6. – Halla el valor de las siguientes integrales, usando un cambio de variable:

1) $\int (2+5x)^4 dx$ 2) $\int (3+4x)^6 dx$ 3) $\int 6x(3+x^2)^5 dx$

4) $\int \left[\frac{3}{5+4x} + \frac{3}{(5+4x)^3}\right]dx$ 5) $\int \left(\sqrt{3+2x} + \sqrt[3]{3+2x}\right)dx$ 6) $\int \left(\frac{e^x - 4}{e^{2x}}\right)dx$

7) $\int \mathrm{sen}^3 x \cdot \cos x \cdot dx$ 8) $\int \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}dx$ 9) $\int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^4 x}dx$

10) $\int x\sqrt{x^2+4}\, dx$ 11) $\int \left(\frac{e^x+3}{e^{2x}}\right)dx$ 12) $\int \left(\frac{e^{-x}+2}{e^{3x}}\right)dx$

13) $\int \frac{(x-2\sqrt{x})^2}{3x^2}dx$ 14) $\int \frac{(2+3\sqrt{x})^2}{4x}dx$ 15) $\int \mathrm{sen}\sqrt{x}\, dx$

7. – Halla el valor de las siguientes integrales, usando el método de integración por partes:

1) $\int 3x \cos x\, dx$ 2) $\int x^2 \cdot \mathrm{sen}\, x\, dx$ 3) $\int x^2 \ln x\, dx$

4) $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$ 5) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ 6) $\int 2e^x \cdot \cos x \cdot dx$

7) $\int 2e^x \cdot \mathrm{sen}\, x\, dx$ 8) $\int e^x \cdot \cos 3x dx$ 9) $\int \frac{4-2x^2}{x} \cdot \ln x dx$

8. – Halla el valor de las siguientes integrales racionales:

1) $\int \frac{2}{x^2+1}dx$ 2) $\int \frac{3}{2x^2+2}dx$ 3) $\int \frac{3}{x-3}dx$ 4) $\int \frac{2}{3x^2+3}dx$

5) $\int \frac{5x}{x^2+3}dx$ 6) $\int \frac{3x-2}{x^2+1}dx$ 7) $\int \frac{(2x-3)^2}{3x^2}dx$ 8) $\int \frac{x+2}{x+1}dx$

9) $\int \frac{x-1}{x+1}dx$ 10) $\int \frac{3x-1}{x+3}dx$ 11) $\int \frac{3x^3}{x^2-4}dx$ 12) $\int \frac{3x^3}{x^2-1}dx$

13) $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}dx$ 14) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2}dx$ 15) $\int \frac{2}{x^2-4}dx$

16) $\int \frac{3x+2}{x^2+3x}dx$ 17) $\int \frac{4x+3}{x^2-1}dx$ 18) $\int \frac{3x^2}{x^2+6x+9}dx$

19) $\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}dx$ 20) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+4}dx$ 21) $\int \frac{3x+1}{x^3-4x^2+3x}dx$

22) $\int \frac{2x^2-1}{x^2+3x+2}dx$ 23) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+4}dx$ 24) $\int \frac{3x-1}{x^2+6x+9}dx$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

9. – Halla el valor de las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^3 \frac{dx}{2x}$ 2) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$ 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \text{sen}\, x\, dx$ 4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\, 3x\, dx$ 5) $\int_{-4}^{4} |\, x\,|\, dx$

6) $\int_{-1}^{1}\left(3x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx$ 7) $\int_{-1}^{2}\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-3}\right)dx$ 8) $\int_{-2}^{2}\left(\frac{3a}{5}-\frac{x}{2}\right)dx$

9) $\int_2^3 \frac{1}{x\cdot(\ln x)^3}dx$ 10) $\int_{-2}^{0}\left(e^{2x}+\frac{3}{e^{3x}}\right)dx$ 11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}(\text{sen}\, x-\cos x)^2 dx$

10. – Halla el valor de b para que se cumpla $\int_{-1}^{b}\left(2bx-3x^2\right)dx=-12$.

11. – Halla el área comprendida entre la función $f(x)=x^2-4x$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=6$.

12. – Halla el área limitada por la función $f(x)=0{,}5+\cos x$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=\pi$.

13. – Halla el área de la región limitada por la función $f(x)=x^3-x^2-6x$ y el eje de abscisas.

14. – Calcula el área de la porción de plano que limitan las curvas $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$ e $y-x-1=0$.

15. – Halla el área delimitada por las gráficas:

a) $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2$

b) $f(x)=x^2+x+4$ y $g(x)=-x^2+2x+5$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores de a, b y c para los que $F(x) = ax^3 + be^x + c\operatorname{sen} x$ es una primitiva de la función $f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5\cos x$ son:

a) 1, –7, 5; b) 3, 7, –5; c) 1, –7, –5; d) 3, –7, 5

2. La integral inmediata $\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx$ vale:

a) $\dfrac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{6} + C$; b) $\dfrac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6} + C$ c) $\dfrac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{4} + C$; d) $\dfrac{\sqrt{(2x^2+5)^2}}{6} + C$

3. La integral $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ vale:

a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$; b) $\operatorname{tg}(\arccos x) + C$ c) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$; d) $\operatorname{arctg}(\operatorname{arc\,sen} x) + C$

4. Al integrar por partes $\int \dfrac{x \cdot e^{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ se obtiene:

a) $e^{\operatorname{arc\,sen} x}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$; b) $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arc\,sen} x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right) + C$ c) $e^{\operatorname{sen} x}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right) + C$; d) $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arc\,sen} x}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right) + C$

5. La integral $\int \dfrac{2x+2}{x^2+4x+13}\,dx$ vale:

a) $\ln\left(x^2+4x+13\right) - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+2}{3} + C$; b) $\ln\left(x^2+4x+13\right) - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+2}{3} + C$

c) $\ln\left(x^2+4x+13\right) - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+2}{5} + C$; d) $\ln\left(x^2+4x+13\right) - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+2}{5} + C$

6. La integral $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$ vale:

a) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x + C$; b) $-\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$ c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + C$; d) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$

7. La integral definida $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$ vale:

a) 1; b) π c) 0; d) –1

8. El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$ vale:

a) 128/3; b) 32/3 c) 64/2; d) 64/3

9. El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = x$ vale:

a) 9/2; b) 19/3 c) 27/2; d) 3

10. El volumen del sólido de revolución generado por $y = x^2$, entre 0 y 2, al girar en torno al eje de abscisas es:

a) 32π; b) $16\pi/5$ c) 16π; d) $32\pi/5$

Apéndice: Problemas de integrales en las P.A.U.

(1) Calcula una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{x^3-3x+5}{\sqrt[3]{x}}$

(2) Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2-2x-1}{x^2-x-2}dx$ b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x}$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}(2x)+x\cdot\operatorname{sen}x)\,dx$ e) $\displaystyle\int e^x\cos 3x\,dx$ f) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tan}(3x)\,dx$

(3) Calcula haciendo el cambio de variable $e^x=t$:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x-4e^{2x}}{1+e^x}dx$

(4) Calcula $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{2x}+x\cos x\right)dx$

(5) a) Encuentra todas las funciones $f(x)$ cuya segunda derivada es $f''(x)=xe^x$.

b) De todas ellas, determina aquella cuya gráfica pasa por los puntos $A(0,2)$ y $B(2,0)$.

(6) Considera la función $-3\ y=x^3-3x^2+1$

a) Determina la recta tangente en el punto en que la función alcanza su máximo relativo.

b) Dibuja el recinto limitado por la curva y la recta tangente anterior.

c) Halla el área del recinto del apartado (b).

(7) Obtén el área del recinto cerrado por las curvas $y=1+\cos x$ e $y=0$ en el intervalo $[-\pi,+\pi]$.

(8) Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{2}-\operatorname{sen}x$

a) Dibuja el recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje *OX* y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

b) Calcula el área del recinto anterior.

(9) a) Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y=4x-x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje de abscisas.

b) Halla el área del recinto dibujado en (a).

(10) Halla el área de la zona del plano limitada por las rectas $y=0$, $x=1$ y $x=e$, y la gráfica de la curva $y=\ln^2(x)$.

(11) Las gráficas de las funciones $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $g(x)=x^2$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

(12) Sea $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si} \quad x\le 1\\ \ln x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$, donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x.

a) Dibuja el recinto acotado comprendido entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = 1$.

b) Calcula el área del recinto anterior.

(13) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}4x+12 & \text{si} \quad x\le -1\\ x^2-4x+3 & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$$

a) Haz un dibujo aproximado de la gráfica de la función *f*.

b) Calcula el área del recinto limitado por la función *f*, el eje de abscisas y la recta $x = 2$.

(14) Sea la parábola $y=x^2-3x+6$

a) Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de esa curva en el punto de abscisa $x = 3$.

b) Haz un dibujo aproximado del recinto limitado por la gráfica de la parábola, el eje *OY* y la recta tangente hallada anteriormente.

c) Calcula el área del recinto anterior.

(15) Dada la función $f(x)=(x-a)\cos x$, busca el valor del número real a sabiendo que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{2}-2$$

(16) Considera las curvas $f(x)=x^2-3x-2$ y $g(x)=x^2-x-2$.

a) Encuentra sus puntos de intersección.

b) Representa el recinto limitado que encierran entre ellas.

c) Encuentra el área del recinto limitado por las dos curvas.

(17) Las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y la recta $x=1$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

(18) Se considera la curva de ecuación $y=x^3-2x^2+x$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.

b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.

c) Calcula el área de ese recinto.

(19) La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x)=(x+2)\cdot(x^2-9)$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$.

b) Determina la función f sabiendo que $f(0)=\frac{1}{5}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

(20) La gráfica de la parábola $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ y $D(0,2)$ en dos recintos planos.

a) Dibuja la gráfica de la función y los recintos.

b) Calcula el área de cada uno de ellos.

(21) a) Calcula la función $f(x)$ sabiendo que su derivada es $f'(x) = (x-1)e^x$ y que $f(2) = e$.

b) Demuestra que $f(x)$ tiene un extremo relativo en un punto del eje de abscisas y razona si es máximo o mínimo.

(22) Las gráficas de la curva $y = x^3$ y de la parábola $y = x^2 + 2x$ encierran un recinto plano.

a) Dibuja ese recinto.

b) Calcula su área.

(23) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ mx + n & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$

a) Calcula *m* y *n* para que *f* sea continua en todo su dominio.

b) Para esos valores hallados, calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta $y = 1$.

(24) Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si} \quad x \le 0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

a) Dibuja la gráfica de la función.

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

(25) La curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

(26) La parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

(27) La curva $y = x^2 + 3$ y la recta $y = 2x + 3$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

(28) Se considera la parábola $y = 6x - x^2$

a) Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de la parábola en los puntos de corte con el eje *OX*.

b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la parábola y las rectas halladas anteriormente.

c) Calcula el área de ese recinto.

(29) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ e^{x-2} + k^2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

a) Determina el valor de $k > 0$ para que la función sea continua en el intervalo $[0,4]$.

b) Suponiendo que $k = 1$, halla la recta tangente en $x = 3$.

c) Suponiendo que $k = 1$, halla el área que la función determina con el eje *OX*, para $x \in [0,4]$.

(30) a) Resuelve por partes la siguiente integral: $\int x(1 - \ln x)dx$

b) De todas las primitivas de $f(x) = x(1 - \ln x)$ calcula la que pasa por el punto $(1,3)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

(31) La gráfica de la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ encierran un recinto plano.

a) Dibuja aproximadamente dicho recinto.

b) Calcula el área de ese recinto.

(32) La gráfica de la curva $f(x) = \dfrac{4}{2-x}$ y las rectas $y = 4$ y $x = 0$ encierran un recinto plano.

a) Dibuja aproximadamente dicho recinto.

b) Calcula el área de ese recinto.

(33) Esboza la gráfica de la parábola $y = -x^2 + x + \frac{7}{4}$ y halla el área de la región del plano determinada por la parábola y la recta que pasa por los puntos $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$.

(34) Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola $y = -x^2 + 4$ y la recta $y = 1$.

a) Representa gráficamente la chapa y calcula su área.

b) Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y = 1$.

(35) Representa gráficamente las parábolas $y^2 - 4x = 0$ y $x^2 - 4y = 0$ y calcula el área que encierran.

(36) Se considera la función $f(x) = 2 - \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

b) Para $x \in [0, 5]$, esboza la gráfica de la función y calcula el área comprendida entre ella y el eje X.

(37) Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Halla sus asíntotas, máximos y mínimos.

b) Representa gráficamente la función.

c) Halla el área delimitada por la función y el eje OX, para $-1 \le x \le 1$.

(38) a) Calcula: $\int x^3 \ln(x) dx$ donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) Utiliza el cambio de variable $x = e^t - e^{-t}$ para calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$.

Indicación: Para deshacer el cambio de variable, utiliza: $t = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$.

(39) a) Si *f* es una función continua, obtén $F'(x)$ siendo:

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3) dt$$

b) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

(40) a) Sea la función $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$. Calcula $\int f(t)dt$. b) Se define $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$

(41) a) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -sen\, x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$. b) Halla el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -sen\, x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Ampliación

A lo largo del tema hemos desarrollado varios métodos, estrategias y aplicaciones de las integrales, pero hay mucho más. Dejamos este apartado para mostrar otras que superan los contenidos del temario.

Integral de una función racional cuando el denominador tiene raíces complejas múltiples

Si al resolver la primitiva de una función racional:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \quad \text{con } Grado\ de\ Q(x) > Grado\ de\ P(x)$$

$Q(x)$ tiene raíces complejas múltiples, es decir, en su factorización aparecen términos de la forma:

$$Q(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)^k \cdot (x-d)\cdot \ldots \cdot (x-e)^n \cdot \ldots$$

Descomponemos la fracción algebraica como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{A(x)}{B(x)}\right]' + \frac{C(x)}{D(x)} \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{A(x)}{B(x)} + \int \frac{C(x)}{D(x)}dx$$

con:

- $B(x)$ el máximo común divisor de $Q(x)$ y $Q'(x)$;
- $A(x)$ un polinomio, de grado uno menor que $B(x)$, a determinar;
- $D(x)$ el polinomio que resulta del cociente $\frac{Q(x)}{B(x)}$;
- $C(x)$ un polinomio, de grado uno menor que $D(x)$, a determinar.

El desarrollo requiere bastante habilidad con las expresiones algebraicas, y acaba proporcionando una integral racional cuyo denominador tiene raíces complejas simples.

Volumen de un sólido de revolución generado al girar en torno al eje OY

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces el volumen del sólido generado al girar la función en torno al eje OY se calcula con la integral:

$$V = 2\pi\int_a^b x\cdot f(x)dx$$

Longitud de un arco de curva

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces la longitud del arco de la curva entre los puntos de abscisa a y b se calcula como:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$$

Superficie de un sólido de revolución generado al girar en torno al eje OX

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces la superficie del sólido generado al girar la función en torno al eje OX se calcula mediante la integral:

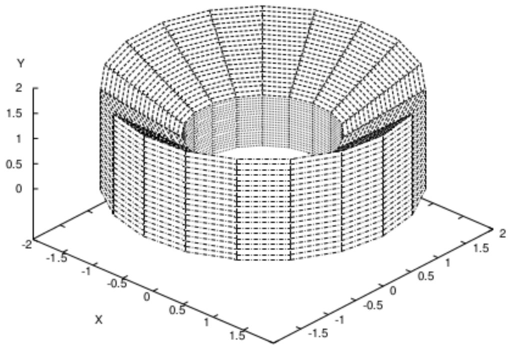
$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y el GIMP

Ejemplos:

- *Halla el volumen de la "plaza de toros" generada al girar la recta $y = x$ alrededor del eje OY en el intervalo $[1, 2]$.*

  La figura cuyo volumen queremos hallar es:



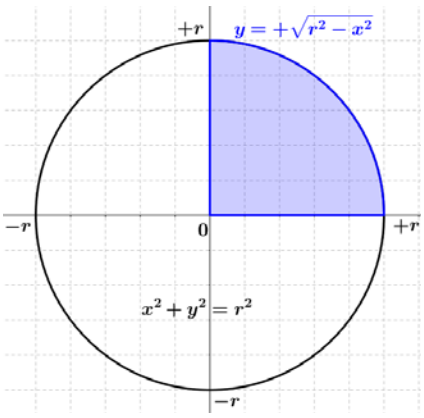
  Y se trata de calcular la integral:

$$V = 2\pi\int_1^2 x\cdot x\cdot dx = 2\pi\int_1^2 x^2 dx = 2\pi\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 2\pi\cdot\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) = \frac{14\pi}{3}\ \text{u}^3$$

- *Halla la longitud de una circunferencia de radio r.*

  Debemos utilizar la expresión: $L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$, así que derivamos la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$



  Entonces, utilizando la simetría de la circunferencia otra vez:

$$L = 4\cdot\int_0^r \sqrt{1+\left[\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right]^2}\,dx = 4\cdot\int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$= 4\cdot\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4r\cdot\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

  La primitiva se resuelve con el cambio:

$$x = r\cdot \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = r\cdot\cos t\cdot dt$$

  como vimos en el apartado 3.5, y proporciona:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \int \frac{r\cdot\cos t\cdot dt}{\sqrt{r^2 - r^2\operatorname{sen}^2 t}} = \int dt = \operatorname{arcsen} t + C = \operatorname{arcsen}\frac{x}{r} + C$$

  Aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$L = 4\cdot\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{r}\right]_0^r = 4\cdot\left(\operatorname{arcsen}\frac{r}{r} - \operatorname{arcsen}\frac{0}{r}\right) = 4\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$

  Es decir:

$$L = 2\pi r\ \text{u}$$

Matemáticas II.
2º Bachillerato.
Capítulo 11: Probabilidad y combinatoria

LibrosMareaVerde.tk
www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

Todos los días estamos obligados a calcular probabilidades, aunque sea de modo intuitivo: ¿ganará la liga mi equipo favorito?, ¿lloverá mañana?, ¿le gustaré a esa persona “especial” que hay en clase?, ¿me darán una beca?

Siempre, en la televisión o en los periódicos, se usa la Probabilidad y se utiliza continuamente en todas las Ciencias.

Para aprender a contar, sÍ, contar, estudiaremos Combinatoria, que luego nos ayudará a contar los sucesos posibles y los favorables para calcular probabilidades.

Como ya has estudiado Estadística y Probabilidad en ESO, vamos a dar al lenguaje de probabilidades un mayor rigor. No daremos con todo su rigor la definición axiomática de probabilidad, pero nos aproximaremos a ella, y estudiaremos algunas de sus propiedades y teoremas, como el Teorema de *Bayes*.

El Teorema de *Bayes* nos va servir para resolver problemas como:

> *“Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo, calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis”.*

Sin embargo ya sabes (de ESO) resolver todos estos problemas utilizando dos valiosas herramientas, los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

1. PROBABILIDAD

1.1. Álgebra de sucesos. Experimentos simples y compuestos

Experimento aleatorio

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, no se puede predecir el resultado.

Ejemplos:

- *Son experimentos aleatorios:*

a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz.
b) Lanzar dos dados y anotar los números de las caras superiores.
c) Si en una urna hay bolas blancas y rojas, sacar una al azar y anotar el color.
d) Sacar, sin reemplazamiento, dos cartas de la baraja.
e) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto.

Sin embargo, calcular el coste de una mercancía, sabiendo el peso y el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Tampoco lo es calcular el coste del recibo de la luz sabiendo el gasto.

- *No son experimentos aleatorios*

a) Salir a la calle sin paraguas cuando llueve y ver si te mojas.
b) El precio de medio kilo de rosquillas, si las rosquillas cuestan a 3 € el kilo.
c) Soltar un objeto y ver si cae.

Actividades propuestas

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

a) La superficie de las provincias españolas.
b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
e) Saber si el próximo año es bisiesto.

Suceso, suceso elemental, espacio muestral

Al realizar un experimento aleatorio existen varios **posibles resultados** o **sucesos posibles**. Siempre se obtendrá uno de los **posibles resultados**.

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral, E**.

Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados, es decir, del espacio muestral.

Ejemplos:

- *Los posibles resultados al tirar una moneda son que salga* cara *o salga* cruz. *El conjunto de sucesos elementales es* E = {*cara, cruz*}.
- *Al lanzar un dado, el conjunto de posibles resultados es* E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, el suceso obtener par es {2, 4, 6}, el suceso obtener impar es {1, 3, 5}, el suceso obtener múltiplo de 3 es {3, 6}, sacar un número menor que 3 es {1, 2}.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

- *El conjunto de posibles resultados de los experimentos aleatorios siguientes, son:*

a) Extraer una bola de una bolsa con 9 bolas blancas y 7 negras es E = {*blanca*, *negra*}.
b) Sacar una carta de una baraja española es E = {As de Oros, 2O, 3O,…, SO, CO, RO, As de Copas, …, RC, As de Bastos, …, RB, As de Espadas,…, RE}

- *Al lanzar dos monedas el conjunto de posibles resultados es* E = {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. El suceso *sacar cero caras* es {(+, +)}, *sacar una cara* es {(C, +), (+, C)} y *sacar dos caras* {(C, C)}.

Actividades propuestas

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.

5. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos A y B:

La **unión**: $A \cup B$ se verifica si se verifica A **o bien** se verifica B.

La **intersección**: $A \cap B$ se verifica si se verifica A **y además** se verifica B.

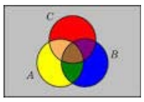
La **diferencia**: $A - B$ se verifica si se verifica A y **no** se verifica B.

La unión, intersección y diferencia de dos sucesos aleatorios, son también sucesos aleatorios.

Las operaciones con sucesos verifican las mismas **propiedades** que las operaciones con conjuntos:

Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Simplificativa:	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Leyes de Morgan:	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Todas ellas puedes comprenderlas representando conjuntos usando diagramas de Venn.



Ejemplos:

- *Al lanzar un dado, llamamos* A *al suceso obtener par*: A = {2, 4, 6}, y B al suceso obtener múltiplo de 3: B = {3, 6}. Entonces $A \cup B$ = {2, 3, 4, 6}, $A \cap B$ = {6}, $A - B$ = {2, 4}.

Actividades propuestas

7. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Suceso seguro, suceso imposible y suceso contrario

Se considera que el espacio muestral, E, es un suceso al que se denomina **suceso seguro**, y que el conjunto vacío, $\varnothing$, es otro suceso, al que se llama **suceso imposible**.

Dado un suceso A, se denomina **suceso contrario** (o **complementario**) de A, y se escribe $\overline{A}$, (o A', o A^C, o no$A$), al suceso $E - A$.

Sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$. En caso contrario se llaman sucesos **compatibles**.

Ejemplos:

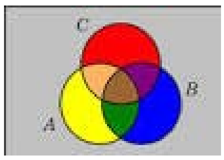
- *Al lanzar un dado, si* $A = \{2, 4, 6\}$, y $B = \{3, 6\}$. Los sucesos A y B son compatibles pues $A \cap B = \{6\}$. Sucesos incompatibles son "sacar un número menor que 2" y "sacar múltiplo de 3" pues es imposible que se verifiquen a la vez.

Actividades propuestas

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A.

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso "*sacar un as*".



11. Utiliza un diagrama de Venn para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.

12. Considera ahora un diagrama de Venn con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.

A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas?

B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café?

C) Vamos a llamar A al conjunto de las personas que toman té, y B al de las que toman café. Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman té. d) Toman té y no toman café.

D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B.

E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras.

D) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.

13. En el mismo lugar del problema anterior, con 35 personas, ahora se ha añadido a la máquina de bebidas el chocolate (C), y ahora se sabe que 12 personas toman sólo té, que 5 personas toman té y chocolate pero no café, que 20 personas no toman ni té ni chocolate. Es posible saber cuántas personas tomaban al menos una de las tres bebidas; cuántas, de entre las que tomaban café, tomaban también chocolate… Investiga si tienes datos suficientes para conocerlo todo, o debes ampliar la encuesta para conocer datos nuevos.

1.2. Asignación de probabilidades

Existe una definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov* relativamente reciente (1930), pero antes ya había sido usado este concepto, por ejemplo por *Fermat* y *Pascal* en el siglo XVII que se escribieron cartas reflexionando sobre lo que ocurría en los juegos de azar. Cuando no comprendían cómo asignar una determinada probabilidad, jugaban muchas veces al juego que fuese y veían a qué valor se aproximaban las frecuencias relativas. Así, la **probabilidad de un suceso** podría definirse como el **límite al que tienden las frecuencias relativas** de ese suceso cuando el número de experimentos es muy alto. Por tanto:

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una **experimental**, *a posteriori*, analizando las **frecuencias relativas** de que ocurra el suceso, y la otra por simetría, *a priori*, cuando se sabe que los sucesos elementales son **equiprobables,** es decir, que **todos ellos tienen la misma probabilidad**, entonces **se divide el número de casos favorables por el número de casos posibles,** que se conoce como **Regla de *Laplace*** y dice que:

Regla de Laplace

"Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles".

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

La regla de *Laplace* está basada en el *principio de razón insuficiente*: si a priori no existe ninguna razón para suponer que un resultado se puede presentar con más probabilidad que los demás, podemos considerar que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Ley de los Grandes Números

Jakob Bernoulli, en 1689, definió *probabilidad* utilizando la *Ley de los Grandes Números*, que dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse cuando el número de pruebas tiende a infinito.

A ese número al que tienden las frecuencias relativas lo llamó probabilidad.

Puedes comprender que esta definición tiene graves inconvenientes. No sabemos cuántas pruebas debemos realizar. Hay que hacer *muchas* y en las mismas condiciones. Se obtiene un valor aproximado de la probabilidad.

Actividades resueltas

- La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, pues sólo hay dos casos posibles {*cara*, *cruz*}, un único caso favorable, *cara*, y suponemos que la moneda no está trucada. Si sospecháramos que la moneda estuviera trucada para asignar esa probabilidad habría que tirar la moneda un montón de veces para observar hacia qué valor se acerca la frecuencia relativa de obtener cara.
- La probabilidad de sacar un 5 al tirar un dado es 1/6 pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, un único caso favorable, 5, y suponemos que el dado no está trucado, luego todos ellos son equiprobables.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

- La probabilidad de sacar una bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es 7/10.
- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, aunque sólo hay dos casos posibles, que te pille el coche y que no te pille, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados y se calcula utilizando las frecuencias relativas.
- La probabilidad de que un bebé sea niña es aproximadamente 0'5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0'49.
- Si consideramos una baraja española de 40 cartas y elegimos una carta, algunos de los sucesos que pueden ocurrir son "*sacar un oro*", o "*sacar un as*", o "*sacar el caballo de copas*"... Como de antemano no sabemos lo que va a ocurrir decimos que estos sucesos son *aleatorios* o de *azar*. Antes de sacar ninguna carta todas ellas son igualmente factibles, y como puede salir una cualquiera de las 40 cartas decimos que la probabilidad de, por ejemplo, *sacar el caballo de copas* es 1/40, la de *sacar un oro* es 10/40, y la de un *as* es 4/40.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar el rey de copas? ¿Y de sacar un rey? ¿Y una copa?

