

UNIDAD 6: PROBABILIDAD

ÍNDICE DE LA UNIDAD

1.- INTRODUCCIÓN.....	1
2.- EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL.....	1
3.- SUCESOS ALEATORIOS. OPERACIONES.....	2
4.- PROBABILIDAD. REGLA DE LAPLACE.....	4
5.- PROBABILIDAD CONDICIONADA. PROBABILIDAD COMPUESTA.....	6
6.- DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS.....	6
7.- PROBABILIDAD TOTAL.....	7
8.- PROBABILIDAD A POSTERIORI. TEOREMA DE BAYES.....	9
9.- ACTIVIDADES.....	9
10.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES.....	24

1.- INTRODUCCIÓN.

La **Probabilidad** es una de las ramas de la Matemática más importantes y útiles en la actualidad. Esta disciplina matemática es relativamente joven en cuanto a su formalización aunque tiene sus raíces en la antigüedad. Comenzó a ser estudiada asociada a los juegos de azar. Hoy en día, es una de las ramas más profundas y con más aplicaciones en otras disciplinas del saber.

Sus orígenes más rudimentarios son muy antiguos y se remontan a las civilizaciones de Sumeria y Asiria. Es en el renacimiento cuando se comienza a formalizar al ponerse de moda los juegos de azar. Los primeros precursores de la formalización matemática de la Probabilidad son **Tartaglia, Galileo o Cardano**, entre otros.

Ya en los siglos XVII y XVIII, figuras como **Fermat, Pascal, J. Bernouilli o Laplace** sentaron las bases para su definitiva formalización a finales del siglo XIX con los trabajos de los matemáticos de la escuela rusa como **Chebychev o Kolmogorov**.

Lo que comenzó estudiando casi exclusivamente los juegos de azar, se ha convertido en la actualidad en una compleja disciplina que ha desencadenado otras también fundamentales como la **Inferencia Estadística**, desarrollada en sus inicios durante el siglo XX por Matemáticos como **Galton o Pearson**.

2.- EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL.

Definición 1: Un **experimento** se llama **determinista** si se conoce su resultado de antemano y se llama **aleatorio** si no se conoce el resultado antes de realizarlo aunque se realice en las mismas condiciones.

Ejemplo 1: Veamos algunos ejemplos:

- a) Si se deja caer un objeto desde una altura, se puede saber de antemano que caerá al suelo, por ello es determinista.
- b) Si se lanza una moneda al aire, no sabemos si saldrá cara o cruz, por eso es un experimento aleatorio.

Como es evidente, durante esta unidad, únicamente abordaremos el estudio de los experimentos aleatorios, ya que no tienen ningún interés matemático los deterministas.

Definición 2: Llamamos **Espacio muestral** al conjunto de todos los resultados posibles que se pueden dar en un experimento aleatorio. Normalmente, lo designaremos con la letra **E**.

Ejemplo 2: Veamos los espacios muestrales asociados a algunos experimentos aleatorios:

- a) Lanzar una moneda y ver el resultado. $E = \{C, X\}$.
- b) Escoger una persona de la clase al azar y ver de qué sexo es. $E = \{H, M\}$.
- c) Lanzar un dado y ver el resultado. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- d) Lanzar dos monedas y ver el resultado. $E = \{CC, CX, XC, XX\}$

Nota 1: Obsérvese que los elementos del último espacio muestral CX y XC son dos sucesos distintos, ya que aunque el resultado final sea el mismo, no ocurre lo mismo si sale cara y después cruz que si sale cruz y después cara. Son dos elementos distintos.

3.- SUCESOS ALEATORIOS. OPERACIONES.

