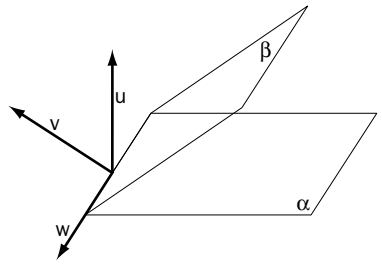
8 Propiedades métricas

1. Dados los planos no paralelos α: $Ax + By + Cz + D = 0$ y β: $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, calcula las coordenadas de un vector de dirección de la recta r determinada por la intersección de dichos planos.

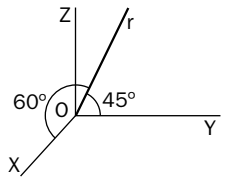


2. a) Demuestra que la distancia que separa a los planos paralelos α: $Ax + By + Cz + D = 0$ y β: $Ax + By + Cz + D' = 0$ se puede calcular mediante la fórmula: $d(\alpha, \beta) = \dfrac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

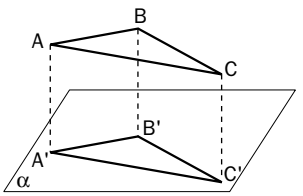
b) Aplica la fórmula anterior para calcular la distancia entre los planos paralelos α: $2x - y + z - 3 = 0$ y β: $4x - 2y + 2z - 3 = 0$.

3. a) Escribe las ecuaciones de la recta r de la figura sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que forma con los ejes coordenados OX y OY ángulos de 60° y 45°, respectivamente. ¿Existe una sola recta que verifique estas condiciones?

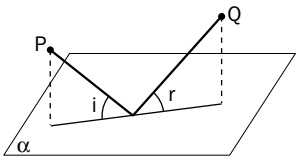
b) Calcula el ángulo que forma dicha recta con el eje OZ.



4. Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo $A'B'C'$ que se obtiene al proyectar ortogonalmente el triángulo de vértices $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 2, -2)$ y $C(-1, 2, 3)$ sobre el plano α: $2x + y - z - 4 = 0$. Calcula las áreas de ambos triángulos.



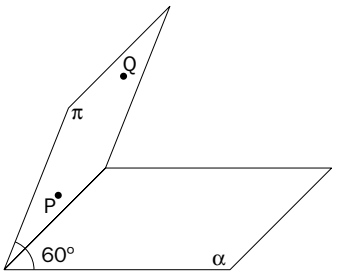
5. Un rayo parte del punto $P(1, 0, -2)$ y se refleja en el plano α: $x + y = 2$. Calcula el punto donde el rayo toca al plano sabiendo que el rayo reflejado pasa por $Q(-2, -2, 0)$.



6. a) Escribe la ecuación del plano α que pasa por el punto $A(1, 5, 4)$ y contiene a la recta de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} y + z = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Escribe la ecuación de un plano π que pase por los puntos $P(1, 0, 1)$ y $Q(1, 1, 0)$ y forme con el plano α un ángulo de 60°.



SOLUCIONES

1. El vector director de la recta determinada por α y β se puede calcular mediante el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos:

$$\vec{u}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

2. a) Sea $P(a, b, c) \in \alpha$ y $Q(q, r, s) \in \beta$:

$$d(\alpha, \beta) = d(P, \beta) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\beta|} =$$

$$= \frac{|A(q - a) + B(r - b) + C(s - c)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Aq + Br + Cs - (Aa + Bb + Cc)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

b) Los planos son α: $2x - y + z - 3 = 0$ y β: $2x - y + z - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(\alpha, \beta) = \frac{\left|-3 + \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

3. a) La recta buscada es: $r: \frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b}$. Para que cumpla las condiciones indicadas:

$$\begin{cases} \cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{|(1, a, b) \cdot (1, 0, 0)|}{|(1, a, b)| \cdot |(1, 0, 0)|} = \\ \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|(1, a, b) \cdot (0, 1, 0)|}{|(1, a, b)| \cdot |(0, 1, 0)|} = \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \\ = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{2},\ b = \pm 1$$

Una de las cuatro soluciones es la recta:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{z}{1}$$

b) $\widehat{(r, OZ)} = \arccos \frac{|(1, \sqrt{2}, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{|(1, \sqrt{2}, 1)| \cdot |(0, 0, 1)|} =$

$$= \arccos \frac{1}{2} = 60°$$

4.

$$AA': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow A' = \left(\frac{8}{6}, \frac{13}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$$BB': \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \Rightarrow B' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

$$CC': \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \Rightarrow C' = \left(\frac{8}{6}, \frac{19}{6}, \frac{11}{6}\right)$$

$$S(A, B, C) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(0, 10, 0)| = 5$$

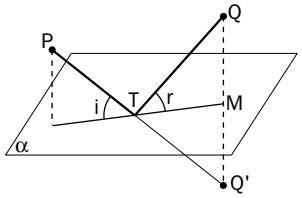
$$S(A', B', C') = \frac{1}{2}|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{20}{6}, \frac{10}{6}, -\frac{10}{6}\right)\right| = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

5. Sea Q' el simétrico de Q respecto del plano α. La recta que pasa por P y Q' corta al plano α en el punto T buscado:

$$QQ': \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$M = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$



M es el punto medio de $QQ' \Rightarrow Q' = (4, 3, 0)$

$$PQ': \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \Rightarrow T = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$$

6. a) Haz de planos cuya arista es la recta r:

$t \cdot (y + z - 9) + s \cdot z = 0$

Como el plano debe pasar por el punto $A \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \cdot t + 4s = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha: y + z - 9 = 0$

b) Recta que pasa por P y por Q:

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Haz de planos cuya arista es la recta PQ:

$t \cdot (x - 1) + s \cdot (y + z - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow tx + sy + sz - t - s = 0$

$$\cos(\vec{n}_\pi, \vec{n}_\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|2s|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{t^2 + 2s^2}}$$

Ya que solo se pide una solución se toma por ejemplo: $2t^2 + 4s^2 = 16s^2 \Rightarrow t = \sqrt{6} \cdot s$ y entonces: $\pi: \sqrt{6}x + y + z - 1 - \sqrt{6} = 0$