La probabilidad de sacar el *rey de copas* es 1/40. Pero el suceso *sacar un rey* se cumple si sale el rey de oros, o de copas, o de bastos o de espadas. Es decir, no es un suceso simple, está formado, en este caso, por 4 sucesos elementales, luego su probabilidad es 4/40 = 1/10. Lo mismo le ocurre a *sacar una copa*. Es un suceso compuesto, y como hay 10 copas su probabilidad es 10/40 = 1/4.

- *En una clase hay* 15 *chicos y* 14 *chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?*

Como hay 14 chicas (los casos favorables) sobre una población de 29 individuos, de acuerdo con la Ley de *Laplace*, la probabilidad pedida es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}} = \frac{14}{29}$$

- *En el monedero tenemos* 3 *monedas de* 1 *céntimo,* 7 *monedas de* 5 *céntimos,* 4 *monedas de* 10 *céntimos y* 2 *monedas de* 50 *céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?*

Al sacar una moneda, para tener un número par de céntimos tiene que ser de 10 céntimos o de 50 céntimos. Por tanto el total de casos favorables es de 6 (hay 4 de 10 y 2 de 50). El número de casos posibles es el de monedas que tenemos en el monedero, que son 3 + 7 + 4 + 2 = 16.

La probabilidad de obtener un número par de céntimos es:

$$P(\text{par de céntimos}) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso "par de céntimos"}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Actividades propuestas

14. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

15. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov*

El matemático ruso *Andrey Kolmogorov* (1903, 1987) basándose en las propiedades del álgebra de suceso y en las propiedades de las frecuencias relativas dio una definición de probabilidad basada en un sistema de axiomas.

La definición axiomática de *Kolmogorov* es más complicada que la que viene a continuación. Pero esta simplificación puede servirnos:

Definición

La probabilidad es una aplicación (función) que asigna a cada suceso A de un espacio muestral E un número real que debe verificar las siguientes propiedades:

$$E \to R$$

$$A \to P(A)$$

1.- La probabilidad del suceso seguro es 1:

$$P(E) = 1.$$

2.- La probabilidad de cualquier suceso siempre es un número no negativo:

$$P(A) \geq 0, \text{ para todo } A.$$

3.- Si dos sucesos son incompatibles entonces la probabilidad de la unión es la suma de sus probabilidades:

$$\text{Si } A \cap B = \varnothing \text{ entonces } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Las dos últimas las verifican todas las medidas. La probabilidad es una medida.

Consecuencias de los axiomas

De estos axiomas se deducen las siguientes propiedades:

a) La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Demostración:

En efecto, un suceso y su suceso contrario son incompatibles, y su unión es el suceso seguro. Por lo que usando los axiomas 1 y 3 se tiene:

$$1 = P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

b) La probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\varnothing) = 0$.

Demostración:

En efecto, el suceso imposible es el suceso contrario del suceso seguro, por lo utilizando la propiedad anterior y el axioma 1, se tiene:

$$P(\varnothing) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0.$$

c) La probabilidad de un suceso (finito) es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Demostración:

En efecto, los sucesos elementales son incompatibles entre sí, luego si $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ por el axioma 3 se tiene que:

$$P(A) = P\{a_1, a_2, ..., a_n\} = P(a_1) + P(a_2) + ... + P(a_n).$$

Si los sucesos elementales son equiprobables de esta propiedad se deduce la regla de *Laplace*.

d) La probabilidad de la unión de sucesos disjuntos dos a dos es igual a la suma de las probabilidades: $P\{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\} = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

Demostración:

Son sucesos incompatibles entre sí, luego se verifica por el axioma 3

Actividades resueltas

- *¿Cuál es la probabilidad de sacar un as en la baraja de* 40 *cartas? ¿Y de* ***no*** *sacar un as? ¿Y de sacar una copa? ¿Y de* ***no*** *sacar una copa?*

El suceso *no sacar un as* es el suceso **contrario** al de *sacar un as*. Cartas que no son ases hay 36, luego la probabilidad de no sacar as es 36/40 = 9/10. Observa que se obtiene que P(as) + P(no as) = 1/10 + 9/10 = 10/10 = 1.

La probabilidad de *sacar copa* es 10/40, y hay 30 cartas que no son copas, luego la probabilidad de ***no*** *sacar copa* es 30/40, y 10/40 + 30/40 = 1.

Actividades propuestas

16. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

17. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Sucesos compatibles e incompatibles

Ejemplo:

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar una copa o un oro?

Hay 10 copas y 10 oros, y ninguna carta es a la vez copa y oro, luego la probabilidad es 20/40.

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar un as o un oro?

Hay 4 ases y hay 10 oros, pero hay el *as de oros*, luego las cartas que son o bien un as o bien un oro son 13, luego la probabilidad es 13/40.

Llamamos **sucesos incompatibles** a los que, como copa y oro, no pueden realizarse a la vez, que su intersección es el suceso imposible, y **sucesos compatibles** a los que, como as y oro, pueden realizarse a la vez.

Designamos $P(A \cup B)$ a la probabilidad del suceso "*se verifica A o bien se verifica B*". Hemos visto en el ejemplo que si los sucesos son incompatibles su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades, pues se verifica el axioma 3 de *Kolmogorov*.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son incompatibles.

Pero si A y B tienen una intersección no vacía, pueden verificarse a la vez, habrá que restar esos casos, esas veces en que se verifican A y B a la vez.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, si A y B son compatibles.

Esta segunda expresión es más general que la primera, ya que en el caso en que A y B son incompatibles entonces $P(A \cap B) = 0$.

Actividades resueltas

- *Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes: a) Sacar un rey o una figura; b) No sale un rey o sale un rey; c) Sacar un basto o una figura.*

a) Hay 4 reyes y hay 4 · 4 = 16 figuras (as, sota, caballo y rey), pero los cuatro reyes son figuras, por tanto $P(\text{Rey} \cup \text{Figura}) = 4/40 + 16/40 - 4/40 = 16/40 = 0'4$.

b) Hay 40 – 4 = 36 cartas que no son reyes, y hay 4 reyes, luego $P(\text{no rey} \cup \text{rey}) = 36/40 + 4/40 = 1$. Esta conclusión es más general. Siempre:

$$P(\overline{A} \cup A) = 1,$$

pues un suceso y su contrario ya vimos que verificaban que $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

c) Hay 10 bastos y hay 162 figuras, pero hay 4 figuras que son a la vez bastos (as, sota, caballo y rey), luego $P(\text{Basto} \cup \text{Figura}) = 10/40 + 16/40 - 4/40 = 22/40 = 11/20$.

Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo:

- Tenemos una bolsa con 3 bolas rojas y 2 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar una bola roja*? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de *sacar dos bolas rojas*?

La probabilidad de sacar una bola roja es 3/5. Pero la de sacar dos bolas rojas, ¡depende!

Depende de si volvemos a meter en la bolsa la primera bola roja, o si la dejamos fuera.

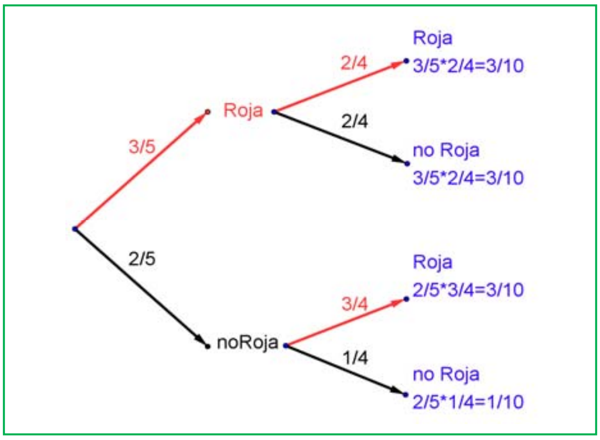
En el primer caso decimos que es **con reemplazamiento** y en el segundo, **sin reemplazamiento**.

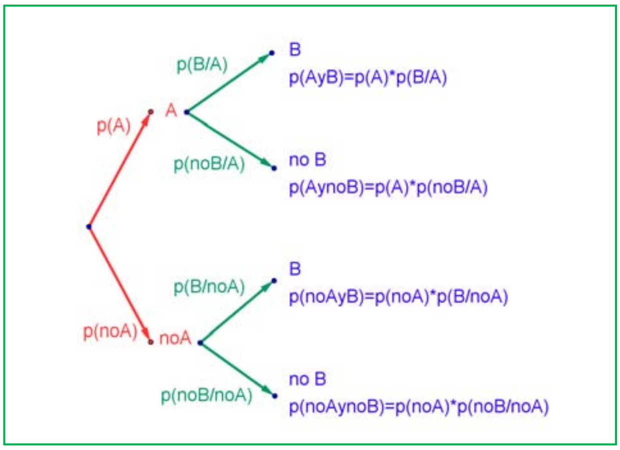
Si la volvemos a meter, la probabilidad de sacar bola roja volverá a ser 3/5, y la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 3/5 · 3/5 = 9/25. La probabilidad de esta segunda bola *no depende* de lo que ya hayamos sacado, y en este caso la probabilidad se obtiene multiplicando.

Si los sucesos A y B son **independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$**.

Pero si la dejamos fuera, ahora en la bolsa sólo hay 4 bolas y de ellas sólo quedan 2 bolas rojas, luego la probabilidad de que esa segunda bola sea roja es 2/4, y está condicionada por lo que antes hayamos sacado. Se escribe: $P(\text{Roja/Roja})$ y se lee *"probabilidad de Roja condicionado a haber sacado Roja"*. La probabilidad de sacar dos bolas rojas es ahora: 3/5 · 2/4 = 6/20 = 3/10.

Observa el diagrama de árbol y comprueba que la probabilidad de sacar primero una bola roja y luego una bola negra (no Roja) es 3/5 · 2/4 = 3/10 pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 4 bolas y de ellas 2 son negras. La probabilidad de sacar primero una bola negra (no Roja) y luego bola Roja es 2/5 · 3/4 = 6/20 = 3/10, y la de sacar dos bolas negras es: 2/5 · 1/4 = 2/20 = 1/10.





Pero observa más cosas. Por ejemplo, sumando las probabilidades de *Roja* y *noRoja* se obtiene: 3/5 + 2/5 = 1; y lo mismo en las otras ramas del árbol: 2/4 + 2/4 = 1; 3/4 + 1/4 = 1; e incluso sumando todas las probabilidades finales: 3/10 + 3/10 + 3/10 + 1/10 = 1.

Los sucesos son dependientes. El que ocurra A, o no ocurra A, afecta a la probabilidad de B. Por eso se dice que B **está condicionado** a A.

Si los sucesos A y B son **dependientes** entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Actividades resueltas

- *Sacamos dos cartas de una baraja de* 40 *cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases?*

Si fuera con reemplazamiento la probabilidad sería 4/40 · 4/40, pero al ser sin reemplazamiento la probabilidad del segundo *as* viene condicionada por que hayamos sacado un as previamente. Ahora en la baraja ya no quedan 40 cartas sino 39, y no quedan 4 ases sino sólo 3, luego la probabilidad es:

4/40 · 3/39 = 1/130.

Observa que:

Si dos sucesos son **dependientes** entonces: $P(B/A) \neq P(B)$.

Pero si dos sucesos son **independientes** entonces: $P(B/A) = P(B/\bar{A}) = P(B)$.

Por tanto la expresión: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ **es general, ya que si los sucesos son independientes entonces** $P(B/A) = P(B)$ **y por tanto** $P(A \cap B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$.

Resumen:

Suceso contrario: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Intersección: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ **Si** A **y** B **son independientes** $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **Si** A **y** B **son incompatibles** $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

18. Haz un diagrama en árbol similar al anterior en tu cuaderno con los sucesos A y B: A = *sacar un as* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar as*, y B = *sacar un as* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar as en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

19. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *ases*" y la de "*no sale ningún as*".

20. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

21. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que $P(A)$ = 5/36 (*casos favorables*: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que $P(B)$ = 8/36 (*casos favorables*: (1, 3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla:

(a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos. (b) La probabilidad de que no ocurra B. (c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B. (d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.
Selectividad. Septiembre 96

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B. (a) ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto B? (b) Sabiendo que un cliente ha comprado A, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado C pero no B?
Selectividad. Curso 96/97

26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A)$ = 1/3, $P(B)$ =1/5 y $P(AUB)$ = 7/15, hallar: (a) La probabilidad de que se verifique A y B. (b) La probabilidad de que se verifique A y no B. (c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B. (d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B. Selectividad. Septiembre 97.

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A)=\frac{3}{4}, P(B)=\frac{1}{2}, P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{20}$ Calcular: $P(A\cup B), P(A\cap B), P(\overline{A}/B), P(\overline{B}/A)$.
Selectividad. Septiembre 07

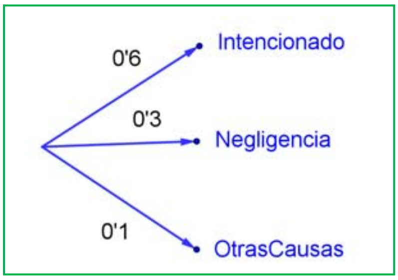
28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A)$ = $\frac{1}{3}$, $P(B/A)$ = $\frac{1}{4}$, $P(A$ U $B)$ = $\frac{1}{2}$. Calcula razonadamente: (a) $P(A \cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\overline{B}/A)$ (d) $P(\overline{A}/\overline{B})$. *Nota.* $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S/T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.
Selectividad. Septiembre 2012

1.4. Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Diagramas de árbol

Ejemplo:

- *Se hace un estudio sobre los incendios y se comprueba que en una determinada zona el* 60 % de los incendios son intencionados, un 30 % se deben a negligencias y 10 % a causas naturales como rayos o a otras causas. Represta esta situación con un diagrama de árbol.



Actividades resueltas

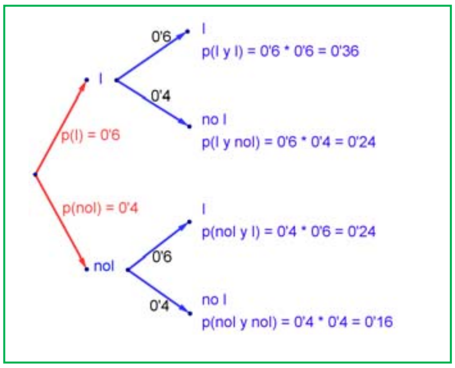
- *Si consideramos que la probabilidad de que un incendio sea intencionado es* 0’6, *¿cuál es la probabilidad de que al considerar dos incendios, al menos uno haya sido intencionado?*

Llamamos I al suceso “ser intencionado” y $\bar{I}$ = no$I$ al suceso “no ser intencionado”. Representamos la situación en un diagrama de árbol. Como el que un incendio sea intencionado es independiente de cómo sea el segundo, tenemos que:

$$P(I, I) = 0'6 \cdot 0'6 = 0'36$$

$$P(I, \bar{I}) = 0'6 \cdot 0'4 = 0'24$$

ya que es la probabilidad de que el primer incendio sea intencionado y el segundo no.



$$P(\bar{I}, I) = 0'4 \cdot 0'6 = 0'24$$

$$P(\bar{I}, \bar{I}) = 0'4 \cdot 0'4 = 0'16$$

La probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado la podemos calcular sumando las probabilidades de (I, I), $(I, \bar{I})$, y $(\bar{I}, I)$ que es 0’36 + 0’24 + 0’24 = 0’84. Pero más sencillo es calcular la probabilidad del suceso contrario P(no$I$, no$I$) = $P(\bar{I}, \bar{I})$ = 0’16 y restarla de 1:

$$P(\text{al menos uno intencionado}) = 1 – 0'16 = 0'84.$$

Actividades propuestas

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I)$ = 0’6.

30. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A)$ = 0’96; $P(B)$ = 0’98 y $P(C)$ = 0’99. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

31. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0’3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Tablas de contingencia

Ejemplo:

- Se han estudiado 500 enfermos del hígado analizando por un procedimiento nuevo si las lesiones son benignas o malignas. Luego se les volvió a analizar por el procedimiento usual determinando qué diagnósticos habían sido correctos y cuáles incorrectos. Los valores obtenidos se representan en la tabla:

	Diagnóstico correcto	**Diagnóstico incorrecto**	**Totales**
Lesión maligna	206	12	218
Lesión benigna	268	14	282
Totales	474	26	500

Determinamos la tabla de frecuencias relativas:

	Diagnóstico correcto (C)	**Diagnóstico incorrecto (I)**	**Totales**
Lesión maligna (M)	0’412	0’024	0’436
Lesión benigna (B)	0’536	0’028	0’564
Totales	0’948	0’052	1

Actividades resueltas

- *Imagina que estas frecuencias relativas pudieran tomarse como probabilidades. Interpreta entonces el significado de cada uno de estos valores.*

  0’412 sería la probabilidad de que el diagnóstico de lesión maligna fuese correcto: $P(M \cap C)$.

  0’024 = $P(M \cap I)$; 0’536 = $P(B \cap C)$; 0’028 = $P(B \cap I)$.

  ¿Y 0’436? El número de lesiones malignas es 218, luego 0’436 = $P(M)$.

  Del mismo modo: 0’564 = $P(B)$; 0’948 = $P(C)$; 0’052 = $P(I)$.

  Observa que $P(M) + P(B) = 1$ y que $P(C) + P(I) = 1$. Son sucesos contrarios.

- *¿Son dependientes o independientes los sucesos M y C?*

Solución:

$P(M \cap C) = P(M) \cdot P(C/M)$, por tanto: 0’412 = 0’436 · $P(C/M)$, de donde $P(C/M)$ = 0’412/0’436 = 0’945 que es distinto de 0’948 que es la probabilidad de C. Se puede afirmar que M y C son dependientes ya

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

que $P(C/M) \neq P(C)$. Pero si redondeamos a dos cifras decimales $P(C/M)$ = 0'95 = $P(C)$, y en este caso consideramos que son sucesos independientes.

En general se denomina **tabla de contingencias** a:

	A	No A = $\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
No B = $\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

En una tabla de contingencia figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos compuestos.

Observa que:

Como sabemos por la probabilidad del suceso contrario:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ y } P(B) + P(\overline{B}) = 1.$$

Observa también que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}), \text{ del mismo modo que } P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

pues se obtienen sumando respectivamente la primera columna y la primera fila.

También:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \text{ y } P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Actividades propuestas

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	**Accidente en zona urbana (U)**	**Totales**
Accidente con víctimas (V)	0'27		0'56
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0'58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Los diagramas de árbol y las tablas de contingencia están relacionados. Dado un árbol puedes obtener una tabla de contingencia, y viceversa. Tiene interés esta relación pues con los datos del problema a veces es más sencillo construir uno de ellos y dar la solución pasando al otro.

Actividades resueltas

- *Dada la tabla de contingencia, obtener el diagrama de árbol que comienza con A y no$A$ = $\overline{A}$.*

	A	No A = $\overline{A}$	
B	2/9	5/9	7/9
No B = $\overline{B}$	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

Conocemos la $P(A)$ = 3/9 = 1/3, $P(\overline{A})$ = 6/9 = 2/3, $P(B)$ = 7/9 y $P(\overline{B})$ = 2/9.

También conocemos $P(A \cap B)$ = 2/9; $P(A \cap \overline{B})$ =1/9; $P(\overline{A} \cap B)$ = 5/9 y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 1/9.

Nos falta conocer $P(B/A)$ que podemos obtener dividiendo $P(A \cap B)$ entre $P(A)$:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = 2/9 : 3/9 = 2/3.$$

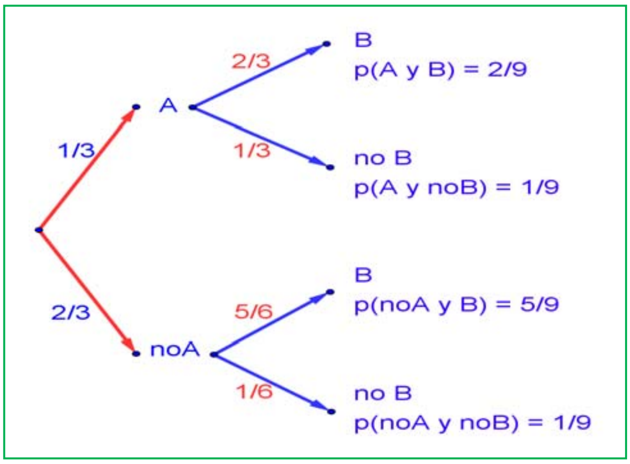
Del mismo modo calculamos:

$$P(\overline{B}/A) = P(A \cap \overline{B})/P(A) = 1/9 : 3/9 = 1/3$$

$$P(B/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)/P(\overline{A}) = 5/9 : 6/9 = 5/6$$

$$P(\overline{B}/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})/P(\overline{A}) = 1/9 : 6/9 = 1/6.$$

El árbol es:



Actividades resueltas

- *Recíprocamente, dado el diagrama de árbol obtener la tabla de contingencia:*

Ahora conocemos $P(A)$ = 0’3 y $P(\overline{A})$ = 0’7. Además conocemos $P(B/A)$ = 1/3; $P(B/\overline{A})$ = 6/7; $P(\overline{B}/A)$ = 2/3 y $P(\overline{B}/\overline{A})$ = 1/7.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Calculamos, multiplicando: $P(A \cap B)$ = 0'3·(1/3) = 0'1; $P(A \cap \overline{B})$ = 0'3·(2/3) = 0'2; $P(\overline{A} \cap B)$ = 0'7·(6/7) = 0'6 y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 0'7·(1/7) = 0'1 que ponemos también en el árbol.

Rellenamos con estos datos una tabla de contingencia:

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0'1	0'6	
No B = $\overline{B}$	0'2	0'1	
	0'3	0'7	1

Calculamos, sumando, las casillas que nos faltan, $P(B)$ = 0'1 + 0'6 = 0'7 y $P(\overline{B})$ = 0'2 + 0'1 = 0'3.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0'1	0'6	0'7
No B = $\overline{B}$	0'2	0'1	0'3
	0'3	0'7	1

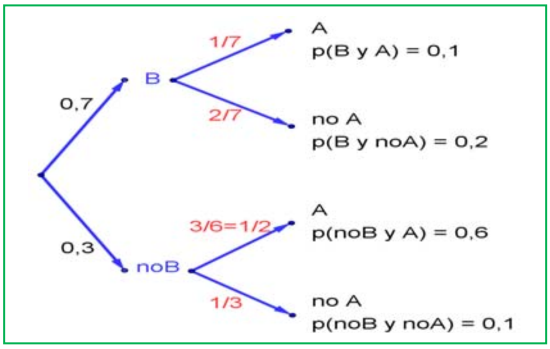
Puede ser muy interesante pasar de un diagrama de árbol a la tabla de contingencia y de ésta, al otro diagrama de árbol, con el que podemos conocer:

$P(A/B)$ = 0'1/0'7 = 1/7;

$P(\overline{A}/B)$ = 0'2/0'7 = 2/7;

$P(A/\overline{B})$ = 0'3/0'6 = 3/6 = 1/2;

$P(\overline{A}/\overline{B})$ = 0'1/0'3 = 1/3.

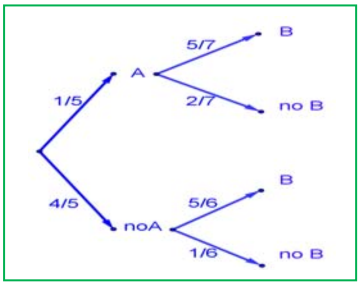


Actividades propuestas

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0'4	0'2	0'6
No B = $\overline{B}$	0'15	0'25	0'4
	0'55	0'45	1

36. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



37. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

38. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: $P(M/C)$

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: $P(\overline{M}/C)$.

39. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

(a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

(b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo? Selectividad Junio 94

40. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero. Selectividad Septiembre 2013

41. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista? Selectividad Septiembre 2013

42. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A. Selectividad Junio 2013

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Teoremas de la probabilidad total y teorema de *Bayes*

Thomas Bayes en 1763 enunció el teorema que lleva su nombre. Sirve para resolver problemas del tipo de la página inicial: "Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo. Calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis". Es decir permite calcular la probabilidad de A/B conociendo la probabilidad de B/A (o mejor, las probabilidades de B condicionado a un conjunto de sucesos A_i tales que son incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral). Vamos a enunciarlo, pero ¡no te asustes! ¡Ya sabes resolver problemas en los que se usa el Teorema de *Bayes*! ¡No hace falta que te aprendas la fórmula!

Previamente vamos a enunciar un teorema que también ya has usado, el teorema de la probabilidad total, que es como un paso intermedio del teorema de *Bayes*.

Enunciado del teorema de la probabilidad total

Sean $\{A_1, A_2, …, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)$$

Enunciado del teorema de Bayes

Sean $\{A_1, A_2, …, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$$

Vamos a comprobar que ya lo sabes con un ejemplo sencillo, que ya has resuelto en las actividades propuestas del apartado anterior.

Para resolver problemas tipo *Bayes* basta construir un diagrama de árbol, luego la tabla de contingencia asociada, y a continuación el otro diagrama de árbol.

Actividades resueltas

Antes de comprobar que SÍ sabes resolver problemas tipo *Bayes*, vamos a trabajar un poco la nomenclatura de las probabilidades condicionadas.