Definición 3: Dado un espacio muestral E, asociado a un experimento aleatorio, llamamos **suceso aleatorio** a cualquier subconjunto del espacio muestral E. En particular, llamamos:

- a) **Suceso elemental**, a todo suceso unitario, es decir, formado por un único elemento.
- b) **Suceso compuesto**, a todo suceso formado por dos o más sucesos elementales.
- c) **Suceso imposible**, al que no sucede nunca. Se designa por el símbolo de conjunto vacío: \emptyset .
- d) **Suceso seguro**, al que ocurre siempre. Como es evidente, siempre coincide con el espacio muestral y se designa por E.

Ejemplo 3: Veamos todos los sucesos del ejemplo “lanzar una moneda y ver el resultado”, cuyo espacio muestral ya hemos visto que es: $E = \{C, X\}$. Todos los sucesos son: $\emptyset, \{C\}, \{X\}, \{C, X\}$.

Nota 2: Es fácil ver que si un espacio muestral tiene n sucesos elementales, en total hay 2^n sucesos aleatorios.

Ejemplo 4: Veamos algunos sucesos del experimento lanzar un dado y ver el resultado, cuyo espacio muestral, como hemos visto, es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

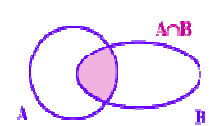
- a) Un ejemplo de suceso elemental es “sacar un 3”, que es $A = \{3\}$.
- b) Un ejemplo de suceso compuesto es “sacar impar”, que es $B = \{1,3,5\}$.
- c) Un ejemplo de suceso imposible es “sacar un 7”, que es $C = \emptyset$.
- d) Un ejemplo de suceso seguro es “sacar menos de un 8”, que es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Definición 4: (Operaciones con sucesos) Sean dos sucesos A y B de un espacio muestral E. Llamamos:

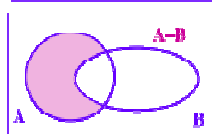
a) **Unión** de A y B al suceso $A \cup B$ formado por todos los elementos de A y los de B.



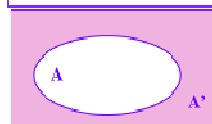
b) **Intersección** de A y B al suceso $A \cap B$ formado por todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B.



c) **Diferencia** de A menos B al suceso $A - B$ formado por todos los elementos de A que no están en B.



d) **Complementario o contrario** de A al suceso \bar{A} (o bien A^c) formado por todos los elementos del espacio muestral que no pertenecen a A. Es evidente que $A^c = E - A$.



Ejemplo 5: Consideremos el suceso “lanzar un dado y ver el resultado”, cuyo espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ y los sucesos: “sacar impar” y “sacar menos de un 5”, que son, respectivamente: $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$.

- a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
- b) $A \cap B = \{1,3\}$
- c) $A - B = \{5\}$
- d) $\bar{B} = \{5,6\}$

Proposición 1: (Propiedades de las operaciones con sucesos). Consideremos tres sucesos A, B y C de un espacio muestral E, asociado a un experimento aleatorio. Se verifican las siguientes propiedades:

- a) $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$ (Conmutativas)
- b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ (Asociativas)
- c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivas)
- d) $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap E = A$ (Elemento neutro)
- e) $A \cup \bar{A} = E$ y $A \cap \bar{A} = \emptyset$ (Complementarias)
- f) $\overline{\bar{A}} = A$ y $A - B = A \cap \bar{B}$
- g) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (Leyes de Morgan)

Definición 5: Dos sucesos A y B de un espacio muestral E se llaman **incompatibles** cuando no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, cuando $A \cap B = \emptyset$. En caso contrario se llaman **compatibles**.

Ejemplo 6: Consideremos el experimento de lanzar un dado y ver el resultado.

- a) Los sucesos A: “Sacar par” y B: “Sacar impar” es evidente que son incompatibles, ya que $A \cap B = \emptyset$. No pueden darse a la vez.
- b) Los sucesos C: “Sacar par” y D: “Sacar primo” son compatibles, ya que $C \cap D = \{2\}$. Sí pueden darse a la vez, cuando sale un 2.

