5 Los vectores del espacio

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(5, -3, 2) + (-3, -1, -1)$

b) $(-2, 4, 1) + (-1)\,[(2, -1, 2) + (-1)\,(-3, -4, 0)]$

c) $(-2)\,(3, -3, 3) + 3(-3, 3, 0) + (1, 0, -1)$

d) $3\,[2(-2, 3, 2) + (-2)\,(3, -4, 1)] + (-1, -2, 0)$

2. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 3)$, calcula:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

b) El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) La medida del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

e) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (x, -3, 1)$ y $\vec{v} = (1 + x, 1, -3)$:

a) Calcula los posibles valores de x que hacen que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

b) Calcula el valor del producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para $x = -1$.

4. Escribe un vector paralelo al que tiene por coordenadas $\vec{u} = (-1, 2, -2)$ y que sea unitario, es decir, que su módulo sea la unidad.

5. Escribe un vector paralelo al que tiene por origen el extremo del vector $\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 0)$ y por extremo el extremo del vector $\overrightarrow{OB} = (2, 0, -1)$ y que, además, tenga por módulo 2 unidades de longitud.

6. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$:

a) Calcula el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) Calcula el área del paralelogramo determinado por ambos vectores.

7. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 2, -1)$ y $\vec{w} = (-1, 1, 2)$:

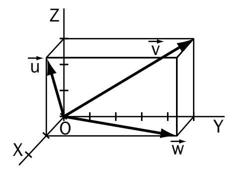
a) Calcula el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

b) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

8. Calcula los valores de x e y para que el vector $\vec{u} = (1 + x)\,\vec{i} + y\vec{j} - 2\vec{k}$ sea ortogonal a los vectores $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

9. Calcula los posibles valores de x que hacen que la proyección del vector $\vec{u} = (-1, 2, 2 - x)$ sobre el vector $\vec{v} = (1, x, 2)$ sea igual a la unidad.

10. Dada la figura:



a) Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

SOLUCIONES

1. a) $(5 - 3, -3 -1, 2 - 1) = (2, -4, 1)$

b) $(-2, 4, 1) - [(2, -1, 2) + (3, 4, 0)] =$
$= (-2, 4, 1) - (5, 3, 2) = (-7, 1, -1)$

c) $(-6, 6, -6) + (-9, 9, 0) + (1, 0, -1) =$
$= (-14, 15, -7)$

d) $3[(-4, 6, 4) + (-6, 8, -2)] + (-1, -2, 0) =$
$= 3(-10, 14, 2) + (-1, -2, 0) =$
$= (-30, 42, 6) + (-1, -2, 0) = (-31, 40, 6)$

2. a) $|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 3$

c) $\cos(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{55}}$

$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \text{arccos}\dfrac{3}{\sqrt{55}} \approx 66° \, 8' \, 20''$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$

e) Proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

3. a) Como los vectores dados son no nulos, se verifica que $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x(1 + x) - 3 - 3 = x^2 + x - 6 = 0$
$\Rightarrow x = 2, x = -3$

b) $\vec{u} = (-1, -3, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, -3) \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 - 3 - 3 = -6$

4. $|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

Uno de los dos vectores cuya dirección es la de $\vec{u}$ y cuyo módulo es 1 es:

$\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-2}{3}\right)$

5. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, -2, 1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

$\vec{v} = \dfrac{2\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\dfrac{6}{\sqrt{14}}, \dfrac{-4}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}\right)$

6. a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (2, 4, -1)$

b) $S = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} =$
$= \sqrt{21} \approx 4{,}58$

7. a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -13$

b) $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |-13| = 13$

8. a) $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = (-5, -6, 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1 + x}{-5} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{-2}{4} \Rightarrow$

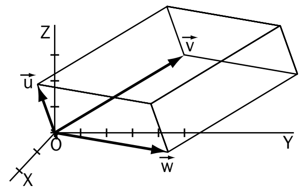
$\Rightarrow x = \dfrac{3}{2}, \, y = 3$

9. Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} =$
$= \dfrac{-1 + 2x + 4 - 2x}{\sqrt{1 + x^2 + 4}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 5} = 3 \Rightarrow x^2 + 5 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2, x = -2$

10.



a) $\vec{u} = (1, 0, 3)$, $\vec{v} = (0, 5, 3)$ y $\vec{w} = (1, 5, 0)$

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 - 15 = -30 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |-30| = 30$