16 Estudios y representación de funciones

1. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x} - 1}$. Comprueba si en algún caso la asíntota corta a la gráfica de la función y, en ese caso, calcula el punto de corte.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$, se pide:

a) Hallar dominio y asíntotas.

b) El estudio de la continuidad y derivabilidad de la función.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

d) Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

e) La representación gráfica de la función.

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$:

a) Estudia su signo en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y las simetrías que presenta su gráfica.

b) Determina sus máximos y mínimos relativos en el intervalo.

c) Determina sus puntos de inflexión en $[-\pi, \pi]$.

d) A partir del estudio realizado en los apartados anteriores, representa gráficamente la función en todo su dominio.

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-ax}}{1 + x}$, donde a es un número positivo:

a) Determina sus máximos y mínimos relativos.

b) Halla la ecuación de sus asíntotas.

c) Representa gráficamente la función para $a = 1$.

SOLUCIONES

1. Dominio $\mathbf{R} - \{0\}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{2x} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2e^{2x}} = \dfrac{1}{2}$

$f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{e^{2x} - 1} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{2e^{2x}} = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow \infty$, no hay punto de corte; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ no hay asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$.

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \longrightarrow -\infty$.

2. a) Dominio $\mathbf{R}$; $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{e^{1-x}} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{e^{1-x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{x}{e^{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

b) $f(x)$ es continua en $\mathbf{R}$ pero no derivable en $x = 0$ ni en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1+x}{e^{1-x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1+x}{e^{1-x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1-x}{e^{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{x+2}{e^{1-x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+2}{e^{1-x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x-2}{e^{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

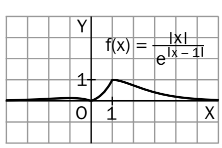
c) $f'(x)$ se anula en $x = -1$. Creciente: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; decreciente: $(-1, 0) \cup (1, \infty)$.

Máximos relativos: $\left(-1, \dfrac{1}{e^2}\right)$ y $(1, 1)$; mínimo relativo: $(0, 0)$.

d) Se anula en $x = -2$ y en $x = 2$.

- Cóncava: $(-2, 0) \cup (1, 2)$
- Convexa: $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$
- Puntos de inflexión: $\left(-2, \dfrac{2}{e^3}\right)$ y $\left(2, \dfrac{2}{e}\right)$

e)



3. a) Como $2 + \cos x$ es siempre positivo, el signo de $f(x)$ coincide con el de $\operatorname{sen} x$: $f(x) > 0$ en $(0, \pi)$ y $f(x) < 0$ en $(-\pi, 0)$.

La gráfica es simétrica con respecto al origen, ya que $f(x)$ es impar, luego basta hacer el estudio en $(0, \pi)$.

b) $f'(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$, $f'(x) = 0$ si $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$

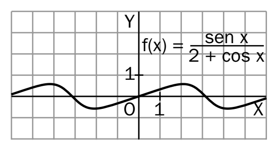
$f''(x) = \dfrac{2 \operatorname{sen} x(\cos x - 1)}{(2 + \cos x)^3}$ y $f''\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) < 0$ luego

$f(x)$ alcanza un máximo en $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y, por simetría, un mínimo en $\left(-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

c) $f''(x) = 0$ si $\operatorname{sen} x = 0$ o $\cos x - 1 = 0$

Puntos de inflexión $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$.

d)



4. a) $f'(x) = \dfrac{-e^{-ax}(ax + a + 1)}{(1+x)^2} = \dfrac{-ae^{-ax}\left(x + \dfrac{a+1}{a}\right)}{(1+x)^2}$

se anula si $x = -\dfrac{a+1}{a}$; además,

$\begin{cases} x < -\dfrac{a+1}{a} \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > -\dfrac{a+1}{a} \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$; por tanto,

$f(x)$ alcanza un máximo en $x = -\dfrac{a+1}{a}$

b) Dominio $\mathbf{R} - \{-1\}$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$,

$x = -1$ es una asíntota vertical.

$y = 0$ es asíntota horizontal si $x \longrightarrow \infty$

Cuando $x \longrightarrow -\infty$ hay rama parabólica, ya que:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-ax}}{(1+x)} = \lim\limits_{x\to \infty} (-ae^{-ax}) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-ax}}{(1+x)\,x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-ae^{-ax}}{(1+2x)} =$

$= \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{a^2 e^{-ax}}{2} = \infty$

c) Máximo: $(-2, -e^2)$, $f''(x) = \dfrac{e^{-x}(x^2 + 4x + 5)}{(1+x)^3}$;

$f(x)$ es cóncava si $x < -1$ y convexa si $x > -1$.