Se proponen las **actividades de la 1 a la 3**

4.- PROBABILIDAD. REGLA DE LAPLACE.

A lo largo de la historia la teoría de la Probabilidad se ha ido desarrollando y formalizando cada vez más. Por ello, el concepto de probabilidad admite más de una definición válida. En esta unidad veremos las dos más populares que son la frecuencial y la axiomática (Kolmogorov).

Definición 6: (Definición frecuencial de probabilidad) Sea A un suceso aleatorio asociado a un experimento aleatorio. Llamamos n al número de veces que se efectúa el experimento, $f_n(A)$ al número de veces que ocurre el suceso A en esas n repeticiones del experimento, también llamado **frecuencia absoluta**. Se llama **frecuencia relativa** del suceso A al cociente: $h_n(A) = \frac{f_n(A)}{n}$. Pues bien, se llama **probabilidad del suceso A** al límite: $P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(A)$

Nota 3: Es evidente que esta definición de probabilidad lo que nos da es el valor al que se acerca la frecuencia (expresada en tanto por 1) de las veces que ocurre el suceso entre el número total de veces cuando se realiza indefinidamente. Este límite existe en virtud de un resultado matemático derivado de la llamada Ley de los grandes números.

Nota 4: Es evidente, por su propia definición que la probabilidad de un suceso cumple:

- a) Que es siempre un número positivo, ya que es el límite del cociente de dos cantidades positivas.
- b) Es un número que es siempre menor que 1, ya que es el límite de una expresión fraccionaria cuyo numerador es menor que el denominador y, por tanto, menor que 1 siempre.
- c) También es evidente que la probabilidad del suceso imposible es 0 (ya que todos los numeradores serían 0) y que la del suceso seguro es 1 (ya que el numerador siempre sería n)

*Estas propiedades, entre otras, dieron lugar a que el matemático ruso **Kolmogorov**, elaborase la otra definición de probabilidad que veremos, llamada axiomática, mucho más precisa y rigurosa desde el punto de vista matemático, aunque bastante menos intuitiva desde el punto de vista práctico.*

Definición 7: (Definición axiomática de probabilidad) Consideremos un experimento aleatorio de espacio muestral E. Se llama **probabilidad** a toda función: $P: E \rightarrow \mathbb{R}$ que $A \rightarrow P(A)$ que cumpla los siguientes axiomas:

- **Axioma 1:** La probabilidad de cualquier suceso es un número comprendido entre 0 y 1, es decir: $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subseteq E$.
- **Axioma 2:** La probabilidad del suceso seguro es 1, es decir, $P(E) = 1$
- **Axioma 3:** Si dos sucesos cualesquiera del espacio muestral A y B son incompatibles, es decir, si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A partir de esta definición, se obtienen las siguientes consecuencias, de vital importancia para lo que sigue de la unidad.

Proposición 2: (Propiedades de la probabilidad) Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y P una función de probabilidad. Entonces, se cumple:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \forall A \subseteq E$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \forall A, B \subseteq E$
- Si $A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$
- Si $A \subseteq B \rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A)$
- Si A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos incompatibles dos a dos, entonces:
 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

Se proponen las **actividades de la 4 a la 6**.

Definición 8: (Regla de Laplace) Sea $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Si todos los sucesos A_1, A_2, \dots, A_n son equiprobables, es decir con la misma probabilidad, entonces, la probabilidad de cualquier suceso A del espacio muestral es

$$P(A) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de casos favorables a que ocurra } A}{\text{N}^\circ \text{ total de casos posibles}}$$

Nota 5: Es de vital importancia tener en cuenta que la regla de Laplace únicamente es válida si los sucesos del espacio muestral son equiprobables, ya que si se aplica en casos en que no lo sea, el resultado es erróneo. Veamos un ejemplo de esto.

