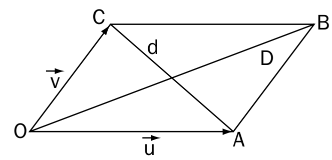
5 Los vectores en el espacio

1. Consideramos tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tales que $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = 0$. Demuestra que si se toman representantes de esos tres vectores con un mismo origen entonces sus extremos están alineados.

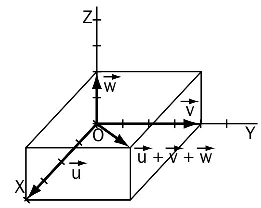
2. Dado el paralelogramo de la figura:



a) Escribe los vectores $\vec{D}$ y $\vec{d}$, correspondientes a sus diagonales, en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, correspondientes a sus lados.

b) Con ayuda del cálculo vectorial, demuestra que la suma de los cuadrados de las medidas de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de las medidas de dos de sus lados concurrentes.

3. Los módulos de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son 4, 4 y 2, respectivamente. Se sabe, además, que dichos vectores son perpendiculares dos a dos:

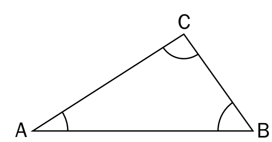


a) Determina el vector suma de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Determina el módulo del vector suma.

c) Calcula el valor de los ángulos que el vector suma forma con cada uno de los vectores considerados.

4. Consideramos el triángulo de vértices A, B y C:



a) Considerando los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$. Con ayuda del producto vectorial, escribe el área del triángulo ABC en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ y en función de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Con ayuda del apartado anterior, demuestra el teorema de los senos.

5. Se consideran los vectores $a = 2\vec{i} + x\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + x\vec{j}$ y $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + x\vec{k}$:

a) Calcula los posibles valores de x que hacen que el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores sea igual a 10.

b) Estudia si existe algún valor de x que haga que los tres vectores sean coplanarios.

6. Se considera el vector de coordenadas $\vec{u} = (-1, 1, 1)$:

a) Halla, con ayuda de los parámetros necesarios, la expresión de todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$.

b) Escribe el vector $\vec{a} = (-3, 0, 3)$ como suma de dos vectores, uno de los cuales sea paralelo a $\vec{u}$ y el otro ortogonal a $\vec{u}$.

7. Se consideran los vectores de coordenadas $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (4, 2, x)$:

a) Calcula el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Para el valor de x calculado en el apartado anterior, expresa el vector $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{u}$ como producto de un número real por el vector $\vec{v}$.

SOLUCIONES

1. Se considera $\vec{u} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{v} = [\overrightarrow{OB}]$ y $\vec{w} = [\overrightarrow{OC}]$. Hay que demostrar que A, B y C están alineados:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} + \overrightarrow{AB} = \vec{v} \\ \vec{u} + \overrightarrow{AC} = \vec{w} \end{array}\right\}$$

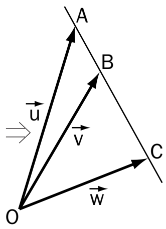
Como $\vec{u} = -2\vec{v} + 3\vec{w} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2(\vec{u} + \overrightarrow{AB}) + 3(\vec{u} + \overrightarrow{AC}) = \vec{u} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A, B y C están alineados.



2. a) $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{D} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{d} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{D} = \vec{u} + \vec{v}$; $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$

b) $$\left\{\begin{array}{l} \vec{D} \cdot \vec{D} = |\vec{D}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ \vec{d} \cdot \vec{d} = |\vec{d}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\vec{D}|^2 + |\vec{d}|^2 = 2(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2)$

3. a) Se pueden tomar como direcciones de los tres vectores dados las de los ejes coordenados.

Entonces: $\vec{u} = 4\vec{i}$, $\vec{v} = 4\vec{j}$, $\vec{w} = 2\vec{k}$, y el vector suma viene determinado por las coordenadas $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (4, 4, 2)$

b) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$

c) $$\cos(\vec{s}, \vec{u}) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{16}{6 \cdot 4} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{(\vec{s}, \vec{u})} = \arccos\frac{2}{3} \approx 48^\circ\ 11'\ 23''$$

$$\cos(\vec{s}, \vec{v}) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{16}{6 \cdot 4} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{(\vec{s}, \vec{v})} \approx 48^\circ\ 11'\ 23''$$

$$\cos(\vec{s}, \vec{w}) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{w}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{4}{6 \cdot 2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{(\vec{s}, \vec{w})} \approx 70^\circ\ 31'\ 44''$$

4. a) $$S = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{w}| = \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}|$$

b) $$\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{w}| \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u} \times \vec{w}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - B) = \\ |\vec{u} \times \vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - A) = \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen} B \\ = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \operatorname{sen} A \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|\vec{v}|}{\operatorname{sen} A} = \frac{|\vec{w}|}{\operatorname{sen} B}$$

De la misma manera: $\dfrac{|\vec{v}|}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{|\vec{u}|}{\operatorname{sen} C}$

De estas dos igualdades se deduce:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

5. a) $$\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow 2x^2 + 6 - 3x - x^2 = 10 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = -1.$

b) Para que los vectores sean coplanarios, su producto mixto debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 6 - 3x - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 6 = 0$

Esta ecuación no tiene soluciones reales.

6. a) $(a, b, c) \cdot (-1, 1, 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -a + b + c = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \lambda + \mu \\ b = \lambda \\ c = \mu \end{array}\right.$$

Los vectores pedidos son de la forma $(\lambda + \mu, \lambda, \mu)$.

b) $(-3, 0, 3) = (-x, x, x) + (\lambda + \mu, \lambda, \mu) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & \lambda & + & \mu & = & -3 \\ x & + & \lambda & & & = & 0 \\ x & & & + & \mu & = & 3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow -x - x + 3 - x = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2,\ \lambda = -2,\ \mu = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-3, 0, 3) = (-2, 2, 2) + (-1, -2, 1)$

7. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-1, 1, 1) \cdot (4, 2, x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 + 2 + x = 0 \Rightarrow x = 2$

b) $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$$

Por tanto: $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{u} = 3\vec{v}$