1 Matrices

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2, A^3 y A^4.

b) Escribe, en función de n, la n-ésima potencia de A.

c) Calcula el valor de la matriz $T = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$.

2. Realizando las transformaciones que consideres adecuadas al aplicar el método de Gauss, calcula la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las matrices $X = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Demuestra que A y B son conmutables, es decir, que $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Calcula las potencias n-ésimas de A y de B.

c) Escribe X en función de A y de B.

d) Aplica la fórmula del binomio de Newton para calcular X^n. Ten en cuenta que puedes aplicar dicha fórmula ya que A y B son conmutables.

4. Se dice que una matriz cuadrada es **idempotente** cuando verifica que su segunda potencia es igual a ella misma.

a) Escribe algún ejemplo de matriz cuadrada de orden 3, distinta de la matriz unidad y de la matriz nula, y que sea idempotente.

b) Calcula el valor de λ que hace que la segunda potencia de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ sea igual a la misma matriz A y que, por lo tanto, hace que la matriz A sea idempotente.

c) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que sean idempotentes.

5. Se dice que una matriz cuadrada es **nilpotente** cuando alguna de sus potencias es igual a la matriz nula. En el caso de que n sea el menor entero positivo tal que $A^n = O$, se dice que A es una matriz nilpotente de **grado** n.

a) Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ verifica que $A^3 = O$ y que, por tanto, es nilpotente de grado 3.

b) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que verifiquen que su segunda potencia sea igual a la matriz nula y que, por tanto, sean nilpotentes de grado 2.

6. Ciertos animales de cierta especie se clasifican de la siguiente forma según que posean los siguientes tipos de genes:

TIPO 1: *GG* dominante TIPO 2: *Gg* híbrido TIPO 3: *gg* recesivo

La reproducción de estos animales siempre se realiza mediante el cruce de un animal del tipo 1 con otro de cualquier tipo. Los hijos heredan un gen de cada padre con probabilidad 0,5.

a) Escribe los valores de la matriz A de forma que:

i) A sea una matriz cuadrada de orden 3.

ii) a_{ij} representa la probabilidad de que sabiendo que la madre es un animal del tipo i el hijo resulta ser un animal del tipo j.

b) Escribe los valores de la matriz B de forma que:

i) B sea una matriz cuadrada de orden 3.

ii) b_{ij} representa la probabilidad de que, sabiendo que la abuela materna es un animal del tipo i, el nieto resulta ser un animal del tipo j.

SOLUCIONES

1. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Observando las potencias, se obtiene:

Si $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1-n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $T = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$ $+ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -n+1 & \dfrac{-n(n+1)}{2} \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$ $= A + \lambda B$

d) $X^n = (A + \lambda B)^n = A^n + n\lambda A^{n-1} \cdot B +$ $+ \binom{n}{2} \lambda^2 A^{n-2} \cdot B^2 + \ldots + \binom{n}{n} \lambda^n B^n =$ $= A^n + \lambda^n B^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1+\lambda^n & 1-\lambda^n \\ 1-\lambda^n & 1+\lambda^n \end{pmatrix}$

2. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[3F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -21 & 15 & -9 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+7F_2]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{F_2+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}F_2]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$

3. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$

4. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = A \Rightarrow A$ es idempotente.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+2\lambda & 2 \\ \lambda & 9+2\lambda \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 16 + 2\lambda = 4 \\ 9 + 2\lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -6$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 + ab = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

5. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = 0$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

6. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

B se puede calcular elevando la matriz A al cuadrado.