Ejemplo 7:

a) Si consideremos el experimento de lanzar un dado y ver el resultado, es evidente que el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Es evidente que los seis sucesos elementales son equiprobables. Así pues, se puede aplicar la regla de Laplace sin problema, por lo que podemos calcular algunas probabilidades de forma sencilla:

- Si A: "Obtener un 4", entonces $P(A) = \frac{1}{6}$, ya que $A = \{4\}$
- Si B: "Obtener par", entonces $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, ya que $B = \{2, 4, 6\}$

b) Sin embargo, si consideramos el experimento de lanzar dos dados y sumar el resultado y describimos el espacio muestral de la forma: $E = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, **no se puede aplicar la regla de Laplace** directamente ya que los sucesos elementales, no son equiprobables. Por ejemplo:

- Si A: “Obtener un 3” y los consideráramos equiprobables, obtendríamos que $P(A) = \frac{1}{11}$, cuando en realidad sería $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Este error se debe a que no se pueden contabilizar los sucesos descritos en E de la misma forma al no ser equiprobables. Para evitar estos errores, lo que se suele hacer es desglosar todos los casos en sucesos elementales que sí sean equiprobables. En este ejemplo, la forma sería describir todas las posibilidades de resultados de los dos dados y contabilizar luego los que suman 3. Por ello, para calcular probabilidades, consideramos como alternativa el espacio muestral desglosado de la forma: $E = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}$. En este, ya se ve claramente que hay 2 sucesos favorables a sacar 3 como suma y no 1.

Se proponen las **actividades de la 7 a la 9**.

5.- PROBABILIDAD CONDICIONADA. PROBABILIDAD COMPUESTA.

En determinados experimentos aleatorios, hay sucesos que, de alguna forma, condicionan a otros que se realicen a posteriori. Este tipo de situaciones da lugar a experiencias compuestas y a la llamada probabilidad condicionada que vamos ahora.

Definición 9: Consideremos un experimento aleatorio, llamamos **suceso A condicionado a B** al suceso A/B que ocurre cuando ocurre A sabiendo que ha ocurrido ya B, cuya probabilidad viene dada por la expresión: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$ y se

llama **probabilidad de A condicionada a B**.

Nota 6: De la misma manera podríamos definir la probabilidad de B condicionado a A como $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, $P(A) > 0$

Definición 10: Un **experimento** aleatorio se llama **compuesto** cuando está formado por varios experimentos aleatorios simples.

Nota 7: Obsérvese que, de la definición anterior, sin más que despejar obtenemos la expresión: $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$ o bien $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$. Esta expresión es de enorme utilidad en las actividades de los puntos posteriores. La anterior expresión recibe el nombre de **probabilidad compuesta**.

6.- DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS.

Definición 11: Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Se dice que los sucesos A y B son **independientes** si el resultado de A no influye nada en el de B y viceversa. En caso contrario, se llaman **dependientes**.

Nota 8: Es evidente, a partir de la definición y lo visto anteriormente que dos sucesos son independientes cuando se verifica alguna de las siguientes condiciones (que son equivalentes entre ellas):

a) $P(A/B) = P(A)$ b) $P(B/A) = P(B)$ c) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ejemplo 8: En una bolsa hay 4 bolas rojas y 6 verdes. Supongamos la experiencia de extraer una bola y después otra y observar el color. Sea R_1 : “Extraer bola roja en la 1ª extracción” y R_2 : “Extraer bola roja en la 2ª extracción”

a) Si devolvemos la bola después de la primera extracción (llamada con reemplazamiento), es evidente que los sucesos R_1 y R_2 son independientes, ya que el hecho de que salga roja la 1ª no influye nada en el resultado de la 2ª extracción porque se devuelve la bola.

b) Sin embargo, si no devolvemos la bola (llamada sin reemplazamiento), el resultado de la primera extracción influye claramente en lo que ocurre en la 2ª extracción y serían dependientes.