- *Escribe con símbolos las siguientes probabilidades:*

a) Sabemos que se ha verificado B, ¿cuál es la probabilidad de A? $\rightarrow P(A/B) = P(A \cap B) : P(A)$.

b) Probabilidad de B *y* $A \rightarrow P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B)$

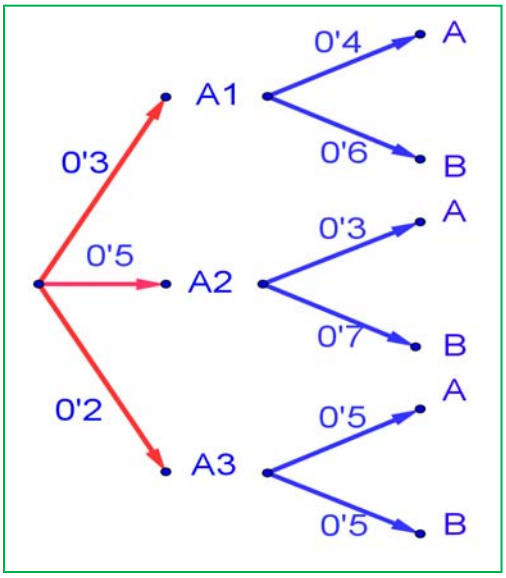
c) Ha salido una bola negra (A), probabilidad de que sea de la segunda urna (B) $\rightarrow P\ (B/A)$

d) Probabilidad de B *o* $A \rightarrow P(A \cup B) = P(B \cup A)$

e) El accidente ha sido en carretera (A), probabilidad de que haya sido mortal (B) $\rightarrow P\ (B/A)$

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

- *Tenemos un conjunto de sucesos* $\{A_1, A_2, A_3\}$ *tales que* $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, *y son incompatibles dos a dos. Conocemos sus probabilidades:* $P(A_1) = 0'3$, $P(A_2) = 0'5$, $P(A_3) = 0'2$. *Tenemos otros dos sucesos incompatibles,* A *y* B, *de los que conocemos las probabilidades condicionadas* $P(A/A_1) = 0'4$, $P(B/A_1) = 0'6$, $P(A/A_2) = 0'5$, $P(B/A_2) = 0'7$, $P(A/A_3) = 0'5$, $P(B/A_3) = 0'5$. *Queremos calcular* $P(A_1/B)$.



Confeccionamos un árbol con los datos que tenemos.

Ahora podemos calcular las probabilidades de las intersecciones. Ya sabes que:

$$P(A_1 \cap A) = P(A_1) \cdot P(A / A_1) = 0'3 \cdot 0'4 = 0'12$$

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18$$

$$P(A_2 \cap A) = P(A_2) \cdot P(A / A_2) = 0'5 \cdot 0'3 = 0'15$$

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B / A_2) = 0'5 \cdot 0'7 = 0'35$$

$$P(A_3 \cap A) = P(A_3) \cdot P(A / A_3) = 0'2 \cdot 0'5 = 0'10$$

$$P(A_3 \cap B) = P(A_3) \cdot P(B / A_3) = 0'2 \cdot 0'5 = 0'10$$

Llevamos estos resultados a la tabla de contingencia asociada:

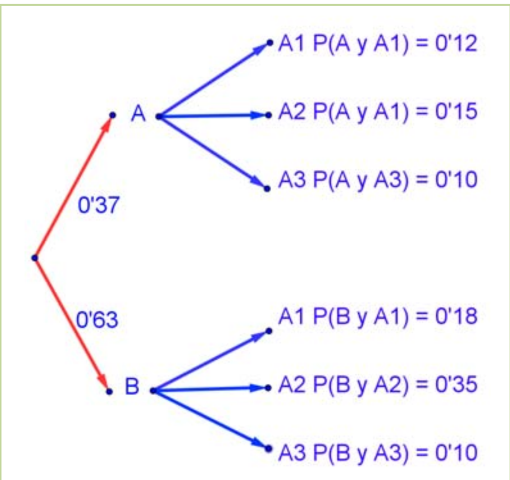
	A_1	A_2	A_2	
A	$P(A_1 \cap A) = 0'12$	$P(A_2 \cap A) = 0'15$	$P(A_3 \cap A) = 0'10$	$P(A) = 0'12+0'15+0'1= 0'37$
B	$P(A_1 \cap B) = 0'18$	$P(A_2 \cap B) = 0'35$	$P(A_3 \cap B) = 0'10$	$P(B)= 0'18+0'35+0'10=0'63$
	$P(A_1) = 0'12 + 0'18 = 0'3$	$P(A_2) = 0'15 + 0'35 = 0'5$	$P(A_3) = 0'10 + 0'10 = 0'2$	1

Sumando columnas comprobamos que no nos estamos equivocando en los cálculos pues las probabilidades que obtenemos: $P(A_1) = 0'12 + 0'18 = 0'3$; $P(A_2) = 0'15 + 0'35 = 0'5$ y $P(A_3) = 0'10 + 0'10 = 0'2$ son las conocidas.

Sumando por filas obtenemos las probabilidades:

$$P(A) = 0'12 + 0'15 + 0'1 = 0'37 \text{ y } P(B) = 0'18 + 0'35 + 0'10 = 0'63.$$

Con estas probabilidades podemos construir el otro árbol.



Ahora ya es posible calcular las otras probabilidades condicionadas, utilizando las probabilidades de la intersección y dividiendo:

$$P(A_1/A) = P(A_1 \cap A) : P(A) = 0'12/0'37 = 12/37$$

$$P(A_2/A) = P(A_2 \cap A) : P(A) = 0'15/0'37 = 15/37$$

$$P(A_3/A) = P(A_3 \cap A) : P(A) = 0'10/0'37 = 10/37$$

$$P(A_1/B) = P(A_1 \cap B) : P(B) = 0'18/0'63 = 18/63$$

$$P(A_2/B) = P(A_2 \cap B) : P(B) = 0'35/0'63 = 35/63$$

$$P(A_3/B) = P(A_3 \cap B) : P(B) = 0'10/0'63 = 10/63$$

La probabilidad pedida $P(A_1/B) = 18/63 = 2/7$.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Observa que:

Vamos a repasar los cálculos, para comprender mejor los teoremas de la probabilidad total y de Bayes.

Si miramos la tabla hemos obtenido $P(B)$ sumando la fila como:

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

Y las probabilidades de las intersecciones las hemos obtenido multiplicando en el árbol:

$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1)$… luego:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3).$$

Teorema de la probabilidad total: $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$

En el segundo árbol hemos obtenido $P(A_1/B)$ dividiendo $P(A_1 \cap B) : P(B)$. Para tener el teorema de Bayes basta sustituir de nuevo la probabilidad de la intersección por el producto, y utilizar el teorema de la probabilidad total:

$$P(A_1/B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$$

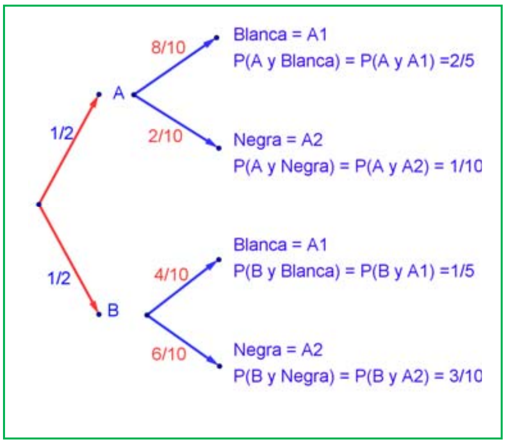
Teorema de *Bayes*: $P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$

- *Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?*

Debemos calcular $P(B/Negra)$.

Para que se parezca más al enunciado del teorema vamos a llamar a Blanca = A_1 y a Negra = A_2. El conjunto de sucesos $\{A_1, A_2\}$ verifica las condiciones del teorema de *Bayes*. Por tanto queremos calcular $P(B/A_2)$.

Podemos construir el árbol del margen. Por el enunciado conocemos las siguientes probabilidades.



Nos dicen que la elección de urna es al azar, por tanto $P(A) = P(B) = 1/2$.

Si sacamos una bola de la urna A sabemos que $P(Blanca/A) = P(A_1/A) = 8/10$, pues en la urna A hay 10 bolas de las que 8 son bolas blancas.

Del mismo modo sabemos:

$P(Negra/A) = P(A_2/A) = 2/10$;

$P(Blanca/B) = P(A_1/B) = 4/10$, y

$P(Negra/B) = P(A_2/B) = 6/10$.

Multiplicando calculamos las probabilidades de los sucesos compuestos:

$P(A \cap A_1) = 2/5$,

$P(A \cap A_2) = 1/10$,

$P(B \cap A_1) = 1/5$,

$P(B \cap A_2) = 3/10$.

Estos datos nos permiten construir la tabla de contingencia asociada:

	Blanca = A_1	**Negra = A_2**	
A	$P(A \cap A_1) = 2/5$	$P(A \cap A_2) = 1/10$	$P(A) = 2/5 + 1/10 = 1/2$
B	$P(B \cap A_1) = 1/5$	$P(B \cap A_2) = 3/10$	$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2$
	$P(A_1) = 2/5 + 1/5 = 3/5$	$P(A_2) = 1/10 + 3/10 = 4/10 = 2/5$	1

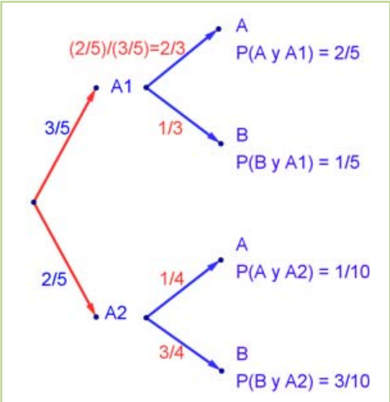
Observa que:

Se verifica el teorema de la probabilidad total:

$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2 = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2)$

En general, si hubiera un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se escribiría:

$$P(B) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)\cdot P(A_n)$$



Comprueba como en nuestro ejemplo se verifica esa ese teorema de la probabilidad total para $P(A)$, $P(B)$, P(Blanca) y P(Negra).

Y ahora construimos el otro diagrama de árbol. Conocemos $P(A_1) = 3/5$ y $P(A_2) = 2/5$, además de las probabilidades de las intersecciones, por lo que podemos calcular las probabilidades condicionadas, dividiendo:

Por ejemplo: $P(A/A_1) = P(A \cap A_1)/P(A_1) = (2/5)/(3/5) = 2/3$.

Con lo que tenemos resuelto nuestro problema pues:

$P(B$ / Negra$) = P(B/A_2) = 3/4$.

Vamos a comprobar que es el mismo resultado (y los mismos cálculos) que hubiéramos obtenido usando la expresión del teorema de *Bayes*:

$$P(B/A_2) = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2/A)\cdot P(A) + P(A_2/B)\cdot P(B)} = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(A_2 \cap A) + P(A_2 \cap B)} = \frac{3/10}{1/10 + 3/10} = \frac{3}{4}$$

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

43. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia. Selectividad

44. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

45. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar. Selectividad

46. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector. b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

Selectividad Junio 2013

47. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0'01, de que lo sea uno fabricado en B es 0'02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0'03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C. a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso. b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B? Selectividad Curso 2012/13

48. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso: Selectividad Curso. 2011/12

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

2. COMBINATORIA

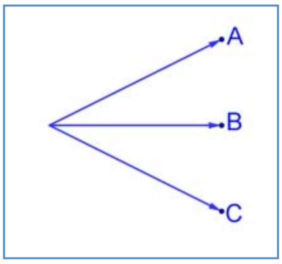
En 4º de ESO de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas ya estudiaste Combinatoria. Ahora vamos a ampliar ese estudio y utilizarlo en el cálculo de probabilidades.

2.1. Permutaciones u ordenaciones de un conjunto

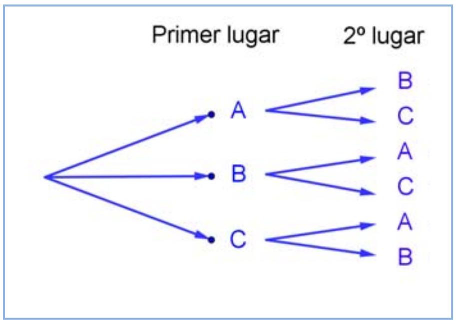
Diagrama en árbol

Actividades resueltas

- *En una fiesta se cuenta con tres grupos musicales que deben actuar. Para organizar el orden de actuación, ¿cuántas posibilidades distintas hay?*



Esta técnica que ya conoces, confeccionar un **diagrama en árbol,** nos va a ayudar mucho a resolver los problemas de combinatoria. Como sabes, consiste en una representación por niveles en la que cada rama representa una opción individual para pasar de un nivel al siguiente, de tal manera que todos los posibles recorridos desde la raíz hasta el último nivel, el nivel de las hojas, son todos los posibles resultados que se pueden obtener.



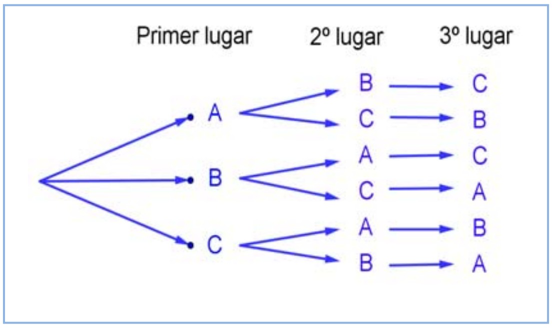
Llamamos a los tres grupos musicales A, B y C.

Primer nivel del árbol: En primer lugar podrán actuar o bien A, o bien B o bien C.

Segundo nivel del árbol: Una vez que el grupo A ha sido elegido para actuar en primer lugar, para el segundo puesto sólo podremos colocar a B o a C. Igualmente, si ya B va en primer lugar, sólo podrán estar en el segundo lugar A o C. Y si actúa en primer lugar C, para el segundo puesto las opciones son A y B.

Tercer nivel del árbol: Si ya se hubiera decidido que en primer lugar actúa el grupo A y en segundo el grupo B, ¿para el tercer lugar, que se puede decidir? Sólo nos queda el grupo C, y de la misma manera, en todos los otros casos, sólo queda una única posibilidad

Confeccionar el diagrama en árbol, incluso únicamente comenzar a confeccionarlo, nos permite contar con seguridad y facilidad. Para saber cuántas formas tenemos de organizar el concierto, aplicamos el principio de multiplicación: sólo tenemos que multiplicar los números de ramificaciones que hay en cada nivel: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas de organizar el orden de actuación de los grupos.



También permite escribir esas seis posibles formas sin más que seguir al árbol: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Actividades propuestas

49. En una carrera compiten 5 corredores y se van a repartir tres medallas, oro, plata y bronce. Haz un diagrama en árbol y comprueba que hay 60 formas distintas de repartir las medallas.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

50. Haz diagramas en árbol para calcular:

a) Cuántas palabras de dos letras (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C, todas distintas. ¿Y si pueden repetirse las letras?

b) Cuántas palabras de tres letras que empiecen por vocal y terminen por consonante se pueden formar con las letras del alfabeto. (*Recuerda* que hay 5 vocales y 22 consonantes).

51. Ana tiene 4 camisetas, 2 pantalones y 3 pares de zapatillas. ¿Puede llevar una combinación diferente de camiseta, pantalón y zapatilla durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir combinación? *Ayuda*: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema.

Permutaciones

Llamamos **permutaciones** a las posibles formas distintas en que se puede ordenar un conjunto de elementos distintos.

Cada cambio en el orden es una permutación.

Ejemplos:

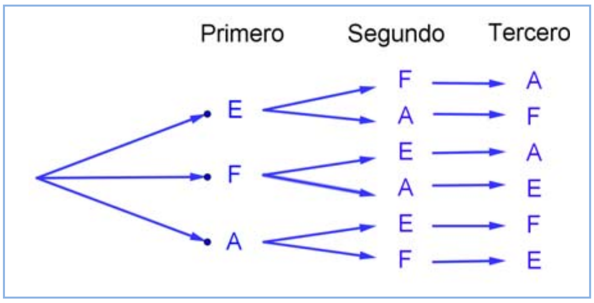
- *Son permutaciones:*
  - Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores.
  - Las palabras de cuatro letras, sin repetir ninguna letra, con o sin sentido que podemos formar con las letras de la palabra MESA.
  - Los números de 5 cifras distintas que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5.

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos se designa por P_n, y se lee *permutaciones de n elementos*.

La actividad resuelta de los tres grupos musicales que iban a actuar en una fiesta era de permutaciones, era una ordenación, luego lo escribiríamos como P_3, y se lee *permutaciones de 3 elementos*.

Actividades resueltas

- *En la fase preparatoria de un campeonato del mundo están en el mismo grupo España, Francia y Alemania. Indica de cuántas formas pueden quedar clasificados estos tres países.*



Son permutaciones de 3 elementos: P_3. Hacemos un diagrama de árbol. Pueden quedar primeros España (E), Francia (F) o Alemania (A). Si ha ganado España, pueden optar por el segundo puesto F o A. Y si ya hubiesen ganado España y luego Francia, para el tercer puesto sólo quedaría Alemania.

Pueden quedar de 3 · 2 · 1 = 6 formas distintas.

En general para calcular las permutaciones de n elementos se multiplica n por $n - 1$, y así, bajando de uno en uno, hasta llegar a 1: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. A este número se le llama factorial de n, y se indica $n!$

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Corresponde a un árbol de n niveles con n, $n-1$, $n-2$, ... , 3, 2, 1 posibilidades de elección respectivamente.

Para realizar esta operación con la calculadora se utiliza la tecla **!**

Ejemplos:

- Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores son:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$$

- Las palabras con o sin sentido que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra MESA son $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

- Los números de 5 cifras, todas distintas, que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5 son:

$$P_5 = 5! = 120.$$

- España, Francia y Alemania pueden quedar clasificados de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas.

Actividades propuestas

52. ¿De cuántas formas pueden repartirse cinco personas, cinco pasteles distintos, comiendo cada persona un pastel?

53. En una carrera de caballos participan cuatro caballos con los números 1, 2, 3 y 4. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número cuatro llegue el primero, ¿cuáles de ellos pueden llegar en segundo lugar? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

54. ¿De cuántas maneras puedes meter seis objetos distintos en seis cajas diferentes, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

55. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

56. En el año 1973 había seis países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

57. En una oficina de colocación hay siete personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Actividades resueltas

- *Cálculo de* $\frac{6!}{3!}$.

Cuando calculamos cocientes con factoriales siempre simplificamos la expresión, eliminando los factores del numerador que sean comunes con factores del denominador, antes de hacer las operaciones. En general siempre suele ser preferible simplificar antes de operar, pero en este caso resulta imprescindible, para que no salgan números demasiado grandes.

$$\text{Es } \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

- *Expresa, utilizando factoriales, los productos siguientes:* a) 10·9·8; b) (n+4)·(n+3)·(n+2);

  a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{10!}{7!}$

  b) $(n + 4) \cdot (n + 3) \cdot (n + 2) = \dfrac{(n+4)!}{(n+1)!}$

Actividades propuestas

58. Calcula: a) $\dfrac{5!}{4!}$; b) $\dfrac{8!}{3!}$; c) $\dfrac{9!}{5! \cdot 3!}$; d) $\dfrac{7!}{5!}$; e) $\dfrac{13!}{11!}$; f) $\dfrac{677!}{676!}$.

59. Calcula: a) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$; b) $\dfrac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\dfrac{(n+3)!}{(n+2)!}$; d) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$.

60. Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

61. Expresa utilizando factoriales: a) (n+3)·(n+2)·(n+1); b) n·(n+1)·(n+2)·(n+3); c) n·(n+1)·(n+2)·… ·(n+k).

62. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. (No lo calcules. El resultado es un número muy grande, para calcularlo se necesita un ordenador o una calculadora, y habría que recurrir a la notación científica para expresarlo de forma aproximada).

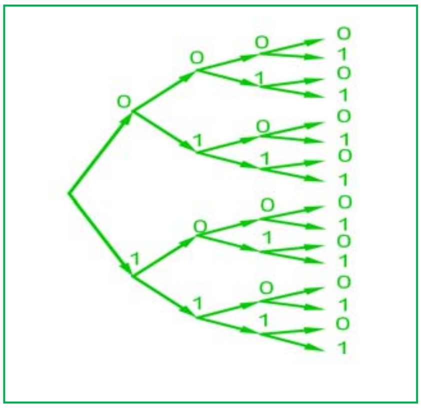
63. Nueve ciclistas circulan por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

64.

2.2. Variaciones con repetición

Ya sabes que las quinielas consisten en adivinar los resultados de 14 partidos de fútbol señalando un 1 si pensamos que ganará el equipo de casa, un 2 si gana el visitante y una X si esperamos que haya empate. En una misma jornada, ¿cuántas quinielas distintas podían rellenarse?

Observa que ahora cada diferente quiniela consiste en una secuencia de los símbolos 1, 2 y X, en las que el mismo símbolo puede aparecer varias veces **repetido** a lo largo de la secuencia y dos quinielas pueden diferenciarse por los **elementos** que la componen o por el **orden** en que aparecen. Antes de resolver este problema, resolveremos uno más fácil.



Actividades resueltas

- *Con dos símbolos,* 0 *y* 1*, ¿cuántas tiras de* 4 *símbolos se pueden escribir?*

Igual que en anteriores ejemplos, formamos el diagrama de árbol. Observando que en el primer lugar de la tira podemos poner los dos símbolos. En el segundo lugar, aunque hayamos puesto el 0, como se puede repetir, podemos volver a poner el 0 y el 1. Lo mismo en el tercer y en el cuarto lugar. Es decir, el número de ramificaciones no se va reduciendo, siempre es igual, por lo tanto el número de tiras distintas que podemos formar es

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Las diferentes secuencias de longitud n que se pueden formar con un conjunto de m elementos diferentes, se llaman **variaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n. El número de diferentes secuencias que se pueden formar se designa con la expresión $\mathrm{VR}_{m,n}$ y se calcula con la fórmula:

$$\mathbf{VR}_{m,n} = m^n$$

En la ***actividad resuelta*** anterior son variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4:

$$\mathrm{VR}_{2,4} = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Actividades resueltas

- En el cálculo del *número de quinielas distintas,* los elementos son 3 (1, 2, X) y se forman secuencias de longitud 14, por lo tanto se trata de *variaciones con repetición* de 3 elementos tomados de 14 en 14:

  $$\mathrm{VR}_{3,14} = 3^{14} = 4\ 782\ 969.$$

  Para tener la certeza absoluta de conseguir 14 aciertos hay que rellenar 4 782 969 apuestas simples.

- *La probabilidad de que te toque una quiniela en una apuesta simple es*, por tanto, $\frac{1}{4782969}$.

Actividades propuestas

65. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 4 cifras?

66. Con los 10 dígitos y las 22 consonantes del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando cuatro dígitos y tres letras?

67. Un byte u octeto es una secuencia de ceros y unos tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

68. Calcula: a) $\mathrm{VR}_{5,2}$; b) $\mathrm{VR}_{4,4}$; c) $\mathrm{VR}_{10,2}$; d) $\mathrm{VR}_{2,10}$.

69. Expresa con una fórmula:

a) Las variaciones con repetición de 4 elementos tomadas de 5 en 5.

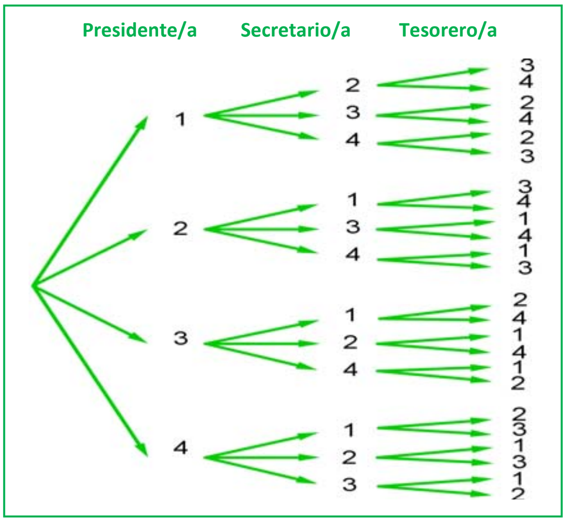
b) Las variaciones con repetición de 8 elementos tomadas de 2 en 2.

c) Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 4 en 4.

70. ¿Cuántas palabras de cuatro letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra S?

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Variaciones sin repetición



Actividades resueltas

- *Una asociación de vecinos va a renovar la junta directiva. Ésta consta de tres cargos, presidencia, secretaría y tesorería. a) Si únicamente se presentan cuatro personas. ¿De cuántas maneras puede estar formada la junta? b) Si, antes de que empiece la votación, se presentan otros dos candidatos, ¿cuántas juntas diferentes podrán formarse ahora?*

a) Confeccionamos nuestro diagrama en árbol. Numeramos los candidatos del 1 al 4. A la presidencia pueden optar los 4 candidatos, pero si un determinado candidato ya ha sido elegido para la presidencia, no podrá optar a los otros dos cargos, por lo que desde cada una de las primeras cuatro ramas, sólo saldrán tres ramas. Una vez elegida una persona para la presidencia y la secretaría, para optar a la tesorería habrá únicamente dos opciones, por lo cual de cada una de las ramas del segundo nivel, salen dos ramas para el tercer nivel.

De este modo, multiplicando el número de ramificaciones en cada nivel, tenemos que la junta puede estar formada de 4 · 3 · 2 = 24 maneras.

b) Si en lugar de 4 candidatos fuesen 6, podría estar formada de 6 · 5 · 4 = 120 maneras.

Estas agrupaciones de elementos, en que un elemento puede aparecer en cada grupo como máximo una vez, sin repetirse, y cada grupo se diferencia de los demás por los elementos que lo componen o por el orden en que aparecen se denominan *variaciones sin repetición*.

En las variaciones, tanto con repetición como sin repetición, se tienen en cuenta el **orden** y los **elementos** que forman el grupo. La diferencia es que en las variaciones con repetición pueden repetirse los elementos y en las variaciones ordinarias no. En el ejemplo anterior no tendría sentido que un mismo candidato ocupara dos cargos, **no se repiten los elementos**.

Las **variaciones sin repetición** (o simplemente **variaciones**) de m elementos tomados de n en n se designan como $V_{m,n}$. Son los grupos de n elementos distintos que se pueden formar de modo que un grupo se diferencie de otro bien por los **elementos** que lo componen bien por el **orden** en que aparecen.

El número de variaciones es igual al producto de multiplicar n factores partiendo de m y decreciendo de uno en uno:

$$\mathbf{V}_{m,n} = \boldsymbol{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots} \ (n \text{ factores})$$

Observaciones

1) m debe ser siempre mayor o igual que n.
2) Las variaciones de m elementos tomados de m en m coinciden con las permutaciones de m elementos: $V_{m,m} = P_m$.

Actividades resueltas

- *Observa las siguientes variaciones e intenta encontrar una expresión para el último factor que se multiplica en el cálculo de las variaciones:*

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

  b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

  c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

  d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

En el caso a) 2 es igual a 4 – 3 + 1.

En b) 4 = 6 – 3 + 1.

En c) 5 = 10 – 6 + 1.

En d) 6 = 9 – 4 + 1.

En general el último elemento es $(m - n + 1)$.

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}$$

- *Escribe la fórmula de las variaciones utilizando factoriales:*

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!}$

  b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

  c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$

  d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$

Para escribirlo como cociente de factoriales se debe dividir por $(m-n)!$.

