

17 y 18**Integrales indefinidas.
Métodos de integración**

1. Calcula la primitiva de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ que cumple la condición de que su gráfica pasa por el punto $(0, 3)$.
2. Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$ sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que la pendiente de la recta tangente en el punto genérico de abscisa x es $m(x) = 3x^2 + 1$.
3. Calcula las siguientes integrales indefinidas:
 - a) $\int e^x \cdot (e^x + 1)^4 dx$
 - b) $\int x \cdot e^{x^2 + 2} dx$
4. Calcula las siguientes integrales indefinidas:
 - a) $\int \frac{L^2 x}{x} dx$
 - b) $\int \frac{1}{x \cdot Lx} dx$
5. Calcula las siguientes integrales indefinidas:
 - a) $\int x \cdot \sen x dx$
 - b) $\int x^2 \cdot 2^x dx$
6. Calcula las siguientes integrales indefinidas:
 - a) $\int \frac{2x + 5}{x^2 + 1} dx$
 - b) $\int \frac{x + 1}{9 + x^2} dx$
7. Calcula las siguientes integrales indefinidas:
 - a) $\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 3}{x^2 + x} dx$
 - b) $\int \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$
8. Determina todas las primitivas de la función $f(x) = \frac{x + 3}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$
9. Calcula las siguientes integrales indefinidas:
 - a) $\int e^x \cdot \sqrt{1 - e^{2x}} dx$
 - b) $\int \sen x \cdot \sen 2x dx$

SOLUCIONES

Nota: Siguiendo el criterio del libro, la constante C se sobrentiende, por lo que solo se escribe cuando se pide su valor.

1. $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{x^2 + 1} + C$
Como $F(0) = 3 \Rightarrow C = 2$ y $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2$

2. $f(x) = \int m(x) dx = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C$
 $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ y $f(x) = x^3 + x$

3. a) Cambio de variable: $t = e^x + 1$; $dt = e^x dx$
 $\int t^4 dt = \frac{t^5}{5} = \frac{1}{5} (e^x + 1)^5$
b) Cambio de variable: $t = x^2 + 2$; $dt = 2x dx$
 $\int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{x^2 + 2}$

4. a) Si $t = Lx$; $dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3} L^3 x$
b) Si $t = Lx$; $dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{t} dt = L t = L(Lx)$

5. a) Integración por partes:
 $u = x$, $dv = \sin x \cdot dx \Rightarrow du = dx$, $v = -\cos x$
 $I = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x$

b) $u = x^2$, $dv = 2^x dx \Rightarrow du = 2x dx$, $v = \frac{2^x}{L2}$
 $I = \frac{x^2 \cdot 2^x}{L2} - \int 2x \cdot \frac{2^x}{L2} dx = \frac{x^2 \cdot 2^x}{L2} - \frac{2}{L2} \int x \cdot 2^x dx$

Integrando de nuevo:

$u = x$, $dv = 2^x dx \Rightarrow du = dx$, $v = \frac{2^x}{L2}$
 $I = \frac{x^2 \cdot 2^x}{L2} - \frac{2}{L2} \left(\frac{x \cdot 2^x}{L2} - \int \frac{2^x}{L2} dx \right) =$
 $= \frac{x^2 \cdot 2^x}{L2} - \frac{x \cdot 2^{x+1}}{(L2)^2} + \frac{2^{x+1}}{(L2)^3}$

6. a) $I = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{5}{x^2 + 1} dx =$
 $= L |x^2 + 1| + 5 \operatorname{arctg} x$

b) $I = \int \frac{x}{9 + x^2} dx + \int \frac{1}{9 + x^2} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{9 + x^2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx =$$
$$= \frac{1}{2} L |9 + x^2| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$$

7. a) Haciendo la división entera:

$$I = \int \left(x^2 - 1 + \frac{3}{x^2 + x} \right) dx$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{3}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1}$$

es decir, $3 = A(x + 1) + Bx$

Dando valores a x se obtiene $A = 3$ y $B = -3$

$$\Rightarrow I = \int \left(x^2 - 1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x + 1} \right) dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - x + 3 L |x| - 3 L |x + 1|$$

b) $x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$I = -\frac{3}{4} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{7}{4} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x + 1)^2} =$$
$$= -\frac{3}{4} L |x - 1| + \frac{7}{4} L |x + 1| - \frac{3}{2} \frac{1}{x + 1}$$

8. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = (x^2 + 4)(x - 3)$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$I = \frac{6}{13} \int \frac{dx}{x - 3} - \frac{6}{13} \int \frac{x}{x^2 + 4} dx - \frac{5}{13} \int \frac{dx}{x^2 + 4} =$$
$$= \frac{6}{13} L |x - 3| + \frac{3}{13} L |x^2 + 4| - \frac{5}{26} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

9. a) Cambio de variable $e^x = \sin t$, $e^x dx = \cos t dx$

$$I = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt =$$
$$= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cdot \cos t$$

Desahaciendo el cambio de variable:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} e^x + \frac{1}{2} e^x \sqrt{1 - e^{2x}}$$

b) $I = \int \frac{\cos(2x - x) - \cos(2x + x)}{2} dx =$
 $= \frac{1}{2} \int \cos x dx - \frac{1}{2} \int \cos 3x dx =$
 $= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{6} \sin 3x$