Ejemplo 9: Veamos si los sucesos A y B son independientes sabiendo que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, $P(A \cup B) = 3/4$. Veamos si se cumple la condición de la nota anterior:

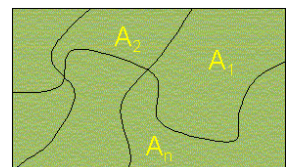
- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

- $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Por tanto, son independientes.

7.- PROBABILIDAD TOTAL.

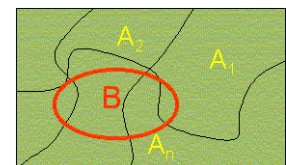
Definición 12: Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Se dice que un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ forman un **sistema completo de sucesos** si cumple las dos condiciones siguientes:



a) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

b) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ (incompatibles dos a dos)

Proposición 3: (Teorema de la probabilidad total). Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos asociados a un experimento aleatorio de espacio muestral E. Entonces, para cualquier suceso B se cumple la siguiente igualdad:



$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

*Esta última identidad es una de las expresiones más útiles en esta unidad y nos permitirá resolver multitud de situaciones en las actividades, además de ser la base sobre la que se demuestra el teorema de Bayes que veremos en el punto siguiente. A continuación veremos algunos ejemplos de su utilización haciendo uso de dos herramientas bastante útiles en la unidad: las **tablas de contingencia** y los **diagramas de árbol**.*

Ejemplo 10: En 2º de Bachillerato A hay 14 chicos y en 2º de Bachillerato B hay 8 chicos. Sabemos además, que en el grupo A hay 20 alumnos/as y en el B 24 alumnos/as. Se elige una persona al azar. Contestemos las siguientes probabilidades:

- a) De que sea de 2º B
- b) De que sea chica.
- c) De que sea chico sabiendo que es de 2º A.
- d) De que sea de 2º A sabiendo que es chico.

Para estos casos, es de gran utilidad escribir los datos en una tabla de contingencia:

	Chicos (H)	Chicas (M)	TOTAL
2º de Bachillerato A	14	7	21
2º de Bachillerato B	8	17	25
TOTAL	22	24	44

A partir de la tabla es evidente que:

a) $P(B) = \frac{25}{44}$ b) $P(M) = \frac{24}{44} = \frac{6}{11}$ c) $P(H/A) = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ d) $P(B/M) = \frac{17}{24} = \frac{17}{24}$

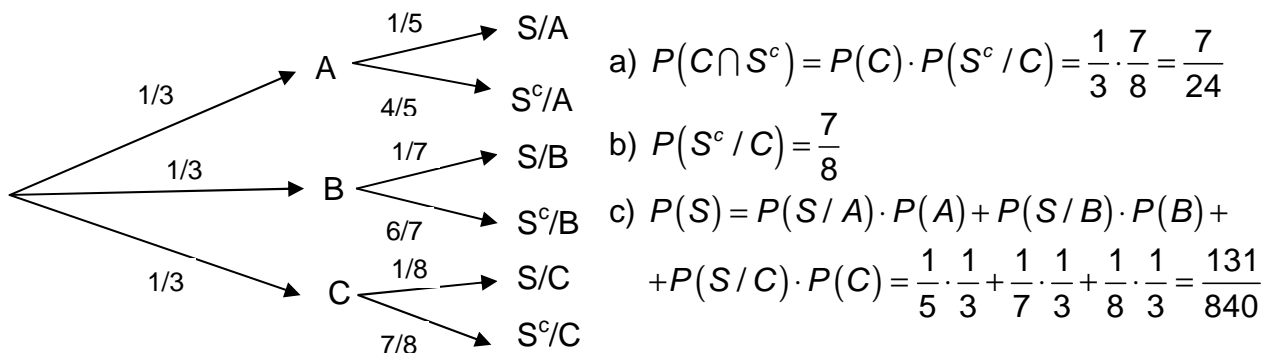
Ejemplo 11: En una casa hay tres llaveros A, B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero. Se pide:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el llavero escogido sea el C y la llave no abra?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la llave no abra sabiendo que hemos escogido el llavero C?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte con la llave?