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Para realizar esta operación con la *calculadora* se utiliza la tecla etiquetada ***nPr***

Actividades propuestas

71. Cuatro personas van a una pastelería en la que únicamente quedan cinco pasteles, distintos entre sí. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

72. Con los 10 dígitos se desean escribir números de seis cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la primera cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la segunda? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la tercera? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

73. Si tienes 11 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 4 en 4 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

74. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

75. Con los dígitos 3, 5, 7, 8 y 9, ¿cuántos números de 4 cifras distintas puedes formar?

76. Calcula: a) $V_{10,6}$; b) $V_{9,5}$; c) $V_{7,4}$.

77. Calcula: a) $\frac{6!}{3!}$; b) $\frac{8!}{4!}$; c) $\frac{11!}{8!}$.

Otra observación

Hemos dicho que $V_{m,m} = P_m$ pero si utilizamos la fórmula con factoriales tenemos que:

$$V_{m,m} = P_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!}.$$

Para que tenga sentido se asigna a 0! el valor de 1.

0! = 1.

2.4. Combinaciones

Actividades resueltas

- *En una librería quieren hacer paquetes de tres libros, usando los seis libros más leídos. ¿Cuántos paquetes diferentes podrán hacer?*

En este caso cada grupo de tres libros se diferenciará de los otros posibles por los libros (**elementos**) que lo componen, sin que importe el orden en que estos se empaquetan. A esta agrupación se la denomina combinación.

Se llama **combinaciones** de m elementos tomados de n en n y se designa $C_{m,n}$ a los grupos de n elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de m elementos diferentes entre sí, de modo que cada grupo se diferencie de los demás por los **elementos** que lo forman (no por el orden en que aparecen).

Designamos los libros con las letras A, B, C, D, E y F.

Paquetes con A	Paquetes sin A pero con B	Paquetes sin A ni B pero con C	
ABC	BCD	CDE	
ABD ACD	BCE BDE	CDF CEF	DEF
ABE ACE ADE	BCF BDF BEF		
ABF ACF ADF AEF			

Hemos formado primero todos los paquetes que contienen el libro A, hay 10; Luego seguimos formando los que no contienen el libro A pero si contienen el B. Luego los que no contienen ni A ni B pero sí C. Y por último, el paquete DEF que no contiene los libros A, B ni C. Con este recuento hemos identificado un total de 20 paquetes distintos. $C_{6,3} = 20$.

Esta forma de hacerlo es poco práctica. Para encontrar una fórmula general que nos permita calcular el número de grupos, vamos a apoyarnos en lo que ya sabemos.

Si fuera relevante el orden en que aparecen los libros en cada paquete, además de los libros que lo componen, sería un problema de variaciones y calcularíamos: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diferentes:

ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC, ADE, ADF, AEB, AEC, AED, AEF, AFB, AFC, AFD, AFE,
BAC, BAD, BAE, BAF, BCA, BCD, BCE, BCF, BDA, BDC, BDE, BDF, BEA, BEC, BED, BEF, BFA, BFC, BFD, BFE,
CAB, CAD, CAE, CAF, CBA, CBD, CBE, CBF, CDA, CDB, CDE, CDF, CEA, CEB, CED, CEF, CFA, CFB, CFD, CFE,
DAB, DAC, DAE, DAF, DBA, DBC, DBE, DBF, DCA, DCB, DCE, DCF, DEA, DEB, DEC, DEF, DFA, DFB, DFC, DFE,
EAB, EAC, EAD, EAF, EBA, EBC, EBD, EBF, ECA, ECB, ECD, ECF, EDA, EDB, EDC, EDF, EFA, EFB, EFC, EFD,
FAB, FAC, FAD, FAE, FBA, FBC, FBD, FBE, FCA, FCB, FCD, FCE, FDA, FDB, FDC , FDE, FEA, FEB, FEC, FED.

En la lista anterior hemos señalado con el mismo color algunos de los paquetes que contienen los mismos tres libros, verás que el paquete con los libros A, B y C se repite seis veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Las mismas veces se repite el paquete ABD, el ACF, etc. Puedes probar a señalar cualquier otra combinación y verás que todas están repetidas exactamente seis veces. Ello es debido a que hay seis variaciones posibles con la misma composición de elementos, que se diferencian por el orden (las permutaciones de esos tres elementos que son $P_3 = 6$). Así pues, como en el recuento de variaciones, cada paquete está contado $P_3 = 6$ veces. Para saber el número de paquetes diferentes dividimos el total de variaciones entre $P_3 = 6$.

Por tanto basta con dividir las variaciones entre las permutaciones:

$$C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20.$$

Y, en general, de acuerdo con el mismo razonamiento se calculan las combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*, dividiendo las variaciones entre las permutaciones, con la fórmula:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Para realizar esta operación con la calculadora se utiliza la tecla etiquetada ***nCr***

Actividades resueltas

- *Un test consta de* 10 *preguntas y para aprobar hay que responder* 6 *correctamente. ¿De cuántas formas se pueden elegir esas* 6 *preguntas?*

No importa en qué orden se elijan las preguntas, sino cuáles son las preguntas elegidas. No pueden repetirse (no tiene sentido que respondas 3 veces la primera pregunta). Únicamente influyen las preguntas (los elementos). Se trata de un problema de combinaciones, en que tenemos que formar grupos de 6, de un conjunto formado por 10 preguntas diferentes, luego son combinaciones, $C_{10,6}$.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210 \text{ maneras.}$$

- *Tenemos 5 libros sin leer y queremos llevarnos tres para leerlos en vacaciones, ¿de cuántas maneras distintas podemos elegirlos?*

Son combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. $C_{5,3} = 10$ formas.

- *Tienes 7 monedas de euro que colocas en fila. Si 3 muestran la cara y 4 la cruz, ¿de cuántas formas distintas puedes ordenarlas?*

Bastará con colocar en primer lugar las caras y en los lugares libres poner las cruces. Tenemos 7 lugares para colocar 3 caras, serán por lo tanto las combinaciones de 7 elementos tomados de 3 en 3. $C_{7,3} = 35$. Observa que se obtiene el mismo resultado si colocas las cruces y dejas los lugares libres para las caras ya que $C_{7,4} = 35$.

Actividades propuestas

78. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

79. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

80. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

2.5. Números combinatorios

Las combinaciones son muy útiles, por lo que su uso frecuente hace que se haya definido una expresión matemática denominada número combinatorio.

El **número combinatorio** m sobre n se designa $\binom{m}{n}$ y es igual a:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Propiedades de los números combinatorios

Actividades resueltas

- *Calcula* $\binom{7}{0}, \binom{5}{0}, \binom{9}{0}, \binom{4}{0}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{0} = 1$, $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{9}{0} = 1$ y $\binom{4}{0} = 1$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{0} = 1$? En efecto:

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!\cdot 0!} = 1.$$

Recuerda que 0! = 1.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

- *Calcula* $\binom{7}{7}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{4}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{7}$ = 1, $\binom{5}{5}$ = 1, $\binom{9}{9}$ = 1 y $\binom{4}{4}$ = 1. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{m}$ = 1? En efecto:

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)!\cdot m!} = \frac{m!}{0!\cdot m!} = 1.$$

Recuerda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{1}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{9}{1}$, $\binom{4}{1}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{1}$ = 7, $\binom{5}{1}$ = 5, $\binom{9}{1}$ = 9 y $\binom{4}{1}$ = 4. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{1}$ = m? En efecto:

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)!\cdot 1!} = m.$$

- *Calcula* $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{9}{7}$, $\binom{9}{2}$ *e indica cuáles son iguales.*

Habrás comprobado que: $\binom{7}{4}$ = $\binom{7}{3}$ y que $\binom{9}{7}$ = $\binom{9}{2}$. Razona el motivo. Podemos generalizar y decir que:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

En efecto: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Hasta ahora todas las propiedades han sido muy fáciles. Tenemos ahora una propiedad más difícil. Veamos que: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Pero antes lo comprobaremos con un problema.

- *Luis y Miriam se han casado y les han regalado seis objetos de adorno. Quieren poner tres en una estantería, pero Miriam quiere que en la estantería esté, sí o sí, el regalo de su madre. Sin embargo, a Luis no le gusta ese objeto, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. Uno de los dos se saldrá con la suya. Calcula cuantas son las posibilidades de cada uno.*

A Luis y Miriam les han regalado 6 objetos de adorno y quieren poner 3 en una estantería. Las formas de hacerlo con $C_{6,3} = \binom{6}{3}$.

Pero Miriam quiere que en la estantería esté, sí o sí, el regalo de su madre. ¿De cuántas formas lo haría Miriam? Son $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

Sin embargo a Luis, ese objeto no le gusta, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. ¿De cuántas formas lo haría Luis? Son $C_{5,3} = \binom{5}{3}$.

Las opciones de Miriam más las de Luis son las totales: $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$.

- *Comprueba que* $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$ *y que* $\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$.

En general,

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

¿Te atreves a demostrarlo?

Para ***demostrarlo*** recurrimos a la definición y realizamos operaciones:

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-1))!\cdot (n-1)!}$$ reducimos a común denominador

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)\cdot(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{n\cdot(m-n)!\cdot(n-1)!}$$ Recuerda: $m\cdot(m-1)! = m!$

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ Ponemos el denominador común y sumamos los numeradores

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)! + n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ Sacamos $(m-1)!$ factor común

$$= \frac{(m-n+n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ De nuevo usamos que $m\cdot(m-1)! = m!$

$$= \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \binom{m}{n}.$$

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Triángulo de *Pascal* o Triángulo de *Tartaglia*

A un matemático italiano del siglo XVI, llamado *Tartaglia* pues era tartamudo, se le ocurrió disponer a los números combinatorios así:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

....

O bien calculando sus valores correspondientes:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

...

A ambos triángulos se les llama **Triángulo de *Pascal*** o **Triángulo de *Tartaglia***.

Los valores que hay que poner en cada fila del triángulo se calculan, sin tener que usar la fórmula de los números combinatorios, de una forma más fácil basada en las propiedades de los números combinatorios que acabamos de probar:

Por la propiedad $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$, cada fila empieza y termina con 1.

Por la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, sabemos que el *Triángulo de Tartaglia* es simétrico o sea que el primer elemento de cada fila coincide con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente.

Por la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$, podemos obtener las siguientes filas sumando términos de la anterior, ya que cada posición en una fila es la suma de las dos que tiene justo encima de la fila anterior.

De este modo el triángulo se construye secuencialmente, añadiendo filas por abajo hasta llegar a la que nos interesa. Si sólo necesitamos conocer un número combinatorio aislado, tal vez no valga la pena desarrollar todo el triángulo, pero en muchas ocasiones necesitamos conocer los valores de toda una fila del triángulo (por ejemplo cuando desarrollamos un binomio de Newton, o cuando resolvemos problemas de probabilidad).

Actividades propuestas

81. Añade tres filas más al triángulo de *Tartaglia* de la derecha.

82. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de los elementos de la fila m es siempre igual a 2^m.

83. Sin calcularlos, indica cuánto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ y $C_{5,5}$ buscando su valor en el triángulo.

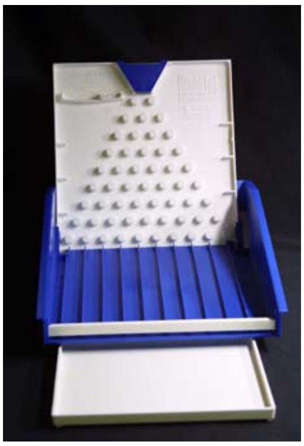
1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

2.6. Distribución binomial

Recorridos aleatorios o caminatas al azar

Los números combinatorios sirven como modelo para resolver situaciones muy diversas.

Actividades resueltas



El dispositivo que aparece a la izquierda se denomina *aparato de Galton*. Su funcionamiento es el siguiente: cuando se introduce una bola por el embudo superior, va cayendo por los huecos que existen en cada fila. En cada paso puede caer por el hueco que tiene a su derecha o por el que tiene a su izquierda con igual probabilidad, de forma que es imposible, cuando ponemos una bola en el embudo predecir en cuál de los carriles inferiores acabará cayendo.

- *Si introducimos muchas bolas por el agujero superior, por ejemplo* 1024*, ¿crees que al llegar abajo se distribuirán uniformemente entre todos los carriles o habrá lugares a los que lleguen más bolas?*

Observa que para llegar a la primera fila, sólo hay un camino posible, que es el que va siempre hacia la izquierda, y para llegar a la última, el único camino posible es el que va siempre a la derecha.

Mientras que para llegar a los huecos centrales de cada fila el número de caminos posibles es mayor. Por ejemplo, para llegar al segundo hueco de la segunda fila, hay dos caminos. En general, al primer hueco de cada fila sólo llega un camino, igual que al último y a cada uno de los otros huecos llegan tantos caminos como la suma de los caminos que llegan a los dos huecos que tiene justo encima. Comprueba que para llegar al hueco n de la fila m hay $\binom{m}{n}$ caminos.

En resumen, el número de caminos aleatorios que llegan a cada hueco se calcula igual que los números en el triángulo de *Tartaglia*. Si nuestro *aparato de Galton* tiene 9 filas, el número de caminos que llegan a cada uno de los compartimentos de salida es el que se obtiene con la novena fila del Triángulo de *Tartaglia*: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1, de un total de $2^9 = 512$ caminos diferentes que puede realizar la bola. Así que cuando echamos en el aparato 1024 bolas, habrá aproximadamente 2 bolas que hagan cada uno de los 512 recorridos posibles, ya que todos tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Por tanto el número de bolas que podemos esperar que caigan en cada compartimento es el siguiente:

Compartimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número aproximado de bolas	$\frac{1024}{512}=2$	9·2 = 18	36·2 = 72	84·2 = 168	126·2 = 252	126·2 = 252	84·2 = 168	36·2= 72	9·2 = 18	2

Vemos que no se deposita el mismo número de bolas en todos los compartimentos. Mientras que en los extremos habrá aproximadamente 2 bolas, en los centrales habrá unas 252.

De acuerdo con ley de los grandes números, los resultados experimentales serán más parecidos a los teóricos cuanto mayor sea el número de veces que se realiza el experimento (es decir, cuanto mayor sea el número de bolas). En *Youtube* buscando la expresión "*máquina de Galton*" puedes ver muchos vídeos en que se realiza el experimento y se verifica este hecho.

Número de éxitos

Actividades resueltas

- *En una sesión de tiro al plato se realizan sucesivamente 10 disparos. ¿Cuántas posibilidades habrá de acertar en el blanco exactamente tres veces (tener tres éxitos)?*

Son las $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$.

En resumen

$\binom{m}{n}$ = Número de combinaciones de m elementos tomados de n en n

= Número de caminos posibles para llegar al hueco n de la fila m del aparato de *Galton*

= Número de subconjuntos de n elementos tomados en un conjunto de m elementos

= Número de sucesos en los que obtenemos n éxitos en m pruebas

= Números de muestras sin ordenar de tamaño n en una población de tamaño m.

2.7. Binomio de Newton

Vamos a calcular las sucesivas potencias de un binomio. Ya sabes que:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Para calcular $(a+b)^4$ multiplicamos $(a+b)^3$ por $(a+b)$.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3\cdot(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\cdot(a+b)$$
$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 +$$
$$+ \quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$
$$= \quad a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Observa que para hallar cada uno de los coeficientes de $(a + b)^4$, excepto el primero y el último que valen 1, se suman los coeficientes igual que en el triángulo de *Tartaglia*. Se obtiene cada elemento sumando los dos que tiene encima.

Actividades resueltas

- *¿Serías capaz de calcular* $(a + b)^5$ *sólo observando?*

Fíjate que siempre aparecen todos los posibles términos del grado que estamos calculando, por lo que para calcular la quinta potencia tendremos: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5. Los exponentes están ordenados de manera que los de *a* van descendiendo desde 5 hasta 0, y los de *b* van aumentando desde 0 hasta 5 (recuerda $a^0 = 1$).

El coeficiente del primer y último término es 1.

Los coeficientes se obtienen sumando los de los términos de la fila anterior, como en el Triángulo de *Tartaglia*. Son la quinta fila del Triángulo de *Tartaglia*.

Luego $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Podemos escribirlo también utilizando números combinatorios:

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Actividades propuestas

84. Desarrolla $(a + b)^6$

En general:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Esta igualdad se denomina ***Binomio de Newton***.

Actividades resueltas

- *¿Cómo calcularías* $(a - b)^n$*?*

Basta aplicar la fórmula del Binomio de Newton a $(a + (-b))^n$.

Recuerda $(-b)$ elevado a un exponente par tiene signo positivo y elevado a un exponente impar lo tiene negativo. Por tanto:

$$(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b^n.$$

Los signos son alternativamente positivos y negativos.

Actividades propuestas

85. Desarrolla

a) $(a - b)^6$;

b) $(x - 3)^4$;

c) $(x + 2)^7$;

d) $(-x + 3)^5$.

86. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

87. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

2.8. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades

- *¿Sabes jugar al póker? Se reparten 5 cartas y puede haber distintas jugadas: parejas, tríos, dobles parejas, póker… Calcula la probabilidad de obtener un póker de ases servido.*

Para resolver problemas de probabilidad utilizando la regla de *Laplace*, podemos contar los casos favorables y los posibles haciendo uso de la combinatoria.

Cálculo de los casos posibles:

¿De cuántas maneras se pueden recibir las 5 cartas? ¿Importa el orden? ¿Y los elementos? Son combinaciones:

$$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{35! \cdot 5!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 658008$$

Cálculo de los casos favorables:

Para tener un póker de ases servido nos tienen que repartir {As, As, As, As, Otra carta}. Igual que antes, no importa el orden, sólo los elementos. En la baraja sólo hay 4 ases, que están fijos, y la otra carta puede ser cualquiera de las 40 – 4 cartas restantes.

Regla de Laplace:

$$\text{P(Poker de ases servido)} = \frac{36}{658008} = 0'0000547$$

Juan está de suerte, en 10 partidas ha sacado 5 pókeres de ases seguidos. ¿Crees que hace trampas?

- *Calcula la probabilidad de sacar póker*

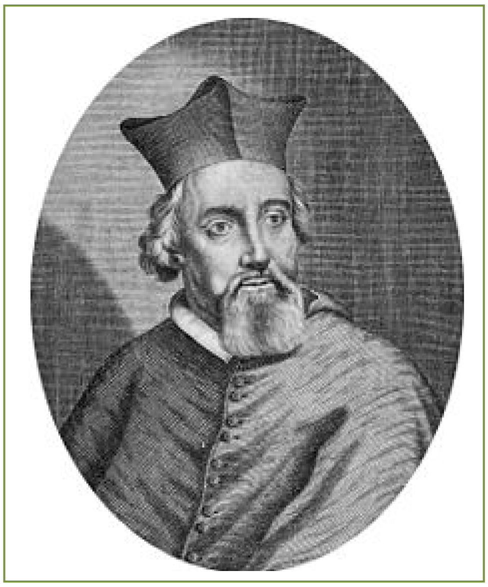
Ya conocemos los casos posibles, $C_{40,5}$ = 658008. Debemos calcular los casos favorables. ¿Cuántas jugadas hay que sean póker? Son póker: {As, As, As, As, Otra carta}, {2, 2, 2, 2, Otra carta}, … Es decir 360.

$$P(\textit{Póker servido}) = \frac{360}{658008} = 0'000547$$

CURIOSIDADES. REVISTA

Juan Caramuel Lobkowitz

(Madrid, 23 de mayo de 1606 – Vigevano, Lombardía, 8 de septiembre de 1682)



Juan Caramuel fue un personaje extraño y prodigioso, tan fascinante como olvidado. Fue matemático, filósofo, lógico, lingüista y monje cisterciense, que se ganó el sobrenombre de «*Leibniz español*» por la variedad y vastedad de sus conocimientos. Lo traemos aquí, por ser un matemático español del siglo XVII, que ya es raro, y porque nació en Madrid, donde una calle lleva su nombre, así como un centro de salud y un parque.

Era hijo del ingeniero luxemburgués Lorenzo Caramuel y de la bohemia Catalina de Frisia. De inteligencia superdotada, a los doce años componía tablas astronómicas, siendo su padre su primer maestro en esta disciplina.

Estudió humanidades y filosofía en la Universidad de Alcalá, ingresó en la Orden Cisterciense en el Monasterio de la Santa Espina (cerca de Medina de Rioseco Valladolid); se formó en filosofía en el monasterio de Montederramo, Orense, y en teología en el de Santa María del Destierro, en Salamanca. Amante de las lenguas, llegó a dominar y hablar una veintena como latín, griego, árabe, siríaco, hebreo, chino, etc.

Fue abad, obispo coadjutor en Maguncia y agente del rey de España en Bohemia.

Obra

Mantuvo activa relación epistolar con los eruditos más célebres de su época. Se rebeló contra la autoridad de Aristóteles y adoptó, por ejemplo, el mecanicismo cartesiano.

Nada escapó a su omnímoda curiosidad, de suerte que por su espíritu enciclopédico ha llegado a llamársele el *Leibniz español*. Fue ante todo un generalista y nunca abordó un tema, cualquiera que este fuese, sin replantearse sus fundamentos teóricos desde todas las perspectivas posibles como un típico *homo universalis*: Caramuel se interesó y escribió sobre la lengua, la literatura en general y el teatro y la poesía en particular, la pedagogía, la criptografía, la filosofía y la teología, la historia y la política de su tiempo, la música, la pintura, la escultura, la arquitectura, las matemáticas, la física, la astronomía, etc. La obra de Caramuel fue cuantiosa, variada y dispersa (se le atribuyen doscientos sesenta y dos títulos, entre ellos sesenta impresos).

Trabajó en **teoría de la probabilidad**, dando pasos en la dirección correcta hacia la formulación de Pascal, quien seguramente se inspiró en su «*Kybeia, quæ combinatoriæ genus est, de alea et ludis Fortunæ serio disputans*» (1670), un tratadito de veintidós páginas incluso en su *Mathesis biceps* que

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

representa el segundo tratado sobre cálculo de probabilidades de la historia después del tratado de 1656 de Huygens. En el tratado de Caramuel se estudian distintos juegos y el problema de la división de las apuestas.

También se le debe la primera descripción impresa del **sistema binario** en su *Mathesis biceps* en lo que se adelantó treinta años a Leibniz, su más famoso divulgador. Explicó allí el principio general de los números en base n, destacando las ventajas de utilizar bases distintas de la 10 para resolver algunos problemas. Fue también el primer español que publicó una tabla de logaritmos. El sistema de logaritmos que desarrolló fue en base 1009, donde log 1010 = 0 y log 1 = 0.

Otra de sus aportaciones científicas fue, en **astronomía**, un método para determinar la longitud utilizando la posición de la Luna.

En **trigonometría**, propuso un método nuevo para la trisección de un ángulo.

Sobre **arquitectura** escribió en español su *Architectura civil, recta y obliqua* (Vigevano, 1678). Se trata de una obra especulativa y destinada al lector entendido en los temas objeto de debate; por eso es difícil de llevar a la práctica por más que la obra se halle ilustrada con calcografías que el autor agrupa en el último tomo y que él mismo diseñó y tardó más de cuarenta años en hacerlas esculpir y grabar. Su origen se encuentra en una obra suya anterior, la *Mathesis architectonica*, publicada en latín, que constituye la tercera parte de su *Cursus mathematicus* (1667–1668), que tradujo al castellano en una versión ampliada en 1678. Diseñó además la fachada de la catedral de Vigevano (1680), transformando el conjunto renacentista de la Piazza Ducale.

Galileo

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

Si quieres saber más, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

El inicio de la Teoría de la Probabilidad, como sabes, fueron los juegos de azar.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Estadística

El nombre de Estadística proviene del s. XIX, sin embargo ya se utilizaban representaciones gráficas y otras medidas en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para controlar el número de personas, animales o ciertas mercancías desde la Prehistoria. Los babilonios usaban ya envases de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides. Los antiguos griegos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia 600 aC.

Caballero de la Meré

Al *Caballero de la Meré* le gustaba jugar y era un gran jugador, por eso sabía que era favorable apostar, al tirar un dado “sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado” y que no lo era al tirar dos dados el “sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas”.

Se ve que había jugado mucho para saber que las frecuencias relativas le decían que el primer suceso tenía una probabilidad superior a 0,5, y el segundo la tenía inferior. Pero no lo comprendía. No era matemático y sólo se sabía la regla de tres. ¡Esto no es una proporcionalidad! Dijo 6 : 4 = 36 : 24. Pero las frecuencias relativas le decían que no era así, por lo que escribió a Pascal para que le solucionara el problema.

Tu ya sabes lo suficiente para solucionárselo. Antes de seguir leyendo, intenta resolverlo.

En lugar de calcular la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas, calcula la probabilidad de *no sacar un 6*, que es su suceso contrario, y es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Por tanto la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas es:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177 > 0{,}5.$$

Calculamos del mismo modo la probabilidad de sacar *al menos un seis doble* al tirar dos dados 24 veces, calculando la de su suceso contrario, la de *no sacar ningún seis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, por lo que sacar al menos un 6 doble es:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914 < 0{,}5.$$

¡Cuánto debió de jugar el Caballero de la Meré para darse cuenta de esa pequeña diferencia en las probabilidades!

RESUMEN

		Ejemplos
Sucesos	Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**. Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.	Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Suceso *obtener múltiplo de* 3 = {3, 6}
Asignación de probabilidades	Una medida Límite al que tienden las frecuencias relativas. Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables entonces: p = casos favorables / casos posibles.	$P(5) = 1/6$. P(sacar múltiplo de 3) = 2/6
Axiomática de Kolmogorov	1. $P(E) = 1$. 2. $P(A) \geq 0$, para todo A. 3. Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
Teoremas de Probabilidad	Suceso contrario: $P(X) + P(noX) = 1$. Probabilidad de intersección: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Probabilidad de unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6. $P(5 \cup$ múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6 P sacar primero un 5 y luego múltiplo de 3 =1/6·2/6 =2/36
Teorema de *Bayes*	$P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$	
Permutaciones	Se considera sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Se consideran el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $\mathrm{VR}_{m,n} = m^n$.	$\mathrm{VR}_{2,4} = 2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influyen el **orden** y los **elementos**. Los elementos **NO** pueden repetirse. $\mathrm{V}_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$	$\mathrm{V}_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $\mathrm{C}_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} = \dfrac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \dbinom{m}{n}$	$\mathrm{C}_{9,7} = \dbinom{9}{7} = \dfrac{9!}{2!\cdot 7!} = 36$
Binomio de Newton	$(a+b)^n = \dbinom{n}{0}a^n + \dbinom{n}{1}a^{n-1}b + \dbinom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \dbinom{n}{n-1}ab^{n-1} + \dbinom{n}{n}b^n$	$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Probabilidad

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.