Llamemos:

- A: "Escoger el llavero A"
- B: "Escoger el llavero B"
- C: "Escoger el llavero A"
- S: "Abrir la puerta".

Para determinar estas tres probabilidades u otras que se nos pudiesen plantear, en este tipo de probabilidades compuestas que constan de dos o más fases de ejecución, suelen ser de gran utilidad los diagramas de árbol. En este ejemplo, sería el siguiente:



Se proponen las **actividades de la 10 a la 17.**

8.- PROBABILIDAD A POSTERIORI. TEOREMA DE BAYES.

En muchas ocasiones, nos encontramos con situaciones en los que hemos de determinar probabilidades de sucesos que condicionan a otros de los que conocemos la probabilidad.

Básicamente, desconocemos probabilidades de sucesos que, en la mayoría de los casos han ocurrido antes conociendo lo que ha ocurrido después, es decir, nos preguntan probabilidades “del pasado” conociendo las que ocurren en un experimento posterior, por eso se llaman **probabilidades a posteriori**. Aunque no es siempre exactamente así, estas orientaciones nos pueden ayudar a identificar estas situaciones que se resuelven haciendo uso de la siguiente fórmula:

Proposición 4: (Teorema de Bayes) Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos asociados a un experimento aleatorio de espacio muestral E. Entonces, para cualquier suceso B con probabilidad no nula, se cumple la siguiente igualdad:

$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B / A_n) \cdot P(A_n)}$$

Nota 9: Obsérvese que la 2ª expresión de la fórmula de Bayes resulta inmediata sin más que aplicar el teorema de la probabilidad total.

Ejemplo 12: Si retomamos el ejemplo 11 y sabemos que ha abierto la puerta del trastero, determinemos cuál es la probabilidad de que el llavero escogido fuese sido el A. Como podemos observar, se nos da como dato un suceso ocurrido a posteriori (ha abierto la puerta) y se nos pregunta sobre algo que ocurrió a priori (escoger el llavero). Es, por tanto, un caso claro de una probabilidad a calcular utilizando la fórmula de Bayes:

$$P(A/S) = \frac{P(S/A) \cdot P(A)}{P(S)} = \frac{P(S/A) \cdot P(A)}{P(S/A) \cdot P(A) + P(S/B) \cdot P(B) + P(S/C) \cdot P(C)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{131}{840}} = \frac{56}{131}$$

Se proponen las **actividades de la 18 a la 20**.

9.- ACTIVIDADES.

ACTIVIDADES INTERCALADAS EN LA TEORÍA

Actividad 1: Consideremos el juego del dominó y el experimento de sacar una ficha al azar y sumar sus puntos. Obtén:

- El espacio muestral.
- El suceso obtener un número primo.
- El suceso obtener un número impar.

Actividad 2: Se considera una urna con 9 bolas numeradas del 1 al 9. Sacamos una bola, miramos el número y la devolvemos. Sean los sucesos: A: “Salir número par”, B: “Salir número impar”, C: “Salir número múltiplo de 3”. Calcula los sucesos:

- $A \cap B$
- $B \cap C$
- $(A \cup B) \cap C$
- $A \cap \bar{B}$
- $B - C$
- $\overline{A \cup B}$

Actividad 3: En un sorteo de lotería nos finamos en la cifra en la que termina el “gordo”.

- ¿Cuál es el espacio muestral?
- Describe, escribiendo todos sus elementos, los sucesos: A: “Obtener menor que 4”, B: “Obtener par”, C: “Obtener mayor que 5”.
- Halla los sucesos: $A \cup B$, $B \cap C$, $A^c \cap B^c$, $A \cap C$
- Cuántos sucesos hay en total.