6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.

7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.

8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso “sea 9” y el suceso “sea 10” y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso “Salga cara y un número par”. B al suceso “Salga cruz y un número primo” y C al suceso “salga un número primo”. Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

10. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.

11. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.

12. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.

13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

Combinatoria

20. Cinco nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?

21. Santi, Pepe, Ana y Silvia quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?

22. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 9 objetos distintos en 9 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?

23. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

24. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

25. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 6 colores? ¿Y si se dispone de 6 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

26. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4?

27. ¿Cuántos números de 34 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos.

28. A María le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay seis, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

29. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

30. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos (dígitos binarios o bits) de tamaño fijo. En el contexto de la informática, estas cadenas de bits se denominan palabras. Los ordenadores normalmente tienen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 ó 64 bits. El código ASCII con el que se representaban inicialmente los caracteres para transmisión telegráfica tenía 7 bits. Después se aplicó a los ordenadores personales, ampliándolo a 8 bits que es lo que se denomina un byte o ASCII extendido. Más tarde se sustituyó por Unicode, con una longitud variable de más de 16 bits. ¿Cuántos bytes diferentes (8 dígitos) se pueden formar? En un ordenador cuya longitud de palabra tuvieran 16 dígitos, ¿cuántas se podrían formar que fuesen diferentes? Si existiera un ordenador cuya longitud de palabra tuviera 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

31. Tienes ocho bolas de igual tamaño, cuatro blancas y cuatro negras, si las colocas en fila, ¿de cuántas formas puede ordenarlas?

32. Con 4 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?

33. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 3 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

34. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

35. ¿Cuántas aleaciones de 4 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metal?

36. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 9 estudiantes en dos grupos de 3 y 6 estudiantes respectivamente?

37. Una asignatura se compone de 15 temas y se va a realizar un examen en el que caen preguntas de dos temas, ¿cuántas posibilidades hay para elegir los temas que caen? Si sólo has estudiado 10 temas, ¿cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

38. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

39. Se juega una partida de tiro al plato en la que se lanzan sucesivamente doce platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen cuatro éxitos, es decir se acierta cuatro veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

40. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

41. En una reunión todas las personas se saludan estrechándose la mano. Sabiendo que hubo 91 saludos. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 saludos, ¿cuántas personas había?

42. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

43. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 677573; luego fueron como ésta: M 1234 AB; y actualmente como ésta: 6068 BPD. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

44. Juana y Juan juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 4 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

45. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

46. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

47. En los billetes de una línea de autobuses van impresos los nombres de la estación de partida y de la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

48. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

49. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

50. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:

a) $P(A) + P(noA) = 1$

b) $P(A\ y\ B) = P(A) \cdot P(B)$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, y 4 ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?

a) 2500 b) 120 c) 500 d) 625

7. Ocho corredores participan en una carrera, las formas distintas en que pueden llegar a la meta son:

a) 40320 b) 20160 c) 5040 d) 10080

8. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?

a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

9. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras distintas. ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?

a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

10. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras (iguales o distintas). ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?

a) 216 b) 108 c) 120 d) 90

Apéndice: Problemas propuestos en selectividad

1. Junio 94. Opción B (2 puntos)

Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

2. Curso 94/95. Modelo Opción A (2 puntos)

En cierto instituto se ofrece informática y teatro como asignaturas optativas. El grupo A consta de 30 estudiantes, y los grupos B y C tienen 35 cada uno. El 60 por ciento del grupo A ha elegido teatro, así como el 20 por ciento del grupo B y el. 40 por ciento del resto han elegido informática.

(a) Si se pregunta a un estudiante elegido al azar, hallar la probabilidad de que haya optado por informática.

(b) Si un estudiante ha elegido teatro, calcular la probabilidad de que pertenezca al, grupo B.

3. Curso 94/95. Modelo Opción B (3 puntos)

Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan 0'12, la probabilidad de que salga una copa es 0'08 y la-probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0'84.

(a) Hallar la probabilidad de que la carta extraída sea as o copa.

(b) Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

4. Junio 95. Opción A. (3 puntos)

En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 6 % de los hombres y el 11 % de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcular la probabilidad de:

(a) que sea hombre.

(b) que esté enfermo.

(c) que sea hombre, sabiendo que está enfermo.

5. Septiembre 95. Opción B. (3 puntos)

Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de:

(a) que los calcetines sean negros.

(b) que los dos calcetines sean del mismo color.

(c) que al menos uno de ellos sea rojo.

(d) que uno sea negro y el otro no.

6. Septiembre 95. Opción B. (2 puntos)

Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto,

(a) hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día.

(b) calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

7. Curso 95/96. Modelo Opción A (3 puntos)

En una bolsa hay siete bolas numeradas de 1 al 7, y en otra bolsa B hay cinco bolas numeradas del 8 al 12. Se realiza la experiencia compuesta consistente en tomar una bola al azar de A, anotar su paridad e introducirla posteriormente en la bolsa B, a continuaciones extrae al azar una bola de B y se anota también su paridad.

(a) Calcular la probabilidad de que las dos bolas extraídas tengan la misma paridad.

(b) Hallar la probabilidad de que la bola extraída de B correspondan a un número impar.

8. Junio 96. Opción A. (3 puntos)

Una urna contiene 6 bolas blancas y 4 negras una segunda urna B contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que:

(a) Las dos bolas sean blancas. (b) Las dos bolas sean del mismo color. (c) Las dos bolas sean de distinto color.

9. Junio 96. Opción B. (2 puntos)

De una baraja de 40 cartas se eligen al azar simultáneamente 4 cartas. Hallar:

(a) Probabilidad de que se halla elegido al menos un rey.
(b) Probabilidad de que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.

10. Septiembre 96. Opción A. (2 puntos)

La cuarta parte de las participantes en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera, es un tercio. Si se elige una congresista al azar:

(a) ¿cuál es la probabilidad de que desayune té?
(b) ¿cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té?
(c) ¿cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té?

11. Curso 96/97. Modelo Opción A (2,5 puntos)

Para realizar un control de calidad de un producto se examinan 3 unidades del producto extraídas al azar y sin reemplazamiento de un lote de 100 unidades.

Las unidades pueden tener .defectos de dos tipos, A y B. Si en el lote de 100 unidades existen 10 unidades con defectos del tipo A únicamente, 8 unidades con defecto del tipo B únicamente, y dos unidades con ambos tipos de defecto, se desea determinar la probabilidad de que en la muestra de tres unidades extraídas se obtengan en total:

(a) Cero defectos.
(b) Una unidad con defecto del tipo A y otra con defecto del tipo B, o bien una unidad con ambos tipos de defecto.

12. Curso 96/97. Modelo Opción A (3 puntos)

Se realiza la experiencia compuesta consistente en lanzar al aire un dado y a continuación introducir una nueva bola en una urna que contiene 2 bolas blancas y 4 negras de modo que si el número obtenido en el dado es par, se introduce en la urna una bola blanca, y si es impar, se introduce una bola negra.

(a) Calcula la probabilidad de obtener, al azar, bolas blancas al realizar dos extracciones sucesivas y sin reemplazamiento de la urna, sabiendo que al lanzar el dado hemos obtenido un número par.
(b) Si se sacan simultáneamente dos bolas al azar de la urna después de haber lanzado el dado, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

13. Septiembre 97. Opción A. (3 puntos)

Tras un estudio realizado sobre los taxistas de una ciudad española, se ha observado que el 70 tiene más de 40 años y de estos el 60 % es propietario del vehículo que conduce. También se ha averiguado que el porcentaje de taxistas que no superando los 40 años, es propietario del vehículo que conduce se reduce al 30 %. Se pide:

(a) La probabilidad de que un taxista, elegido al azar, sea propietario del vehículo que conduce.
(b) Se elige un taxista al azar, y se comprueba que es propietario del vehículo que conduce, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 40 años?

14. Curso 97/98. Modelo Opción A (2 puntos)

En dos urnas A y B, se introducen dos bolas blancas y una negra, y tres bolas negras y una blanca, respectivamente. Se selecciona una urna al azar, y se extrae también una bola de dicha urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la A, si la bola escogida resultó ser blanca?

15. Curso 97/98. Modelo Opción B (2 puntos)

Se dispone de dos urnas A y B, de idéntico aspecto externo. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 amarillas, mientras que B contiene 5 bolas rojas y 3 amarillas. Un individuo se dirige a una de las urnas y extrae sin reemplazamiento, dos bolas de la misma. Hallar la probabilidad de que:

(a) Ambas bolas sean rojas.
(b) Las dos bolas sean del mismo color.

16. Junio 98. Opción A. (2 puntos)

Se lanza un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6, dos veces consecutivas.

(a) Calcúlese la probabilidad de que la suma de los resultados sea igual a 4.
(b) Calcúlese la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1, sabiendo que la suma es 4.

16. Septiembre 98. Opción A (3 puntos)

En un examen hay 3 temas de máxima dificultad, 5 de dificultad media y 2 de escasa dificultad, de los cuales se elige uno al azar. La probabilidad de que un alumno apruebe el examen si el tema es de máxima dificultad es de 1/3, si es de dificultad media, 2/5, y si es de escasa dificultad, 3/4.

(a) Hállese la probabilidad de que el alumno apruebe el examen.
(b) Hállese la probabilidad de que el tema elegido haya sido de máxima dificultad, si el alumno lo aprobó.

17. Curso98/99. Modelo Opción A. (2puntos)

De una urna con cinco bolas, dos blanca y tres negras, extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) A = Las dos bolas extraídas son del mismo color.
b) B = Extraemos al menos una bola blanca.

18. Curso 98/99.Modelo Opción B. (2 puntos)

Tomamos cuatro cartas diferentes de una baraja, dos cincos, un seis y un siete. Las cartas se ponen boca abajo sobre una mesa y las mezclamos al azar. Determina la probabilidad de que al darles la vuelta, todas las cartas estén ordenadas en orden creciente, si los dos cincos son indistinguibles.

19. Junio 99. Opción A. (2 puntos)

Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?

20. Junio 99. Opción B. (2 puntos)

Se considera una célula en el instante **t** = 0. En el instante **t** = 1 la célula puede: o bien reproducirse, dividiéndose en dos, con probabilidad 3/4; o bien morir, con probabilidad 1/4. Si la célula se divide, entonces, en el tiempo $t = 2$ cada uno de sus dos descendientes puede también subdividirse o morir, con las mismas probabilidades de antes, independientemente uno de otro.

(a) ¿Cuántas células es posible que haya en el tiempo $t = 2$?
(b) ¿Con qué probabilidad?

21. Septiembre 99. Opción A. (2 puntos)

Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

(a) A = Se obtiene cinco en alguno de los dados.

(b) B = Se obtiene un doble (los dos dados presentan la misma puntuación).

(c) $A \cap B$

(d) $A \cup D$

22. Septiembre 99. Opción B. (2 puntos)

Se dispone de tres urnas, la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas, y la C con una blanca y cinco rojas.

(a) Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella, ¿cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?

(a) Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

23. Curso 99/00. Modelo Opción A (2 puntos)

Si se escoge un número al azar de cierta ciudad española, la probabilidad de que figure a nombre de un hombre es 0'7 y de que figure a nombre de una mujer es 0'3. En dicha ciudad, la probabilidad de que un hombre trabaje es 0'8 y de que lo haga una mujer es 0'7. Se elige un número de teléfono al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda una persona que trabaja?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a un hombre, sabiendo que pertenece a una persona que trabaja?

24. Curso 99/00. Modelo Opción B (2 puntos)

Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno.

a) ¿Qué probabilidad tiene un alumno, que sabe seis temas de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los dos temas elegidos y el otro no?

25. Junio 00. Opción A. (2 puntos)

De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas?

(b) Si la segunda bola ha resultado ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?

26. Junio 00. Opción B. (2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)$ = 0'6; $P(B)$ = 0'2 y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}7$

(a) Calcúlese $P(A \cap B)$ y razónese si los sucesos A y B son independientes.

(b) Calcúlese $P(A \cup B)$

27. Septiembre 00. Opción A. (2 puntos)

La probabilidad de que en un mes dado un cliente de una gran superficie compre un producto A es 0'6; la probabilidad de que compre un producto B es 0'5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre el producto B no habiendo comprado el producto A es 0'4.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto B?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los productos?

28. Septiembre 00. Opción B. (2 puntos)

Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0'3; de que se remita al bufete B es 0'5 y de que se remita al bufete C es 0'2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0'6; para el bufete B esta probabilidad es 0'8 y para el bufete C es 0,7.

(a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso.
(b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A.

29. Curso 00/01. Modelo Opción A. (2 puntos)

En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0'4; la probabilidad de que vote al partido B es 0'35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0'25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0'4; 0'4 y 0'6. Se elige una persona de la ciudad al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.

b) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B?

30. Curso 00/01. Modelo Opción B. (2 puntos)

Una urna contiene 7 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer tres bolas de la urna, de forma sucesiva y sin reemplazamiento. Sean los sucesos $B1$: La primera bola es blanca, $B2$: La segunda bola es blanca y $B3$: La tercera bola es blanca.

a) Exprésese con ellos el suceso Las bolas extraídas en primer y tercer lugar son blancas, y la extraída en segundo lugar no.

b) Calcúlese la probabilidad del suceso Las tres bolas son del mismo color.

31. Junio 01. Opción A. (2 puntos)

Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60 % de los modelos son de tipo A y el 30 % de tipo B. El 30 % de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30 % de los coches del modelo A son de tipo diesel y el 20 % de los coches del modelo B tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

(a) El coche es del modelo C.
(b) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diesel.
(c) El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo C.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

32. Junio 01. Opción B. (2 puntos)

Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0'01 para A, de 0'02 para B y de 0'03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?

33. Septiembre 01. Opción A. (2 puntos)

En un videoclub quedan 8 copias de la película A, 9 de la B y 5 de la C. Entran tres clientes consecutivamente y cada uno elige una copia al azar. Calcúlese la probabilidad de que:

(a) Los tres escojan la misma película.
(b) Dos escojan la película A y el otro la C.

34. Septiembre 01. Opción B. (2 puntos)

Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números.

(a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él?
(b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?

35. Curso 01/02. Modelo Opción A. (2 puntos)

Un proveedor suministra lotes de materia prima y el 5 % de ellos resulta defectuoso. Seleccionando al azar 3 lotes

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de lotes defectuosos sea 2?

36. Curso 01/02. Modelo Opción B. (2 puntos)

Una prueba para determinar cierta contaminación en el agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0'05 de falsos positivos, esto es, casos en los que estando el agua libre de contaminación, el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad 0'99. El agua está libre de contaminación con probabilidad 0'99. Si se realizar una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.

37. Junio02. Opción A. (2 puntos)

Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas, 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera 4 blancas y 3 negras.

a) Se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

38. Junio02. Opción B. (2 puntos)

Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas:
a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble.
b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

39. Septiembre02. Opción A. (2 puntos)

Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regala un peluche, si al tirar un dardo se acierta en un blanco. Si solo se permite tirar tres dados y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0'3.

a) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche?
b) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer lanzamiento?
c) ¿Y de llevárselo exactamente en el segundo?

40. Septiembre02. Opción B. (2 puntos)

Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las compras pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?
b) Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

41. Curso 02/03. Opción A. (2 puntos)

Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0'25. La probabilidad de no regar el rosal es 2/3. Si el rosal se ha secado, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

42. Curso 02/03. Opción A. (2 puntos)

Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades:

$P(A) = 0'7$ $\quad P(B) = 0'5$ $\quad P(A \cap B) = 0{,}45$

Calcular a) $P(B/A)$ $\quad$ b) $P(A^c \cap B^c) =$ $\quad$ A^c representa el suceso complementario del suceso A.

43. Junio 03. Opción A (2 puntos)

El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) Las tres personas votan al candidato A.
(b) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B.
(c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

44. Junio 03. Opción B (2 puntos)

De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:

(a) Tres reyes.
(b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.
(c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

45. Septiembre 03. Opción A (2 puntos)

Un test para detectar una sustancia contaminante en el agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0'99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0'05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0'99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.

46. Curso 03/04. Opción A (2 puntos)
En un I.E.S. hay 156 alumnos matriculados en segundo de Bachillerato, de los cuales 120 utilizan el transporte escolar. De estos últimos, la mitad hace uso del comedor del centro, mientras que sólo 12 de los que no utilizan el transporte escolar acuden al comedor.

(a) Se elige al azar un alumno de segundo de bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que no asista al comedor?

(b) Si el alumno elegido utiliza el transporte escolar, ¿cuál es la probabilidad de que asista al comedor?

47. Curso 03/04. Opción B (2 puntos)
En una clase, el 20% de los alumnos aprueba lengua, el 30% aprueba matemáticas y el 40% aprueba lengua extranjera. Se sabe además que el 12% aprueba matemáticas y lengua extranjera y el 7% aprueba lengua y lengua extranjera. ¿Son independientes los sucesos "aprobar lengua extranjera" y "aprobar lengua'? ¿Son independientes los sucesos "aprobar matemáticas" y "aprobar lengua extranjera"?

48. Junio 04. Opción A (2 puntos)
Dos expertos, E_1 y E_2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es 0'55 y por E_2 es 0'45. Si una peritación ha sido realizada por E_1, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0'98 y si ha sido realizada por E_2, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0'90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2.

49. Junio 04. Opción B (2 puntos)
En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0'02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0'09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?

50. Septiembre 04. Opción A (2 puntos)
Una cierta señalización de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0'95 y de que se active el segundo es 0'90.
(a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno, de los indicadores.
(b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

51. Septiembre 04. Opción B (2 puntos)
En una poblaci6n, el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. En esa poblaci6n el 80 % de los hombres y el 20 % de las mujeres son aficionados al fútbol.
(a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol.
(b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

52. Curso 04/05. Opción A (2 puntos)
Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0'6, la empata con probabilidad 0'3 y la pierde con probabilidad 0'1. El jugador juega dos partidas.
(a) Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio.
(b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.

53. Curso 04/05. Opción B (2 puntos)
En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa:

	Chicas	Chicos
Tecnológica	64	52
Humanidades y C. Sociales	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2º de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:

(a) No curse la opción Científico-Tecnológica.

(b) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.

54. Junio 05. Opción A (2 puntos)
Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.

(a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.

(b) Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro, exactamente un huevo roto.

55. Junio 05. Opción B (2 puntos)
En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres uno", "Obtener al menos un dos", "Obtener tres números distintos" y "Obtener una suma de 4".

56. Septiembre 05. Opción A (2 puntos)
En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía Internet. De los inversores que realizan operaciones vía Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan operaciones vía Internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:

(a) Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.

(b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?

57. Septiembre 05. Opción B (2 puntos)

Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=\frac{1}{2}$ $P(\overline{B})=\frac{2}{5}$ $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\frac{3}{4}$ Calcular:

(a) $P(B/A)$. (b) $P(\overline{A}/B)$ Nota: $\overline{A}$ representa el suceso complementario del suceso A.

58. Curso 05/06. Opción A (2 puntos)
Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B:

$$P(A) = 0'6 \qquad P(B) = 0'2 \qquad P(A \cap B) = 0'12.$$

(a) Calcular las probabilidades de los sucesos(A U B) y (A/(A U B)).

(b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

59. Curso 05/06. Opción B (2 puntos)
Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

60. Junio 06. Opción A (2 puntos)
Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es 2/3. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0'25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

61. Junio 06. Opción B (2 puntos)
Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide:

a) Describir el espacio muestral de este experimento.

b) Determinar la probabilidad del suceso: Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado.

62. Septiembre 06. Opción A (2 puntos)
Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0'2 %, mientras que dicha proporción es 0'5 % en la segunda y 0'1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

63. Septiembre 06. Opción B (2 puntos)
Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

64. Junio 07. Opción A (2 puntos)
Según cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33 % tiene contratada la televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

65. Junio 07. Opción B (2 puntos)
Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, C1, C2 y C3, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.
(a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.
(b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio (C1).

66. Septiembre 07. Opción A (2 puntos)
En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0'01 para la marca A; 002 para la marca B y 0'03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.
(a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.
(b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

67. Junio 2008-Opción A, 2 puntos

En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado. a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane.

b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

68. Junio 2008-Opción B, 2 puntos

Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que: $P(A)$ = 1/4, $P(B)$ = 1/3, $P(AUB)$ = 1/2

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Razónese.

b) Calcúlese $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$.*Nota*.- La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

69. Septiembre 2008-Opción A, 2 puntos

Se consideran dos actividades de ocio: A = ver televisión y B = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a 0'46; la probabilidad de que practique B es igual a 0'33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0'15.

a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores?

b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

70. Septiembre 2008-Opción B, 2 puntos

Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto y raya y que el telégrafo envía un punto con probabilidad 3/7 y una raya con probabilidad 4/7. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un punto se reciba una raya con probabilidad 1/4 y que cuando se envíe una raya se reciba un punto con probabilidad 1/3.

a) Si se recibe una raya, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una raya?

b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe punto-punto se hubiera enviado raya-raya?

71. Junio 2009 Opción A, 2 puntos

Se consideran tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio tales que:

$P(A)$ = 1/2; $P(B)$ = 1/3; $P(C)$ = 1/4; $P(A \cup B \cup C)$ = 2/3; $P(A \cap B \cap C)$ = 0: $P(A/B)$ = $P(C/A)$= ½.

(a) Calcúlese $P(C \cap B)$.

(b) Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$. La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

72. Junio 2009 Opción B, 2 puntos

Para la construcción de un luminoso de feriase dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0'01 si la bombilla es blanca, es igual a 0'02 si la bombilla es azul e igual a 0'03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

(a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

(b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

73 Septiembre 2009. Opción A, 2 puntos
En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %.

a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

74. Septiembre 2009 Opción B, 2 puntos
La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0'55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0'40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0'25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste: a) Al menos uno de los dos tipos de música. b) La música clásica y también la música moderna. c) Sólo la música clásica. d) Sólo la música moderna.

75. Junio 2010 Fase general. Opción A, 2 puntos
Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza.

a) Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento.

b) Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?

76. Junio 2010 Fase general. Opción B, 2 puntos
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)$ = 0'2 y $P(B)$ = 0'4.

a) Si A y B son mutuamente excluyentes, determínese $P(A\ B)$. ¿Son además A y B independientes? Razónese.

b) Si A y B son independientes, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B además mutuamente excluyentes? Razónese.

c) Si $P(A/B)$ = 0, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Son A y B independientes? Razónese.

d) Si $A \subset B$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B independientes? Razónese.

77. Junio 2010 Fase específica. Opción A, 2 puntos
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)$ = 0'5; $P(B)$ = 0'4 ; $P(A \cap B)$ = 0'1.

Calcúlense cada una de las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ c) $P(A/B)$ d) $P(\overline{A} \cap B)$. Nota. $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

78. Junio 2010 Fase específica. Opción B, 2 puntos
Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes: a) Obtener al menos un seis en el total de los seis lanzamientos. b) Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

79. Septiembre 2010 Fase general. Opción A, 2 puntos

Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A/C) \geq P(B/C),\ P(A/\overline{C}) \geq P(B/\overline{C}).$$

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es siempre cierta: a) $P(A) < P(B)$; b) $P(A) \geq P(B)$.

80. Septiembre 2010 Fase general. Opción B, 2 puntos

Se consideran los siguientes sucesos: Suceso A: *La economía de un cierto país está en recesión.*

Suceso B: *Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión*.

Se sabe que $P(A) = 0'005$; $P(B/A) = 0'95$; $P(\overline{B}/\overline{A}) = 0'96$.

a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.

b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

81. Septiembre 2010 Fase específica Opción A, 2 puntos

En una residencia universitaria viven 183 estudiantes, de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante de la residencia al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería?

b) Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?

82. Septiembre 2010 Fase específica Opción B, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0'6$. Calcúlese $P(A \cap \overline{B})$ en cada uno de los siguientes casos:

a) A y B son mutuamente excluyentes. b) $A \subset B$.

c) $B \subset A$ y $P(B) = 0'3$. d) $P(A \cap B) = 0'1$.

83. Curso 2010/11. Modelo. Opción A, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a 1/6 y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a 7/12. Se sabe además que $P(A/B) = 1/2$.

a) Calcula la probabilidad de que ocurra A o B.

b) Calcula la probabilidad de que ocurra A.

84. Curso 2010/11. Modelo. Opción B, 2 puntos

En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0'2. Entre los habitantes que siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0'6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0'3. Se elige al azar un habitante de la población. a) Calcula la probabilidad de que practique deporte regularmente.

b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

85. Junio 2011. Opción A, 2 puntos

En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0'4, de molinos eólicos con probabilidad 0'26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0'12. Elegido un día al azar, calcula la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio: a) por alguna de las dos instalaciones, b) solamente por una de las dos.

86. Junio 2011. Opción B, 2 puntos

En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0'5, de que sea un camión es 0'3 y de que sea una motocicleta es 0'2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0'06 para un coche, 0'02 para un camión y 0'12 para una motocicleta. En un momento dado un vehículo pasa por el radar.

a) Calcula la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.
b) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta.

87. Septiembre 2011. Opción A, 2 puntos

Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0'49 y de nazca un niño es 0'51. Una familia tiene dos hijos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

88. Septiembre 2011. Opción B, 2 puntos

Se disponen de tres urnas A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

b) Se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

89. Septiembre 2011. Opción A, (Reserva) 2 puntos

La probabilidad de que el jugador A de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a 7/9, y la probabilidad de que otro jugador B consiga una canasta de tres puntos es 5/7. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos.

a) Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple.

b) Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.

90. Septiembre 2011. Opción B, (Reserva) 2 puntos

Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12109	9863
No apto	1717	1223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto?

2. Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

91.Curso 2011/12. Modelo. Opción A, 2 puntos

Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

92. Junio 2012. Opción A, 2 puntos

En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

(b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

93. Junio 2012. Opción B, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A \cap B)$ = 0'1 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6$ $P(A|B)$ = 0'5.Calcula:

(a) $P(B)$.

(b) $P(A \cup B)$.

(c) $P(A)$.

(d) $P(\overline{B} / \overline{A})$

94. Septiembre 2012. Opción A, 2 puntos.

Se disponen de 5 cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde.

(a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane.

(b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

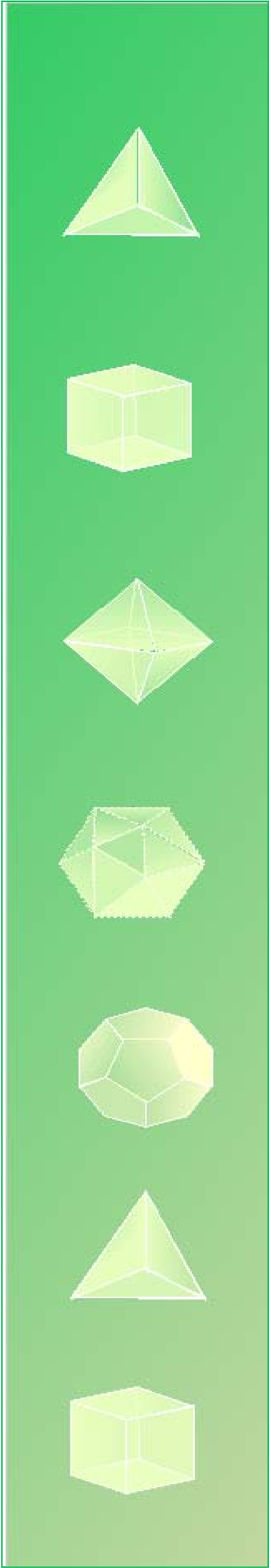
95. Curso 2012/13. Modelo. Opción B, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(\overline{B}) = \frac{3}{4}$ $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

a) Determínese si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B.

b) Determínese si son dependientes o independientes los sucesos A y B.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.



Matemáticas II. 2º Bachillerato. Capítulo 12: Distribuciones de probabilidad

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisores: Leticia González y Álvaro Valdés

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

Muchos de los eventos que ocurren en la vida diaria no pueden ser predichos con exactitud a priori por diversas razones, pues la mayoría de ellos están influidos por factores externos. Además, existen sucesos que están directamente afectados por el azar, es decir, por procesos en los que no se está seguro de lo que va a ocurrir. La teoría de la probabilidad nos permite acercarnos a estos sucesos y estudiarlos, ponderando sus posibilidades de ocurrencia y proporcionando métodos para realizar estas ponderaciones.

En los capítulos anteriores has utilizado frecuencias, ahora vamos a asignar probabilidades y al estudiar los fenómenos aleatorios mediante distribuciones de probabilidad podremos construir modelos que reflejen la realidad y afirmar, con tal probabilidad, lo que va a ocurrir.

Además la teoría de la probabilidad es una herramienta necesaria para abordar la *Inferencia Estadística*. Esta agrupa un conjunto de métodos y técnicas que permiten extraer conclusiones generales de una población a partir de la observación de una muestra obtenida de ella. Además, también intenta obtener indicadores sobre la significación de las conclusiones obtenidas; es decir, sobre la confianza que merecen.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

1.1. Distribuciones de probabilidad: Media, varianza y desviación típica.

Cuando se analiza un fenómeno observable aparece una serie de resultados que han de ser tratados convenientemente, de manera que se puedan comprender mejor tanto los resultados como la característica objeto de estudio correspondiente a dicho fenómeno. Para este fin ya sabes realizar una primera descripción de los datos, histograma de frecuencias absolutas o relativas y polígono de frecuencias absolutas o acumuladas, y determinar sus parámetros: la media, varianza, desviación típica…

En ese caso, los propios resultados del experimento son numéricos como en el caso en el que se mide la velocidad de un vehículo, o la altura de un individuo. En cambio, en otras ocasiones, los resultados del experimento no proporcionan dicha información adecuadamente, como puede ser en el caso de los juegos de azar (ruleta, lotería, etc.).

En estos casos, se puede utilizar una variable aleatoria, que es una función que asigna un número real a cada resultado posible del espacio muestral del fenómeno bajo estudio. Por ejemplo, en los juegos de azar se puede asignar a cada resultado la ganancia o pérdida que produce en el jugador.

Las variables aleatorias se denotan mediante una letra mayúscula y pueden ser discretas (cuando pueden tomar un número finito o infinito numerable de valores) o continuas (cuando pueden tomar cualquier valor dentro de un rango).

En cuanto a las variables aleatorias discretas, éstas son las que pueden tomar un número finito o infinito numerable (como el conjunto N de los números naturales) de valores. Dado que la variable aleatoria puede tomar diferentes valores dependiendo de los resultados del experimento aleatorio al que está asociado, su valor no se podrá predecir de manera exacta. Así pues, para describir una variable aleatoria es necesario conocer su distribución de probabilidad.

Conocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X discreta consiste en asignar una probabilidad a cada uno de los resultados posibles de dicha variable aleatoria. Es decir, se trata de saber calcular o asignar los valores $P[X = x]$, para todos los posibles valores x que puede tomar la variable aleatoria X.

Actividad resuelta

- *Se lanzan dos monedas y contamos el número de caras. La distribución de probabilidad es:*

Al hacer un diagrama en árbol calculamos las probabilidades:

Número de caras (x):	0	1	2
Probabilidad ($p(x)$):	1/4	1/2	1/4
Función de distribución $F(x)$:	1/4	3/4	4/4

Por un lado tenemos la función $p(x)$, que es la probabilidad puntual o función de cuantía o función masa de probabilidad.

Por otro lado podemos calcular lo que sería equivalente a las frecuencias acumuladas. La función $F(x)$, a la que se denomina función de distribución, nos indica la probabilidad de que $F(x) = P(X \leq x)$, es decir,

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

calcula la probabilidad de que se tomen valores menores a x.

La tabla que hemos presentado es una **distribución de probabilidad**, donde hemos definido una función que asigna a la variable aleatoria x una probabilidad:

$$x \to p(x)$$

y es el resultado que nos ayudará a hacer predicciones sobre un experimento aleatorio.

También podemos representar la tabla anterior mediante un histograma para la función de cuantía, en el que las áreas de cada rectángulo son ahora probabilidades, en lugar de frecuencias relativas, y podemos representar con una línea la función de distribución.

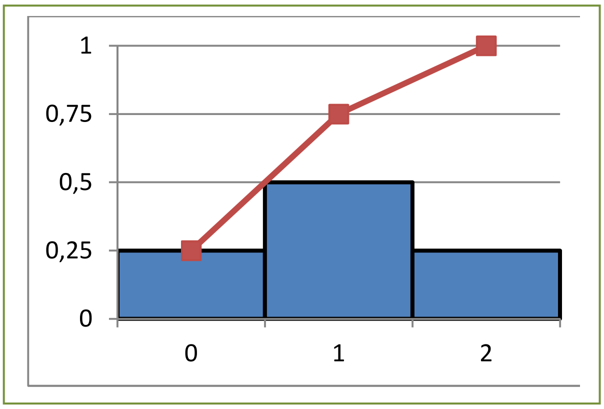
Observamos que siempre se verifican las siguientes propiedades.

Función de probabilidad o función de cuantía:

1) $p(x) \geq 0$
2) $\Sigma\, p(x) = 1$.

Función de distribución:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$
2) $F(x)$ es una función creciente
3) $F(x_{Máximo}) = 1$.



Actividades propuestas

1. Se lanzan 3 monedas y contamos el número de caras que salen. Haz un diagrama en árbol. Escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución. Representa la función de cuantía en un histograma y con una línea la función de distribución.

2. Se lanzan 2 dados y contamos el número de 5 que aparecen. Haz un diagrama en árbol, escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución, y represéntalas gráficamente.

Actividad resuelta

- *Se lanzan dos dados. Por cada 5 que aparezca ganas 20 euros y pierdes 10 euros en caso contrario. ¿Te conviene ese juego? ¿Cuánto esperas ganar o perder en 60 jugadas?*

En cada lanzamiento puedes perder 10 euros o ganar 40 euros o ganar 20 euros. Esos son los valores de una variable aleatoria que podemos llamar ganancia, cuyas probabilidades calculamos, haciendo un diagrama de árbol, y escribimos en la siguiente tabla:

Ganancia (euros) (x):	–10	20	40
Probabilidad ($p(x)$):	25/36	10/36	1/36

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Por tanto en 36 jugadas “esperamos” perder 10 euros en 25 de ellas, ganar 20 euros en 10, y ganar 40 euros en una jugada.

Ahora la variable aleatoria, que es discreta, es la ganancia.

Podemos calcular la **media** o **esperanza matemática** $E(x)$ con la expresión:

$$E(x) = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$$

La **esperanza matemática** es una media teórica, de ahí el nombre de esperanza. Indica que si repetimos el experimento varias veces se espera que la media de los valores obtenidos se aproxime a esta esperanza calculada.

Para distinguir la media de una distribución de frecuencias de la esperanza de una distribución de probabilidad, se suele utilizar para las frecuencias la letra m o $\bar{x}$, mientras que para la esperanza matemática se utiliza la letra griega μ (que se lee “mu”) o $E(x)$.

Un juego es equitativo si la esperanza matemática de la ganancia es 0, es ventajoso si $E(x) > 0$, y es desventajoso si $E(x) < 0$.

En la actividad propuesta anteriormente calculamos la media o esperanza matemática:

Esperanza matemática = $E(x)$ = –10(25/36) + 20(10/36) + 40(1/36) = (–250 + 200 + 40)/36 = –10/36. Como $E(x) < 0$, el juego es desventajoso.

Esto sería como calcular lo que “esperas” perder en 60 jugadas.

Actividades propuestas

3. Se lanzan 3 monedas. Por jugar nos cobran 1 euro, y por cada cara que aparezca ganamos 1 euro. Escribe una distribución de probabilidad y representa el histograma. ¿Cuánto esperas ganar o perder en 100 lanzamientos?

4. Una persona apuesta 10 euros a un juego de tirar una moneda y que salga cara o cruz (o similar). Si gana se retira y deja de jugar. Si pierde, apuesta el doble, 20 euros. Si gana se retira. Si pierde apuesta el doble, 40 euros. Y así sucesivamente. Con esta estrategia siempre acaba ganando 10 euros, pero tiene un defecto, ¡que no lleve suficiente dinero para seguir jugando hasta ganar! Imagina que lleva 500 euros. A) Haz un diagrama de árbol y calcula todas las posibilidades y sus probabilidades. B) La distribución de probabilidad: Ganancia (x) $\rightarrow$ Probabilidad (x). C) ¿Es un juego ventajoso? ¿Y para nuestro jugador? D) Calcula la probabilidad de ganar 10 euros y la de perder 500 euros.

5. Lanzamos dos dados. Si apostamos al 7 y sale, recuperamos tres veces lo apostado. Si apostamos que sale menor que 7 y sale, recuperamos lo apostado, y lo mismo si apostamos que sale mayor que 7. ¿Cuál es la mejor estrategia?

Por ejemplo, asegurar un coche a todo riesgo es un juego desventajoso, pero nos asegura que no habrá pérdidas grandes.

Para saber si los valores son próximos a la media, ya sabes que se utiliza la **desviación típica**. Lo mismo en las distribuciones de probabilidad. Para medir esa dispersión se utiliza la expresión:

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = E(x^2) - E^2(x).$$

$$\sigma = \sqrt{E(x^2) - E^2(x)}$$

Ahora, cuando se refiere a distribuciones de probabilidad se utiliza la letra griega σ para indicar la desviación típica, y σ^2 para la varianza. Recuerda, con frecuencias utilizábamos s y s^2.

La desviación típica y la varianza son teóricas ya que se refieren a una distribución de probabilidad.

Las propiedades que verificaba la media y la desviación típica de las frecuencias se continúan verificando para la esperanza matemática y la desviación típica de las probabilidades.

Actividades resueltas

- *Se lanza una moneda 3 veces y contamos el número de caras. Calcula la desviación típica de la distribución de probabilidad.*

Hacemos un diagrama de árbol y comprobamos que la distribución de probabilidad es:

Número de caras (x):	0	1	2	3
Probabilidad $p(x)$:	1/8	3·(1/8)	3·(1/8)	1/8

Completamos la tabla con las filas siguientes:

					Suma
$x \cdot p(x)$**:**	0	3/8	6/8	3/8	3/2
x^2**:**	0	1	4	9	
$x^2 \cdot p(x)$**:**	0	3/8	12/8	9/8	3

De donde deducimos que:

$$E(x) = \mu = 3/2.$$

$$E(x^2) = 3.$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - E^2(x) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0'75} = 0'87.$$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Distribución binomial

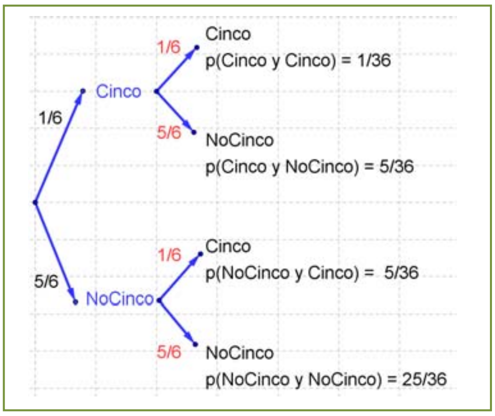
Este apartado está dedicado a describir y caracterizar matemáticamente algún modelo utilizado para variables aleatorias discretas que se repiten con frecuencia en las aplicaciones prácticas. Nos referimos al modelo de probabilidad discreto con más aplicaciones prácticas: la distribución binomial.

Antes de estudiarla vamos a ver dos ejemplos que ya conoces:

Actividad resuelta

- *Se lanza un dado. Llamamos "éxito" a que salga un* 5. *Escribe la distribución de probabilidad.*

Número de "*éxitos*":	0	1
Probabilidad:	5/6	1/6



- *Lanzamos ahora* 2 *dados.*

Número de "*éxitos*":	0	1	2
Probabilidad:	25/36	5/36 + 5/36 = 10/36	1/36

Observa que:

$$p(0)=\left(\frac{5}{6}\right)^2=1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\binom{2}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$p(1)=2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\binom{2}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$p(2)=\left(\frac{1}{6}\right)^2=1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\binom{2}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$$ donde $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$ son los números combinatorios.

Actividad resuelta

- *Se lanza una moneda 3 veces. Llamamos "éxito" a que salga cara. Escribe la distribución de probabilidad.*

Dibujamos el diagrama en árbol y calculamos las probabilidades:

Número de "*éxitos*":	0	1	2	3
Probabilidad:	1/8	3·(1/8)	3·(1/8)	1/8

Observa que:

$$p(0)=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$p(1)=\frac{3}{8}=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$p(2)=\frac{3}{8}=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$p(3)=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$$ donde $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{3}$ son los números combinatorios.

Los dos ejemplos anteriores son de una distribución binomial.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La **distribución binomial** se caracteriza porque puede ser interpretada como un experimento en el que se consideran sucesos dicotómicos, es decir, el de tener "éxito" y el de no tenerlo, de probabilidades p y $q = 1 - p$ respectivamente. Se realiza el experimento n veces, todas independientes y con la misma probabilidad p.

Se representa a la distribución binomial de parámetro p, probabilidad de "éxito", para n, número de pruebas como $B(n, p)$.

En los ejemplos anteriores hemos obtenido que la probabilidad de tener x éxitos en n pruebas repetidas en una distribución binomial $B(n, p)$ es:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

Esta distribución es importante pues aparece en muchas aplicaciones.

Actividades propuestas

6. Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es:

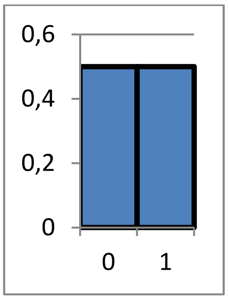
Sexo del recién nacido:	chica	chico
Probabilidad:	0'485	0'515

En un hospital van a nacer hoy 10 bebés. Escribe la expresión de probabilidad de que nazcan 7 chicas.

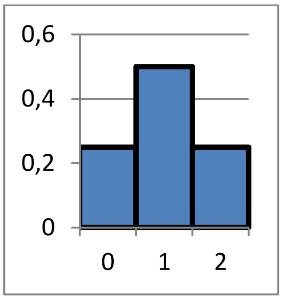
7. Se estima que el porcentaje de hogares que utiliza una determinada marca de tomate frito es del 12 %. En una muestra de 20 hogares, ¿qué probabilidad hay de encontrar entre 6 y 15 que lo utilicen? (No lo calcules, sólo plantea como lo calcularías).

Actividades resueltas

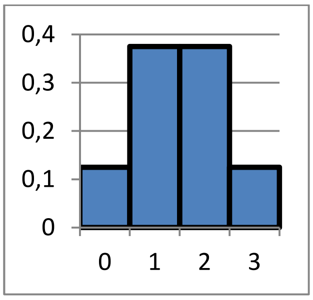
- *Volvemos al problema de lanzar una moneda n* veces. *Dibujamos los histogramas de la distribución de probabilidad binomial.* En este caso $p = q = 1/2$. Y n = 1, 2, 3, 5, 10, 15 y 20.



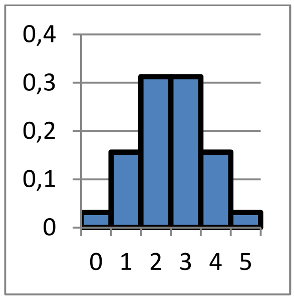
n = 1. B(1, 1/2).



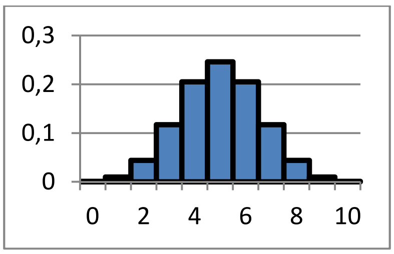
n = 2. B(2, 1/2).



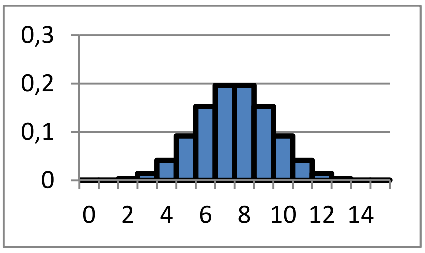
n = 3. B(3, 1/2).



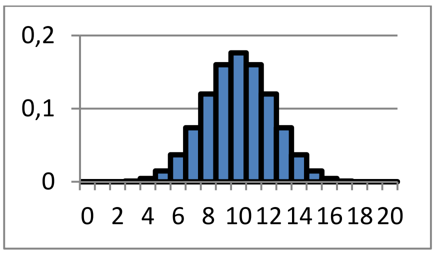
n = 5. B(5, 1/2).



n = 10. B(10, 1/2).



n = 15. B(15, 1/2).



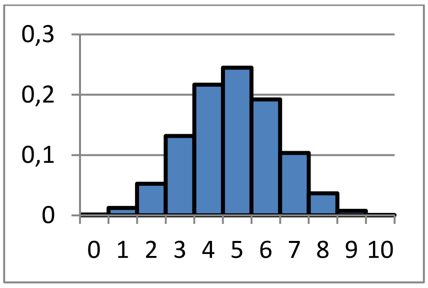
n = 20. B(20, 1/2).

¿Observas alguna diferencia entre los histogramas para n par y para n impar?

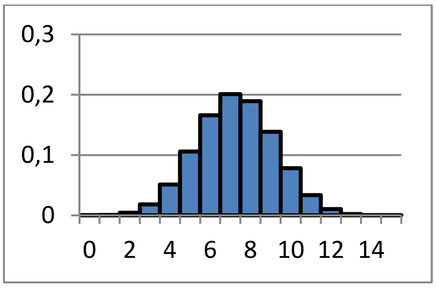
Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En este caso los histogramas son simétricos pues $p = q = 1/2$.

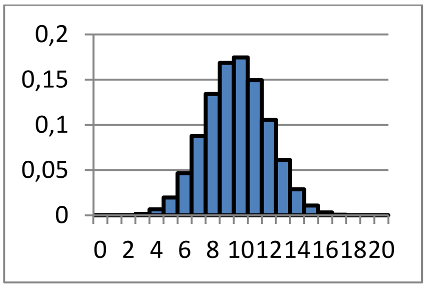
- *Dibujamos los histogramas de la distribución de probabilidad binomial para* $n = 10$, 15 y 20 *del sexo de un recién nacido, donde* $p = 0'485$ *y por tanto* $q = 0,515$.



$n = 10$. $B(10, 0'485)$.



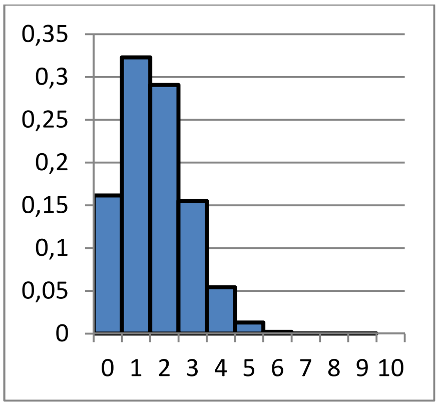
$n = 15$. $B(15, 0'485)$.



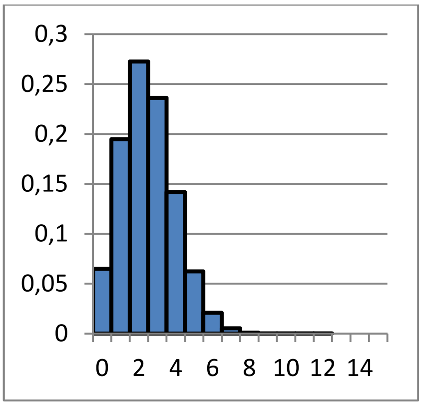
$n = 20$. $B(20, 0'485)$.

Observa como ahora el histograma no es simétrico.

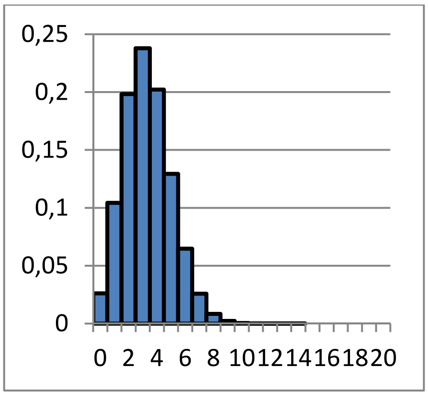
- *Se lanza un dado. Llamamos "éxito" a que salga un 5. Dibujamos los histogramas de la distribución de probabilidad binomial para* $n = 10$, 15 y 20.



$n = 10$. $B(10, 1/6)$.



$n = 15$. $B(15, 1/6)$.



$n = 20$. $B(20, 1/6)$.

La probabilidad viene indicada por el área bajo es histograma.

Actividades propuestas

8. Lanzamos dos monedas y contamos el número de caras. Calcula la media y la desviación típica de dicho experimento.

9. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 3 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 1. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 1.

10. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 5 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 3. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 3.

11. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar una moneda 15 veces el número de caras sea menor que 5.

12. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar un dado 15 veces el número de cincos sea mayor que 10.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Parámetros de la distribución binomial

Vamos a dar la expresión de los parámetros de una distribución binomial, su media, varianza y desviación típica. No vamos a demostrar sus expresiones, pero si vamos a calcularlas para algunos casos particulares, que generalizaremos.

Imagina una distribución binomial para $n = 1$, con probabilidad de éxito p: $B(1, p)$. Entonces la distribución de probabilidad es:

X	$p(x)$	$x \cdot p(x)$	$x^2 \cdot p(x)$
0	q	0	0
1	p	p	p
Suma	1	$\mu = p$	$E(x^2) = p$

Luego $\mu = p$ y $\sigma^2 = E(x^2) – E^2(x) = p – p^2 = p(1 – p) = p\ q$.

Hacemos lo mismo para $n = 2$, con probabilidad de éxito p: $B(2, p)$.

X	$p(x)$	$x \cdot p(x)$	$x^2 \cdot p(x)$
0	q^2	0	0
1	$2\ q\ p$	$2\ q\ p$	$2\ q\ p$
2	p^2	$2\ p^2$	$4\ p^2$
Suma	1	μ	$E(x^2)$

Luego $\mu = 2p$ y $\sigma^2 = E(x^2) – E^2(x) = 2\ q\ p + 4\ p^2 – (2p)^2 = 2\ p\ q$.

Y ahora para $n = 3$, con probabilidad de éxito p: $B(3, p)$.

X	$p(x)$	$x \cdot p(x)$	$x^2 \cdot p(x)$
0	q^3	0	0
1	$3\ q^2\ p$	$3\ q^2\ p$	$3\ q^2\ p$
2	$3\ q\ p^2$	$6\ q\ p^2$	$12\ q\ p^2$
3	p^3	$3\ p^3$	$9\ p^3$
Suma	1	μ	$E(x^2)$

Luego $\mu = 3\ q^2\ p + 6\ q\ p^2 + 3\ p^3 = 3\ p(q^2 + 2\ q\ p + p^2) = 3\ p(q + p)^2 = 3\ p$ y

$\sigma^2 = E(x^2) – E^2(x) = 3\ q^2\ p + 12\ q\ p^2 + 9\ p^3 – (3p)^2 =.3\ p(q^2 + 2\ q\ p + p^2) + 6\ q\ p^2 + 6\ p^3 – 9p^2 =.$

$3\ p(q + p)^2 + 6\ p^2\ (q + p) – 9p^2 = 3\ p – 3p^2 = 3\ p\ (1 – p) = 3\ p\ q$.

¡Piensa! Queremos generalizar estos resultados para cualquier valor de n. ¿Cuánto crees que valdrá la media y la varianza?

En efecto:

En una distribución binomial $B(n, p)$ la media vale siempre:

$$E(x) = \mu = n \cdot p,$$

la varianza $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$ y

la desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$.

Actividades propuestas

13. En el control de calidad de bombillas de bajo consume de una fábrica se ha comprobado que el 90 % son buenas. Se toma una muestra de 500 bombillas. Por término medio, ¿cuántas serán de buena calidad? Calcula la media, varianza y desviación típica.

14. En el estudio sobre una nueva medicina para la hepatitis C se ha comprobado que produce curaciones completas en el 80 % de los casos tratados. Se administra a mil nuevos enfermos, ¿cuántas curaciones esperaremos que se produzcan?

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Desigualdad de Chebycheff

El histograma de una distribución de probabilidad nos indica la probabilidad de un suceso, calculando el área de dicho suceso.

La desigualdad de *Chebycheff* nos proporciona una cota de dicha probabilidad. Se suele utilizar cuando solo conocemos la media y la desviación típica o varianza de la distribuciónde probabilidad que estamos estudiando. Nos dice que el área comprendida entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$ es menor que 0'89, y que el área comprendida entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$ es menor que 0'75. Es una cota mínima de probabilidad, casi siempre superada.

La desigualdad, que se puede demostrar utilizando la definición de varianza, nos proporciona la probabilidad de que x se encuentre entre dos valores $\mu - k\sigma$ y $\mu + k\sigma$, y afirma que:

$$P(|x - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - 1/k^2.$$

Por tanto, como habíamos dicho:

$$P(|x - \mu| \leq 2\sigma) \geq 1 - 1/4 = 3/4 = 0'75.$$

$$P(|x - \mu| \leq 3\sigma) \geq 1 - 1/9\ )\ 8/9 = 0'89.$$

Actividades resueltas

- *En el juego de apostar* 10 *euros a que sale cara al tirar una moneda, y si ganamos abandonar el juego, pero si perdemos apostar el doble* 20 *euros… Calcula la esperanza matemática, la desviación típica y determina según la desigualdad de Chebycheff los intervalos correspondientes de* 2 *y* 3 *desviaciones típicas así como su probabilidad.*

Al calcular la media obtenemos que $\mu = 0$, y que la desviación típica $\sigma \approx 80$, por tanto:

$$P(|x - \mu| \leq 2\sigma) \geq 1 - 1/4 = 0'75 \Rightarrow P(|x - 0| \leq 2\cdot 80) \geq 0'75 \Rightarrow P(-160 \leq x \leq 160) \geq 0'75$$

$$P(|x - \mu| \leq 3\sigma) \geq 1 - 1/9 = 0'89 \Rightarrow P(|x - 0| \leq 3\cdot 80) \geq 0'89 \Rightarrow P(-240 \leq x \leq 240) \geq 0'89$$

Actividades propuestas

15. Utiliza la desigualdad de *Chebycheff* para indicar los intervalos de probabilidad para el juego de apostar a obtener más de 7 al tirar dos dados. (*Ayuda*: $\mu = -1/6$ y $\sigma \approx 0'986$).

16. En la fábrica de bombillas de bajo consumo con $B(500, 0'9)$ utiliza la desigualdad de *Chebycheff* para determinar los intervalos tales que $P(a \leq x \leq b) \geq 0'75$, y que $P(c \leq x \leq d) \geq 0'89$.

17. En la medicina para la hepatitis C con $B(1000, 0'8)$ utiliza la desigualdad de *Chebycheff* para determinar los intervalos tales que la probabilidad de curación sea $P(a \leq x \leq b) \geq 0'75$, y que $P(c \leq x \leq d) \geq 0'89$.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Distribuciones de probabilidad continuas

La distribución binomial se utiliza para describir fenómenos aleatorios discretos: número de caras, número de curaciones, número de bombillas de buena calidad… No tendría sentido decir que se habían obtenido 0’3 cincos al tirar unos dados. Ya sabes que otras variables aleatorias pueden ser continuas, como la estatura de una persona, la medida de una pieza de fabricación… Vamos a estudiar una distribución de probabilidad continua adecuada para estos casos. Hay más distribuciones de probabilidad discretas y continuas, pero la distribución binomial para variables discretas y la distribución normal para variables continuas son las más importantes, las más utilizadas.

Ya hemos analizado las propiedades de las funciones de cuantía de las variables discretas. Las **funciones de densidad de las variables continuas** $f(x)$ deben verificar también una serie de propiedades que estudiarás con más rigor el próximo curso.

Propiedades de la función de densidad $f(x)$:

1) $f(x) \geq 0$. Es natural, pues estamos midiendo probabilidades.
2) El área total bajo la curva debe medir 1. Ya que la probabilidad del suceso seguro es 1.

Propiedades de la función de distribución $F(x)$:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$
2) Es una función creciente en todo su dominio de definición
3) $F(x_{\text{máximo}}) = 1$.

Algo que puede sorprenderte es que la probabilidad de que una persona mida exactamente 1’8 metros es 0. ¿Por qué? La razón es que se debe calcular el área de un rectángulo de base 0, que es 0. Es una situación nueva pues hasta ahora parecía que si la probabilidad era nula el suceso era imposible y no es así, lo que se verifica es que si el suceso es imposible entonces la probabilidad es nula.

Tendríamos que calcular esa área en un intervalo, por ejemplo entre 1’79 y 1’81. Ya sabes que toda medida lleva implícita una cierta imprecisión. Si decimos que Juan mide 1’8 metros como habrá una imprecisión de por ejemplo $\pm$0’01, estaremos en un cierto intervalo. No estamos diciendo que no sea posible que Juan mida exactamente 1’8, sino que su probabilidad es nula.

$$P(x = 1'8) = \int_{1'8}^{1'8} f(x)dx = 0.$$

$$P(1'79 < x < 1'81) = \int_{1'79}^{1'81} f(x)dx.$$

Como consecuencia de lo anterior se tiene que:

$$P(c \leq x \leq d) = P(c < x \leq d) = P(c \leq x < d) = P(c < x < d) = \int_c^d f(x)dx.$$

En las distribuciones de variable aleatoria continua, las frecuencias relativas se corresponden cuando se consideran probabilidades con la función de densidad. Para calcular una probabilidad debemos calcular el área bajo la curva función de densidad. Las frecuencias relativas acumuladas se corresponden con lo que denominamos función de distribución de probabilidad.

La función: $F(t) = P(a < x < t) = \int_a^t f(x)dx$ es la función de distribución.

Verifica, como sabes, que $F'(x) = f(x)$, es decir, la función de distribución es la función primitiva de la función de densidad. Conocida una podemos calcular la otra.

Parámetros estadísticos en una distribución continua

Ya sabes que una integral la podemos considerar como una suma. Por eso los parámetros estadísticos en una distribución de probabilidad continua se definen igual que en una distribución discreta cambiando la suma por una integral.

Si el dominio de definición es el intervalo $[a, b]$ entonces la media y la varianza se definen como:

$$\mu = E(x) = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx = 0\;;\; \sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx = 0$$

donde $f(x)$ es la función de densidad.

La media y la varianza siguen verificando las mismas propiedades que en el caso discreto.

Actividades resueltas

- *Definimos la función de densidad* $f(x) = (-1/36)(x^2 - 9)$ *en el intervalo* $[-3, 3]$. *Prueba que verifica las condiciones de una función de densidad y calcula la media y la varianza.*

  1) La función es una parábola. En el intervalo dado $[-3, 3]$ toma valores positivos luego verifica la primera propiedad: $f(x) \geq 0$ en todo el dominio de definición $[-3, 3]$.

  2) Para ser función de densidad también debe verificar que $\int_a^b f(x) \cdot dx = 1 = \int_{-3}^3 (\frac{-1}{36}(x^2 - 9)) \cdot dx$.

Calculamos la integral:

$$\int_{-3}^3 (-\frac{1}{36})(x^2 - 9)) \cdot dx = (-\frac{1}{36}) \cdot \int_{-3}^3 (x^2 - 9) \cdot dx = (-\frac{1}{36}) \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_{-3}^3 =$$

$$(-\frac{1}{36}) \cdot \left[\left(\frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3\right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - 9 \cdot (-3)\right)\right] = (-\frac{1}{36}) \cdot \left[\frac{3^3}{3} + \frac{3^3}{3} + 9(-3-3)\right] = (-\frac{1}{36}) \cdot (18 - 54) = 1$$

Cálculo de la media:

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-3}^3 x \cdot (\frac{-1}{36}(x^2 - 9)) \cdot dx = \frac{-1}{36} \int_{-3}^3 x \cdot (x^2 - 9) \cdot dx = \frac{-1}{36} \int_{-3}^3 (x^3 - 9x) \cdot dx = \frac{-1}{36}\left[\frac{x^4}{4} - 9\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^3 =$$

$$\frac{-1}{36}\left[\left(\frac{3^4}{4} - 9\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{(-3)^4}{4} - 9\frac{(-3)^2}{2}\right)\right] = 0$$

Cálculo de la varianza:

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-3}^3 x^2 \cdot (\frac{-1}{36}(x^2 - 9)) \cdot dx = \frac{-1}{36} \int_{-3}^3 (x^4 - 9x^2) \cdot dx = \frac{-1}{36}\left[\frac{x^5}{5} - 9\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^3 =$$

$$\frac{-1}{36}\left[\left(\frac{3^5}{5} - 9\frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{(-3)^5}{5} - 9\frac{(-3)^3}{3}\right)\right] = \frac{-1}{36}\left[2\frac{3^5}{5} - 18\frac{3^3}{3}\right] = 1'8$$

La media vale 0 y la varianza 1'8. La desviación típica vale aproximadamente 1'34.

Actividades propuestas

18. Calcula A para que $f(x) = A(x^2 - 16)$ sea una función de densidad. Determina el dominio. Calcula la media y la varianza.

1.5. Distribución normal

La distribución normal es la distribución más importante tanto en lo que se refiere a la teoría estadística (debido a sus múltiples aplicaciones en inferencia) como en lo que se refiere a sus aplicaciones prácticas. Esta distribución fue propuesta independientemente por *Pierre Simon de Laplace* y *Carl Friedrich Gauss* a finales del siglo XVIII y principios del XIX. Por este motivo, también se la conoce como *distribución de Gauss*. En algunas ocasiones se refiere a ella como *campana de Gauss*, debido a la forma de campana de su función de densidad. Aunque se dice (en broma) que los físicos creen que fue descubierta por un matemático y que los matemáticos opinan que la descubrió un físico.

La expresión de su función de densidad y de su función de distribución es complicada:

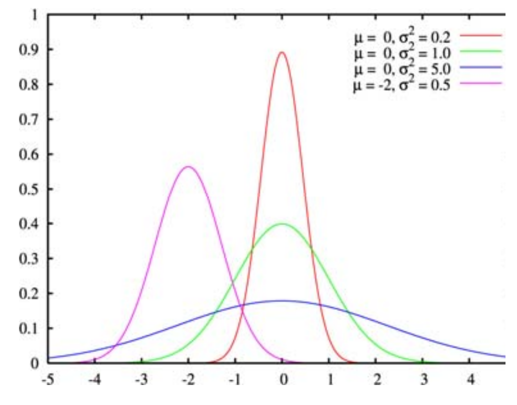
$$N(\mu,\sigma)=\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\cdot dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donde μ es la media y σ la desviación típica. Para denotar que la variable aleatoria X sigue una distribución normal de parámetros μ y σ^2 se escribe $N(\mu, \sigma)$.

¡No te asustes! ¡No vamos a usar integrales! Son expresiones demasiado complicadas, y además, la integral que aparece no es posible resolverla. Y entonces, ¿qué hacemos? Por ejemplo se podría tabular $N(\mu, \sigma)$, pero serían necesarias infinitas tablas, una para cada uno de los posibles valores de μ y de σ.

Utilizando las propiedades de la esperanza matemática y de desviación típica podemos comprobar que basta con tabular una de ellas, la normal de media 0 y desviación típica 1, $N(0, 1)$, que vamos a denominar **distribución normal estándar**. Por tanto, como la función de distribución no puede calcularse analíticamente, hace que los cálculos de probabilidades en la distribución normal se tengan que realizar utilizando tablas que encontraras más adelante.

Dada una variable aleatoria x, de media μ y desviación típica σ se llama **variable aleatoria tipificada** a la variable z, obtenida por $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$, con lo que se obtiene una variable aleatoria de media 0 y desviación típica 1.



Curvas normales. Fuente: Wikipedia

Observaciones:

1) La transformación, tipificación, supone una traslación, que cambia el origen de μ a 0, y una contracción o dilatación.
2) Se conservan las áreas bajo ambas curvas, una vez que usemos las variables tipificadas.
3) La variable aleatoria tipificada es adimensional, pues se obtiene dividiendo magnitudes de la misma dimensión, lo que permite poder comparar variables aleatoria diferentes, como estaturas de una población, y pesos de recién nacidos.
4) En la figura del margen puedes observar varias curvas normales, la dibujada en verde es la tipificada. Observa que todas las curvas normales son simétricas, de eje de simetría $x = \mu$ (o $x = 0$ en el caso de $N(0, 1)$). Tienen la media, la moda y la mediana iguales. En los puntos de abscisa $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$ tienen un punto de inflexión. Son crecientes hasta $x = \mu$, en ese punto se alcanza un máximo, y decrecientes de $x = \mu$ en adelante.
5) La expresión de la función de densidad tipificada es: $N(0,1)=\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, N(0, 1)

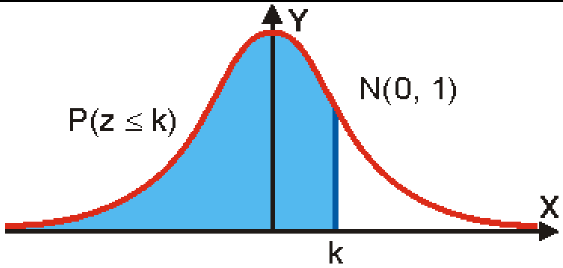


Tabla de la uam: Universidad Autónoma de Madrid

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Vamos ahora a observa con cuidado la tabla para aprender a calcular, con ella, probabilidades.

No están todos los valores. Como el área total bajo la curva es 1, y la curva es simétrica $\phi(-z) = 1 - \phi(z)$.

Actividades resueltas

- *Utiliza la tabla para calcular las probabilidades:* a) $P(z \leq 1)$; b) $P(z \leq 2'46)$; c) $P(z \geq 1)$; d) $P(z \leq -1)$; e) $P(0'5 < z < 1'5)$.

a) $P(z \leq 1)$: Buscamos en la primera columna el 1, y como no tenemos cifras decimales, buscamos en la primera fila el 0. Obtenemos que $P(z \leq 1) = 0'8413$.

b) $P(z \leq 2'46)$: Hacemos lo mismo, buscamos el 2'4 en la primera columna y el 0'06 en la primera fila. Obtenemos $P(z \leq 2'46) = 0'9931$

c) $P(z \geq 1)$: Como el área total es 1 y la curva es simétrica, $P(z \geq 1) = 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0'8413 = 0'1587$.

d) $P(z \leq -1)$: Como el área total es 1 y la curva es simétrica, $P(z \leq -1) = 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0'8413 = 0'1587$.

e) $P(0'5 < z < 1'5)$: Calculamos $P(0'5 < z < 1'5) = P(z < 1'5) - P(z < 0'5)$. Buscamos en la tabla y obtenemos $P(0'5 < z < 1'5) = P(z < 1'5) - P(z < 0'5) = 0'9332 - 0'6915 = 0'2417$.

Actividades propuestas

20. Utiliza la tabla de la normal tipificada para calcular:

a) $P(z \leq 0'37)$; b) $P(z < 1'51)$; c) $P(z \geq 0'87)$; d) $P(z \leq -0'87)$; e) $P(0'32 < z < 1'24)$.

Para calcular probabilidades en una $N(\mu, \sigma)$ basta tipificar las variables y buscar las probabilidades en la tabla de $N(0, 1)$.

Actividad resuelta

- *El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media* 5'7 *kW y desviación típica* 1'1 *kW. Calcula la probabilidad de que al tomar una persona al azar su consumo esté comprendido entre* 5 *kW y* 6 *kW.*

Debemos calcular $P(5 < x < 6)$ en una distribución $N(5'7, 1'1)$. Tipificamos las variables:

$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-5'7}{1'1}$, por tanto $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{5-5'7}{1'1} = \frac{-0'7}{1'1} = -0'636$ y $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{6-5'7}{1'1} = \frac{0'3}{1'1} = 0'2727$.

Entonces:

$P(5 < x < 6) = P(-0'636 < z < 0'2727) = P(z < 0'2727) - P(z < -0'636) =$

$P(z < 0'2727) - (1 - P(z < 0'636)) = P(z < 0'2727) - 1 + P(z < 0'636) = 0'6064 - 1 + 0'7389 = 0'3453$.

21. Utiliza la tabla de la normal tipificada para calcular:

a) $P(z \leq 0'37)$; b) $P(z < 1'51)$; c) $P(z \geq 0'87)$; d) $P(z \leq -0'87)$; e) $P(0'32 < z < 1'24)$.

Actividades propuestas

22. Se trata a pacientes con trastorno del sueño con un tratamiento que modela el número de días con una distribución normal de media 290 días y desviación típica 30. Calcula la probabilidad de que al tomar una persona al azar su tratamiento dure más de 300 días.

23. En una estación meteorológica que las precipitaciones anuales de lluvia tienen una media de 450 mm/m^2 con una desviación típica de 80 mm/m^2. Suponemos que la variable aleatoria sigue una distribución normal. Calcula la probabilidad de que: a) Este próximo año la precipitación exceda los 500 mm/m^2. b) La precipitación esté entre 400 y 510 mm/m^2. c) La precipitación sea menor de 300 mm/m^2.

24. En el caso del problema anterior de una $N(450, 80)$ determina la probabilidad de que la variable esté en los intervalos $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

El resultado es el mismo para cualquier normal, verificándose que:

$$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = P(-1 < z < 1) = 0'6826;$$

$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(-2 < z < 2) = 0'9544;$$

$$P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = P(-3 < z < 3) = 0'9974$$

como puedes comprobar calculándolo con la tabla pues $P(-a < x < a) = 2\ P(x < a) - 1$.

En una distribución normal los valores comprendidos entre $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ se consideran "normales" (desde el punto de vista estadístico.

- ✓ Un año con precipitaciones entre $[\mu + \sigma, \mu + 2\sigma]$ se considera lluvioso.
- ✓ Un año con precipitaciones entre $[\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma]$ se considera muy lluvioso.
- ✓ Un año con precipitaciones entre $[\mu - 2\sigma, \mu - \sigma]$ se considera seco.
- ✓ Un año con precipitaciones entre $[\mu - 3\sigma, \mu - 2\sigma]$ se considera muy seco.

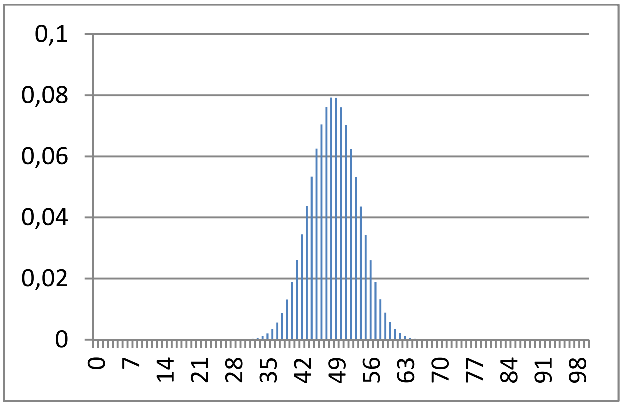
Y esto mismo se generaliza para cualquier distribución normal.

Actividades propuestas

25. En una fábrica de coches se hacen pruebas para conocer el tiempo que tardan sus vehículos en alcanzar la velocidad punta. Se considera que esa variable aleatoria tiempo se distribuye según una distribución normal de media 20 s y desviación típica 2 s. Calcula las probabilidades siguientes: a) Que un vehículo alcance su velocidad punta a los 25 s. b) Alcance su velocidad punta en menos de 25 s. c) La alcance entre 18 s y 22s. d) ¿Qué velocidad punta consideras que tendrán los vehículos rápidos? e) ¿Y los lentos?

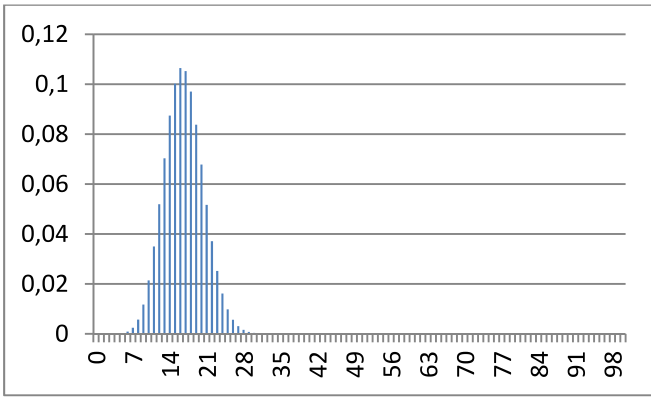
1.6. Aproximación de la binomial a la normal

Hemos visto que la distribución binomial $B(n, p)$ tiene una media $\mu = np$, y una varianza $\sigma = npq$. Queremos analizar en este apartado si la distribución binomial "*se ajusta bien*" a una normal de igual media y desviación típica. Entenderemos que el ajuste es bueno cuando el área bajo la normal en un cierto intervalo sea *casi igual* al área de los rectángulos de la binomial.



B(100, 0'485)

Al estudiar la distribución binomial representamos muchos histogramas de distintas binomiales donde puedes observar que, incluso para valores de n bajos, el ajuste no es malo. Representamos el histograma de $B(100, 0'485)$ sobre el sexo de los bebés y parece que el ajuste es muy bueno. Al margen puedes observar el histograma del experimento tirar 100 dados y contar el número de cincos: $B(100, 1/6)$ que resultaba muy asimétrico. ¿Qué opinas? ¿Se ajustan a la normal?



B(100, 1/6)

Otra forma de hacer la comparación podría ser comparar las áreas en determinados intervalos entre la curva normal y el histograma de la distribución binomial. Por ejemplo para $B(3, 1/2)$ para $x = 1$ calculamos el área bajo el histograma para el intervalo (0'5, 1'5) que es 0'38. La media es $\mu = 3/2 = 1'5$ y $\sigma = \sqrt{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0'866$. Tipificamos la normal $N(3/2, 0'866)$ y calculamos:

$$P(0'5 < x < 1'5) = P(\frac{0'5-1'5}{0'866} < z < \frac{1'5-1'5}{0'866}) = P(-1'1547 < z < 0) = P(z < 0) - P(z < -1'1547) =$$

$$P(z < 0) - (1 - P(z < 1'1547)) = P(z < 0) + P(z < 1'1547) - 1 = 0'5 + 0'8749 - 1 = 0'3749.$$

Hasta en este caso tan desfavorable el ajuste es bueno.

Se puede demostrar que el ajuste es bueno entre binomial y normal cuando $npq \geq 9$.

Al estudiar la distribución binomial no hicimos los cálculos en muchos de los ejercicios pues eran muy laboriosos. Sin embargo mirar la tabla de la normal es bastante más rápido y sencillo.

Observa también que no hemos tomado el valor $x = 1$ pues para tomar intervalos le hemos restado a 1 y sumado a 1 la longitud del intervalo: 0'5, y hemos tomado el intervalo (0'5, 1'5).

Actividad resuelta

- *En una determinada población se divide la población activa en dos grupos, los que trabajan en agricultura y servicios que son un 44 %, y el resto. Se elige al azar una muestra de 200 personas*

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

entre la población activa, ¿qué probabilidad hay de que haya entre 80 y 100 personas del primer grupo?

Es un problema de distribución binomial B(200, 0’44) pues una persona o pertenece a dicho grupo, o no pertenece. Sabemos que:

$$p(x) == \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{200}{x} \cdot 0'44^x \cdot 0'56^{200-x}$$

Y deberíamos calcular:

$$P(80 \le x \le 100) = \sum_{x=80}^{x=100} p(x) = \sum_{x=80}^{x=100} \binom{200}{x} \cdot 0'44^x \cdot 0'56^{200-x}.$$

Habíamos advertido que el cálculo era laborioso, pero ahora podemos utilizar el ajuste de la binomial a la normal. Calculamos la media y la desviación típica:

$$\mu = np = 200 \cdot 0'44 = 88$$

$$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0'44 \cdot 0'56} = 7'02,$$

por lo que ajustamos con la normal N(88, 7’02).

Como la longitud de cada intervalo es 1, se añade a cada valor 0’5 para ir desde el extremo del intervalo, y no desde el centro.

$$P(80 - 0'5 \le x \le 100 + 0{,}5)$$

Ahora tipificamos:

$$P\left(\frac{80-88-0'5}{7'02} \le z \le \frac{100-88+0'5}{7'02}\right) = P(z \le 1'78) + P(z \le 1'21) - 1 = 0'9625 + 0'8869 - 1 = 0'8494.$$

En el 85 % de los casos habrá entre 80 y 100 personas del primer grupo.

Como npq = 49’28 $\ge$ 9, el ajuste es bueno.

Actividades propuestas

26. Se lanza una moneda mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenidas esté entre 400 y 600? ¿Y de que sea mayor que 800?

27. En una fábrica de bombillas de bajo consumo se sabe que el 70 % de ellas tienen una vida media superior a 1000 horas. Se toma una muestra de 50 bombillas, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 20 y 30 cuya vida media sea superior a mil horas?, ¿y la probabilidad de que haya más de 45 cuya vida media sea superior a 1000 horas?

28. Una compañía aérea ha estudiado que el 5 % de las personas que reservan un billete para un vuelo no se presentan, por lo que venden más billetes que las plazas disponibles. Un determinado avión de la compañía tiene 260 plazas (con lo que suelen reservar hasta 270). Calcula la probabilidad de que lleguen 260 pasajeros. En 500 vuelos de dicho avión, ¿en cuántos consideras que habrá exceso de pasajeros?

1.7. Intervalos de confianza

Queremos ahora resolver otro tipo de problema. En lugar de calcular la probabilidad de un intervalo dado queremos encontrar intervalos con una probabilidad dada.

Utilizaremos una actividad anterior.

Actividades resueltas

- *En una determinada población se divide la población activa en dos grupos, los que trabajan en agricultura y servicios que son un 44 %, y el resto. Se elige al azar una muestra de 200 personas entre la población activa y queremos conocer cuántas pertenecerán al primer grupo con una probabilidad del 0'99.*

Habrá muchos intervalos que resuelvan el problema, pero nos van a interesar intervalos simétricos con respecto a la media. Recuerda μ = np = 200·0'44 = 88 y $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0'44 \cdot 0'56} = 7'02$, por lo que ajustamos con la binomial B(200, 0'44) con la normal N(88, 7'02).

Vamos a tener en cuenta que la longitud de cada intervalo de la binomial es 1, luego vamos añadir 0'5 a cada lado.

$$0'99 = P(88 - 0'5 - k \le x \le 88 + 0'5 + k) = P(\frac{88 - 0'5 - k - 88}{7'02} \le z \le \frac{88 + 0'5 + k - 88}{7'02}) =$$

$$P(\frac{-0'5 - k}{7'02} \le z \le \frac{0'5 + k}{7'02}) = P(z \le \frac{0'5 + k}{7'02}) + P(z \le \frac{-0'5 - k}{7'02}) - 1 = 2P(z \le \frac{0'5 + k}{7'02}) - 1$$

Despejamos:

$$P(z \le \frac{0'5 + k}{7'02}) = \frac{0'99 + 1}{2} = 0'995\,.$$

Buscamos ese valor en la tabla de la curva normal estándar, y obtenemos 2'58, por lo tanto, $\frac{0'5 + k}{7'02} = 2'58$ de donde k = 17'61 ≈ 18, por lo que el intervalo buscado es:

(88 – 18, 88 + 18) = (70, 106).

Volvemos al problema de las encuestas de votos.

Actividad resuelta

- *En una población de 8 millones de votantes elegimos una muestra aleatoria de* 2000 *de la que* 700 *personas nos afirman que van a votar a un determinado partido. ¿Qué podemos asegurar sobre el número de votos que recibirá dicho partido?*

Como 700/2000 = 35, una primera respuesta podría ser que 0'35·8000000 = 2800000 votos, pero, ¿qué confianza podemos tener de ese resultado.

Fijamos un nivel de significación α, o un grado de confianza, 1 – α. Sea α = 0'05 y 1 – α = 0'95.

Sea p la proporción de votantes al partido estudiado. Tenemos una distribución binomial de media μ = np = 2000·p y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot p(1-p)}$. Calculamos la probabilidad de que el número de votantes al partido estudiado de la muestra sea:

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 0'95$$

Pasamos de la distribución binomial a la normal para calcular k y p:

$$P(\mu - k\sigma - 0'5 \leq X \leq \mu + k\sigma + 0'5) \geq 0'95$$

Tipificamos:

$$P(\frac{-k\sigma - 0'5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{+k\sigma + 0'5}{\sigma}) \geq 0'95.$$

Obtenemos que $z = \frac{+k\sigma + 0'5}{\sigma} \geq 1'96$, por lo que $k\sigma + 0'5 \geq 1'96\sigma$. Debemos sustituir μ y α en función de p como se hizo anteriormente y se obtiene que: $0'3280 \leq p \leq 0'3719$, es decir que la proporción de votantes debe estar entre el 33 % y el 37 %.

Actividades propuestas

29. Rehaz los cálculos de la actividad anterior para un nivel de confianza del 99 %.

30. Se investigan los hábitos de consumo de una población de dos millones de personas. Se pasa una encuesta a mil personas y se les pregunta si en su domicilio se cocina con gas, de los que 600 responden afirmativamente. Qué puedes afirmar sobre el número de personas en las que en su domicilio se usa gas con un nivel de confianza del 95 %.

31. Se lanza 600 veces un dado y contamos el número de 5s. a) ¿Cuál es el intervalo simétrico respecto de la media con una probabilidad de 0'99? b) Lo mismo con una probabilidad del 0'6.

32. En una actividad anterior vimos que en una compañía aérea se había estudiado que el 5 % de las personas que reservan un billete para un vuelo no se presentan. Un determinado avión de la compañía tiene 260 plazas. ¿Qué número de reservas n puede aceptar la compañía admitiendo una probabilidad del 0'02 para que el número de reservas supere al número de plazas.

(*Ayuda*: Busca una binomial tal que $p(x > 260) < 0'02 \Rightarrow p(x \leq 260) = 1 - p(x > 260) \geq 0'98$).

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

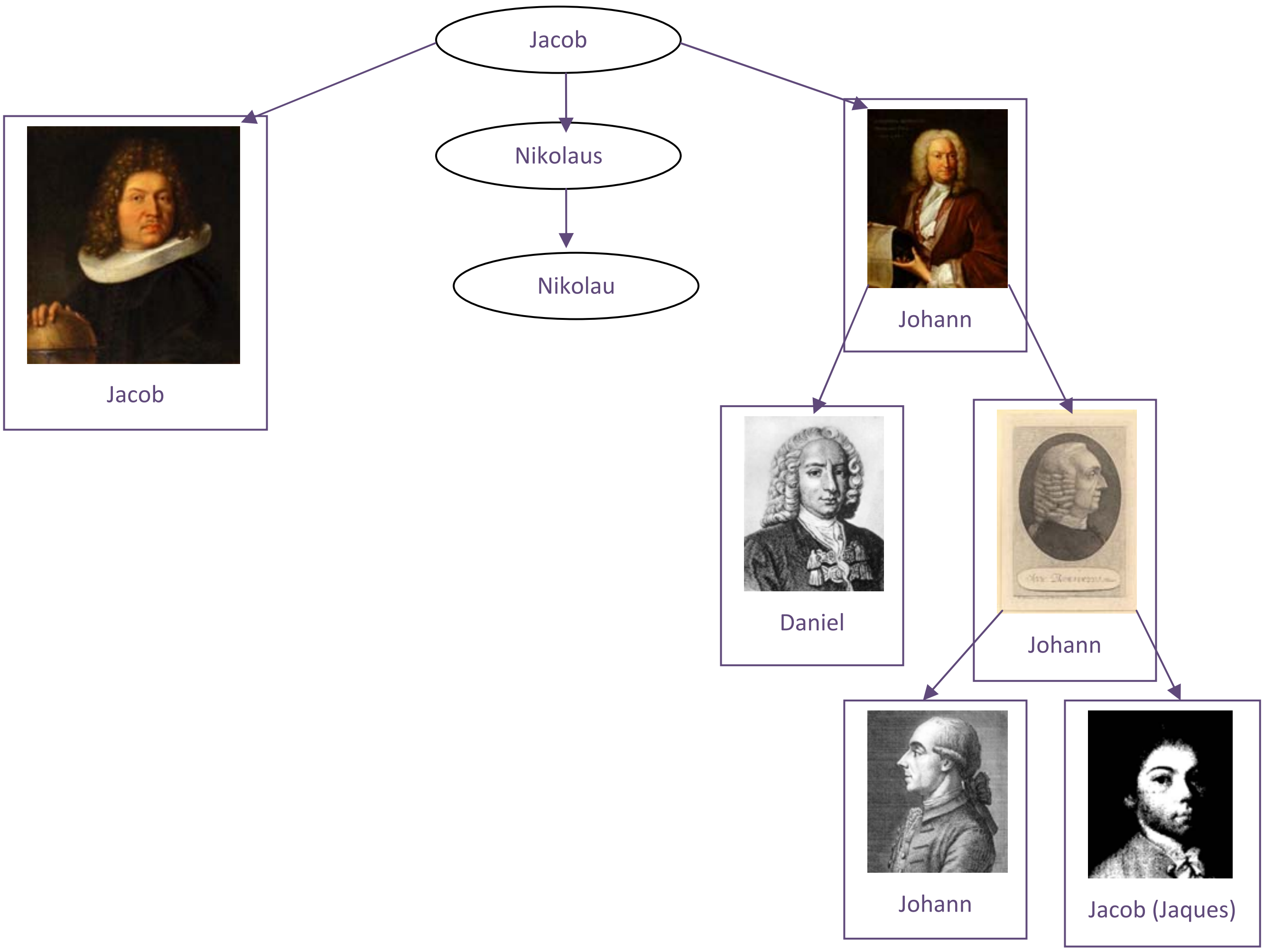
La saga de los Bernoulli

Si te dicen: "*Bernoulli hizo esto o descubrió aquello*" tu puedes preguntar:

- ¿Cuál Bernoulli?

Y es que hubo una familia suiza del siglo XVII en la que hubo padres, hijos, tíos y sobrinos, muchos de ellos matemáticos y físicos con importantes descubrimientos.

El primero de ellos, Jacob *el viejo*, nació en Amberes, Bélgica, pero huyendo de una persecución religiosa pues era hugonote, se trasladó a vivir a Basilea (Suiza) el año 1622. Tuvo un único hijo, Nikolaus, que tuvo varios hijos, dos de ellos matemáticos famosos, Jacob (1654–1705) y Johann (1667–1748), el primero dio su nombre a los números de Bernoulli, y el segundo trabajó en cálculo infinitesimal. Otro de los hijos de Nikolaus, de nombre Nikolau (1687–1759), también fue matemático. Johann tuvo varios hijos, entre ellos, Daniel (1700–1782) que desarrolló en principio de Bernoulli, y Johann (1710–1790), que a su vez también tuvo varios hijos matemáticos, como Johann (1744–1807) y Jacob (1759–1789), también conocido como Jaques, del que recibe el nombre la distribución de Bernoulli.



Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Distribución de Bernoulli

Se llama distribución de Bernoulli a una distribución con sólo dos posibilidades, "éxito" o no éxito. Por ejemplo:

- Tirar una moneda y ver si sale cara
- Tirar un dado y ver si sale un 5.
- Tirar al blanco…

Distribución de Binomial

Si consideramos n variables aleatorias idénticas que siguen una distribución de Bernoulli, la variable aleatoria suma sigue una distribución binomial. Por ejemplo:

- Tirar una moneda 100 veces y contar el número de caras.
- Tirar un dado mil veces y contra el número de cincos.
- Tirar al blanco 20 veces y contar el número de éxitos.

Debe verificarse que la probabilidad sea siempre la misma y que los sucesos sean independientes.

No es una distribución binomial contar el número de bolas rojas que sacamos en 5 extracciones de una bolsa con 10 bolas rojas y 12 bolas de otro color, si la extracción es SIN reemplazamiento, pues la probabilidad va cambiando.

Distribución Normal

La **importancia** de esta distribución se debe a que se utiliza para modelar numerosos fenómenos naturales, médicos y sociales. Son fenómenos en los que influyen muchas variables difíciles de controlar, por lo que podemos suponer que es suma de distintas causas independientes.

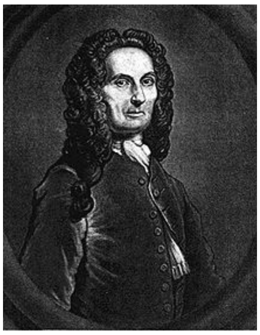
Ejemplos clásicos de fenómenos que se distribuyen según una normal son:

- Fenómenos morfológicos como la estatura o el peso
- Fisiológicos como los efectos de un fármaco
- Sociológicos como los de consumo
- Psicológicos como el cociente intelectual
- El ruido en las telecomunicaciones
- Los errores cometidos al medir una magnitud…

La **historia** de la distribución normal. Aparece por primera vez con *Abraham de Moivre* en un artículo publicado en 1733, sobre la distribución binomial para valores grandes de n.

El resultado fue trabajado por *Laplace* en su libro sobre la Teoría de las probabilidades trabajando sobre errores.

También sobre errores la utilizó *Gauss*, analizando datos astronómicos. En su honor también se denomina a la curva normal, *campana de Gauss*.



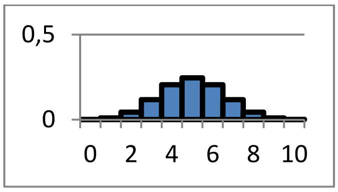
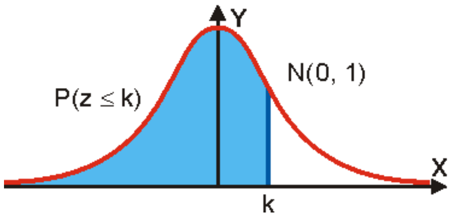
Moivre

Laplace

Gauss

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Propiedades de función de cuantía	1) $p(x) \geq 0$ 2) $\Sigma\ p(x) = 1$.	Lanzamos dos monedas y contamos el número de caras: **Número de caras (x):** 0 | 1 | 2 **Función de cuantía ($p(x)$):** 1/4 | 1/2 | 1/4 **Función de distribución $F(x)$:** 1/4 | 3/4 | 4/4
Propiedades de función de distribución	1) $0 \leq F(x) \leq 1$ 2) $F(x)$ es una función creciente 3) $F(x_{Máximo}) = 1$	
Esperanza matemática	$E(x) = \mu = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$	$\mu = 0\cdot(1/4) + 1\cdot(1/2) + 2\cdot(1/4) = 1$
Varianza y desviación típica	$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = E(x^2) - E^2(x)$ $\sigma = \sqrt{E(x^2) - E^2(x)}$	$\sigma^2 = (0-1)^2\cdot(1/4) + (1-1)^2\cdot(1/2) + (2-1)^2\cdot(1/4) = 1/2$. $\sigma = \sqrt{1/2}$
Distribución binomial	$B(n, p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$ $E(x) = \mu = n\cdot p$, $\sigma^2 = n\cdot p\cdot q = n\cdot p\cdot(1-p)$	 $B(10, 1/2)$.
Distribución normal	$N(\mu, \sigma) = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	
Aproximación de la binomial a la normal	Una binomial con $npq \geq 9$ se considera se ajusta bien a una normal de igual media y desviación típica.	

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Se lanza un dado tres veces y se cuanta el números de treses que aparecen. Dibuja el histograma, la función de cuantía y la función de distribución. Calcula la media y la desviación típica.

2. Lanzamos 4 monedas. Por cada cara que salga ganamos 5 euros, pero debemos pagar 3 euros por jugar. ¿Cuánto esperas ganar en una jugada? ¿Y en 20 jugadas? ¿Y en 100 jugadas?

3. Disponemos de dos urnas, la primera con 6 bolas idénticas numeradas del 1 al 6; la segunda con 4 bolas idénticas numeradas del 1 al 4. Sacamos a la vez una bola de cada urna, y consideramos la variable aleatoria, "suma de puntos obtenidos". A) Calcula la distribución de probabilidad y dibuja el histograma correspondiente. B) Si sacamos más de 5 puntos ganamos 10 euros, y en caso contrario perdemos la misma cantidad. ¿Es un juego equitativo?

4. La población activa de un cierto país se puede dividir en los que tienen estudios superiores y los que no los tienen, siendo el primero de un 20 %. Elegimos 10 personas de la población activa al azar. Escribe la expresión de todas las posibilidades y sus probabilidades. Calcula la probabilidad de que haya 9 o 10 que tengan estudios superiores.

5. Si $p(x)$ es la probabilidad de tener x éxitos en una distribución binomial $B(n, p)$, y $p(x+1)$ es la de obtener $x+1$ éxitos, comprueba que se verifica la siguiente relación recurrente:

$$p(x+1) = \frac{p(x)}{x+1}(n-x)\frac{p}{q}$$

6. En una ruleta hay 37 números numerados del 0 al 36, de los cuales 18 son pares y 18 impares. Si sale el 0 gana la banca. Jugamos al dos por 1 a impar, apostamos 10 euros a impar, y la banca nos paga 20 euros si sale un impar, y se queda con nuestros 10 euros si no sale, ¿Te parece un juego equitativo?

7. Juego de San Petersburgo: Se lanza una moneda no trucada hasta que aparece cara. Si sale en el primer lanzamiento, se ganan 10 euros, si en el segundo, 20, si en el tercero, 40, … y en el n-ésimo, $10\cdot 2^n$. Calcula la ganancia media si sólo se puede lanzar 5 veces la moneda. ¿Y si se puede lanzar 10 veces?

8. Lanzamos un dado no trucado mil veces y contamos el número de 5, ¿qué número de éxitos esperamos con una probabilidad no inferior al 0'95, es decir, en el intervalo media menos dos veces la desviación típica y media más dos veces la desviación típica?

9. Calcula A para que la función siguiente sea una función de densidad de probabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ Ax & si\ 0 \le x < 8 \\ A(16-x) & si\ 8 \le x < 16 \\ 0 & si\ x > 16 \end{cases}$$

   a) Dibuja su gráfica y calcula las siguientes probabilidades: $P(x< 5)$; $P(6 < x < 10)$; $P(x > 12)$.

   b) Calcula la media y la desviación típica

10. Calcula A en cada uno de los casos siguientes para que la función $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad.

a) $f(x) = Ax^2(x - 3)$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$.

b) $f(x) = Ax\,(x - 3)^2$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$

c) $f(x) = Ax^3(x - 3)$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$

d) $f(x) = Ax^2(x - 3)^2$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$

Calcula en cada caso $P(x< 1)$ y $P(x > 2)$.

Determina la media y la varianza. Analiza las diferencias.

11. En una distribución binomial $B(10, 0'3)$ calcula $P(x = 0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x = 10)$ y $P(x = 7)$. Determina también la media y la desviación típica.

12. Lanzamos 5 monedas, calcula las probabilidades de obtener:

a) 0 caras, b) 1 cara, c) 2 caras, d) 3 caras

13. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(z = 0)$, b) $P(z < 0)$, c) $P(z = 1'82)$, d) $P(z > 1'82)$.

14. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(z > 4)$, b) $P(z < 4)$, c) $P(z > 1)$, d) $P(z < 1)$.

15. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(1 < z < 2)$, b) $P(-1'3 < z < 4)$, c) $P(-0'2 < z < 2'34)$, d) $P(-1 < z < 1)$.

16. Calcula en una distribución normal $N(1, 2)$ las probabilidades siguientes:

a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.

17. Calcula en una distribución normal $N(0'5, 0'2)$ las probabilidades siguientes:

a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.

18. Calcula en una distribución normal $N(1, 1/2)$ las probabilidades siguientes:

a) $P(1 < x < 2)$, b) $P(-1'3 < x < 4)$, c) $P(-0'2 < x < 2'34)$, d) $P(-1 < x < 3)$.

19. En una distribución binomial $B(10, 0'3)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x = 0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x = 10)$ y $P(x = 7)$. Compara con los resultados obtenidos en el ejercicio 9.

20. En una distribución binomial $B(100, 0'4)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x > 40)$, $P(x \leq 50)$, $P(x \geq 50)$ y $P(40 \leq x \leq 50)$.

21. En una distribución binomial $B(1000, 0'5)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x < 200)$, $P(x = 150)$, $P(x < 150)$ y $P(50 \leq x \leq 150)$.

22. En una distribución binomial $B(1000, 0'05)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x > 200)$, $P(x = 200)$, $P(x < 200)$ y $P(50 \leq x \leq 200)$.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

23. Una fábrica de móviles ha comprobado que el 1 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 móviles al azar. Calcula la media y la desviación típica. Calcula la probabilidad de que haya más de 2 móviles defectuosos.

24. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es de 0’4. Juegan 6 partidas. Calcula la probabilidad de que:

a) María gane alguna vez.

b) Raquel gane al menos una vez.

c) Raquel gane más de la mitad de las partidas.

d) María gane 2 partidas.

25. Las estaturas de las personas de una cierta población se distribuyen según una normal de media 180 cm y desviación típica 15 cm. Determina las probabilidad de que:

a) Una persona tenga una estatura superior a 190 cm.

b) Una persona tenga una estatura menor a 160 cm.

c) ¿Qué proporción de personas tienen una estatura comprendida entre 160 cm y 190 cm?

26. En un examen para entrar en un cuerpo del Estado se sabe que los puntos obtenidos se distribuyen según una normal de media 100 y desviación típica 10 puntos. Determina la probabilidad de que:

a) Un opositor obtenga 120 puntos.

b) Si para aprobar es necesario tener más de 120 puntos, ¿Qué porcentaje de opositores aprueban?

c) Si aprueban únicamente los que están entre el 20 % de los mejores, ¿cuántos puntos de obtener un opositor para aprobar?

AUTOEVALUACIÓN

1. Se lanza un dado tres veces y se anota el números de cuatros que aparecen. La distribución de probabilidad que tenemos es:

a) $B(4, 1/6)$ b) $B(4, 1/4)$ c) $B(3, 1/6)$ d) $B(3, 5/6)$

2. En la distribución anterior, la media es:

a) $\mu = 4/6$ b) $\mu = 1/2$ c) $\mu = 15/6$ d) $\mu = 1$

3. Y la **varianza** es:

a) $\sigma^2 = 1/4$ b) $\sigma^2 = 1/3$ c) $\sigma^2 = 1/2$ d) $\sigma^2 = 1/5$

4. Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad $P(z \le 2'02)$, que vale:

a) $P(z \le 2'46) = 0'0217$ b) $P(z \le 2'46) = 0'9772$ c) $P(z \le 2'46) = 0'0228$ d) $P(z \le 2'46) = 0'9783$

5. Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad $P(0'5 < z < 1'5)$, que vale:

a) 0'2427 b) 0'9332 c) 0'6915 d) 0'2742

6. Sin mirar la tabla, ni tipificar la variable, la probabilidad de $P(x < \mu)$ es:

a) –0'4 b) 0'5 c) 0'6 d) No puede saberse

7. En una distribución binomial $B(10, 0'3)$ el valor de $P(x = 0)$ es:

a) 0'11 b) 0'16 c) 0'00001024 d) 0'8

8. El 2 % de las pastillas de freno fabricadas se sabe que son defectuosas. En una caja con 2000 pastillas, la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosas es:

a) 0'6011 b) 0'7635 c) 0'9357 d) 0'8655

9. Una fábrica de ordenadores ha comprobado que el 5 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 ordenadores al azar. Determina si la probabilidad de que no haya ninguno defectuoso es:

a) 0'5980 b) 0'4027 c) 0'9357 d) 0'8074

10. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es 2/3. Juegan 4 partidas. Determina si la probabilidad de que María gane alguna vez es:

a) 0'0123 b) 0'5 c) 0'8972 d) 0'9877

Autora: Raquel Caro
Revisores: Leticia González y Álvaro Valdes
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Problemas de Selectividad

1. Un árbitro de fútbol ha observado que en el tipo de partidos que él arbitra un 70 % de los penaltis terminan en gol. Un partido se pretende decidir mediante una tanda de 10 lanzamientos de penalti por cada equipo. El primer equipo ya ha lanzado sus penaltis y ha obtenido 8 goles. Seguidamente va a lanzar sus penaltis el otro equipo:

a) Describe la variable que representa el número de goles que este equipo va a obtener. ¿Cuál es el número de goles esperado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que meta también 8 goles y se vuelva a empatar el partido?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el segundo equipo, es decir, de que meta 9 o más goles?

Junio 1998 – Selectividad

2. El gasto total diario de una familia es una variable normal con media 30 € y desviación típica 6 €.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un día se gasten más de 36 €? ¿Y de que se gasten menos de 12 €?

b) ¿Qué porcentaje de días se encontrará el gasto entre 36 € y 42 €?

c) Calcula el valor por debajo del cual se encuentran el 80 % de los gastos totales diarios de la familia.

Septiembre 1998 – Selectividad

3. El Ayuntamiento de cierta ciudad ha promovido una campaña para mejorar la estética de la misma, de forma que en los edificios haya sólo una antena de televisión para todos los vecinos. El fruto de esa campaña ha sido que el 80 % de los edificios tienen efectivamente sólo una antena. Supongamos ahora que en una calle hay 15 edificios:

a) Describe la variable que representa el número de edificios de la calle que tienen una sola antena. ¿Cuántos edificios se espera que tengan sólo una antena?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 11 edificios con sólo una antena?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que 14 o más tengan sólo una antena?

Junio 1999 – Selectividad

4. En un almacén de fruta la demanda total diaria de manzanas (en kilos) sigue una distribución normal de media 1.000 y desviación típica 100.

a) Calcula el porcentaje de días en que la demanda no supera los 1.100 kilos.

b) El almacén dispone diariamente de 1.200 kilos de manzanas. ¿Cuál es la probabilidad de que un día la demanda supere esta cantidad y no pueda ser atendida?

c) Calcula el número de kilos de manzanas por debajo del cual se sitúan el 95 % de las cantidades totales que se le demandan al almacén diariamente.

Septiembre 1999 – Selectividad

5. Para cierto modelo de lavadora se ha analizado el tiempo de funcionamiento que transcurre sin necesitar revisión técnica, llegando a la conclusión de que dicho tiempo es una variable Normal de media 5.040 horas de lavado con una desviación típica de 720 horas.

a) Calcula la probabilidad de que una lavadora de ese modelo no supere las 3.960 horas de lavado sin necesitar revisión.

b) Calcula la probabilidad de que supere las 6.480 horas sin necesitar revisión.

c) Calcula la probabilidad de que funcione sin necesidad de revisión entre 5.760 y 6.120 horas.

d) ¿Qué número de horas no supera sin necesitar revisión el 90 % de este tipo de lavadoras?

Junio 2000 – Selectividad

6. Una empresa de marketing ha realizado un estudio sobre el lanzamiento al mercado de cierta bebida refrescante. La conclusión es que la bebida gusta a un 80 % de las personas que la prueban. Una vez realizado el estudio, un grupo de 12 personas elegidas al azar fue invitado a probar la bebida:

a) De las 12 personas sólo a 5 les gustó la bebida. Si el estudio de marketing es correcto ¿cuál es la probabilidad de que esto haya sucedido?

b) Si el estudio de marketing es correcto, ¿cuál era la probabilidad de que a más de 10 personas les hubiera gustado la bebida?

c) Si el estudio de marketing es correcto, ¿cuál era la probabilidad de que a alguno de los 12 no le hubiera gustado la bebida?

Septiembre 2001 – Selectividad

7. Un 30 % de los pacientes que acuden al servicio de urgencias de un hospital no realizan en realidad una consulta urgente y podían perfectamente haber esperado a concertar una cita con el médico de cabecera. En una mañana han acudido 10 pacientes al servicio de urgencias.

a) ¿Qué probabilidad hay de que 6 de ellos no realicen una consulta urgente?

b) ¿Qué probabilidad hay de que menos de 3 pacientes no realicen una consulta urgente?

c) ¿Qué probabilidad hay de que alguno de ellos no realice una consulta urgente?

Junio 2002 – Selectividad

8. En una empresa, el dinero percibido anualmente por cada empleado en concepto de dietas sigue una distribución Normal de media 1900 euros y desviación típica 250 euros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado cobre por dietas menos de 1525 euros? ¿Cuál es la probabilidad de que cobre más de 2400 euros?

b) ¿Qué porcentaje de empleados cobrarán entre 1525 euros y 2400 euros?

c) Se sabe que un individuo cobra en dietas más que un 70% de los empleados de la empresa y menos que un 30 %. ¿Cuánto se lleva en dietas?

Septiembre 2002 – Selectividad

9. Según un estudio llevado a cabo en cierta ciudad hace 2 años, al 10 % de los jóvenes residentes en la misma le gustaba la música clásica. Se pretende evaluar si ese estudio sigue siendo válido (de forma que todavía en la actualidad le guste ese tipo de música al 10 % de los jóvenes de la ciudad). Para ello se ha realizado una encuesta a 20 jóvenes al azar, resultando que a 4 les gusta la música clásica. Si el estudio realizado hace 2 años sigue siendo válido:

a) ¿Cuál era la probabilidad de que se hubiera producido el resultado mencionado en la encuesta a los 20 jóvenes?

b) ¿Qué probabilidad había de que la música clásica le hubiera gustado como mucho a 2 de los 20?

c) ¿Qué probabilidad había de que le hubiera gustado a alguno de los 20?

d) De los 20 encuestados ¿cuál era el número esperado de jóvenes a quienes gustaría la música clásica?

Junio 2003 – Selectividad

10. Una cadena de establecimientos comerciales ha hecho un estudio que cifra en un 48 % el porcentaje de los clientes que utilizan para sus pagos algún tipo de tarjeta. En la cola de una de sus tiendas hay 6 clientes:

a) ¿Qué probabilidad hay de que 4 de ellos paguen con tarjeta? ¿Qué probabilidad hay de que más de 4 paguen con tarjeta?

b) ¿Qué probabilidad hay de que alguno de ellos pague con tarjeta?

c) ¿Qué probabilidad hay de que alguno de ellos no pague con tarjeta?

Septiembre 2003 - Selectividad

MATEMÁTICAS II

ÍNDICE