Actividad 4: Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,2$. Halla:

- $P(A \cup B)$
- $P(A - B)$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- $P(A \cup \bar{B})$

Actividad 5: De dos sucesos A y B, de un espacio muestral, se sabe que: $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ y $P(A^c \cap B^c) = 0,4$. Determina:

- $P(A \cup B)$
- $P(A \cap B)$

Actividad 6: Sea P una probabilidad definida en $E = \{A, B, C\}$. Encuentra el valor de $P(A)$ en los siguientes casos:

- $P(B) = 1/3$ y $P(C) = 1/4$
- $P(A) = 2P(B)$ y $P(C) = 1/4$

Actividad 7: Extraemos una carta de una baraja española. Halla las siguientes probabilidades:

- Que sea un rey o un as.
- Que sea un rey o una copa
- Que sea un rey y una copa

Actividad 8: Lanzamos dos dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que:

- La suma de los puntos sea 7.
- El producto de los puntos sea 12.
- La diferencia de los puntos sea 2.

Actividad 9: En una fábrica de automóviles, el 6% de los coches tienen defectos en el motor, el 8% tiene defectos en la carrocería y el 2% tiene defectos en ambas partes.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un coche tenga al menos un defecto?
- ¿Y la probabilidad de que un coche no tenga defecto alguno?

Actividad 10: Se lanzan dos monedas al aire. Si salen dos caras, se extrae una bola de la urna 1, que contiene 3 bolas blancas y 3 negras. Si sale cara y cruz, se extrae de la urna 2, que contiene 4 bolas blancas y 1 negra. Si salen dos cruces, se extrae una bola de la urna 3, que contiene 3 bolas blancas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de extraer bola blanca después de lanzar las monedas y sacar la bola?

Actividad 11: Dos jugadores A y B inician cierto juego con 3 € cada uno. Al finalizar cada partida, el ganador recibe 1 € del perdedor. Sabiendo que A tiene una probabilidad de 0,6 de ganar la partida y que el juego finaliza cuando alguno de los dos se quede sin dinero, contesta razonadamente:

- ¿Cuál es la probabilidad de que A tenga 2 € tras jugar 2 partidas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que A tenga 4 € tras jugar 3 partidas?
- ¿Cuál es la probabilidad de finalizar el juego tras jugar 3 partidas?

Actividad 12: Dos niños escriben cada uno una vocal en un papel. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la misma?

Actividad 13: Se ha comprobado que el 48% del alumnado de 2º de Bachillerato es aficionado a la música clásica y a la pintura y que el 60% de los aficionados a la pintura también son aficionados a la música clásica. Si se elige al azar un alumno/a de 2º de Bachillerato, ¿qué probabilidad hay de que no sea aficionado a la pintura?

Actividad 14: Dos sucesos tienen probabilidades 0,4 y 0,5. Sabiendo que son independientes, calcula la probabilidad de que no suceda ninguno de los dos.

Actividad 15: Se dispone de un mazo de 450 fichas de estudiantes de una escuela de idiomas. Cada estudiante cursa un solo idioma de los tres que se imparten. El número de mujeres es $\frac{3}{2}$ del de hombre y los estudiantes de inglés representan el 80% del alumnado. El número de estudiantes de francés duplica al de alemán. Sea M el suceso "sacar una ficha de mujer" al extraer una ficha, al azar, del citado mazo y sean H, I, F y A sacar hombre, inglés, francés y alemán, respectivamente. Sabiendo que M/A es el suceso seguro y que M/F y H/F son equiprobables, determina:

- Probabilidad de F
- Probabilidad de $M \cap I$
- Probabilidad de F/M

Actividad 16: Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Si la carta extraída es un rey, nos dirigimos a la urna I, y en caso contrario, nos dirigimos a la urna II. A continuación extraemos una bola. El contenido de la urna I es de 7 bolas blancas y 5 negras, y el de la urna II es de 6 blancas y 4 negras. Halla:

- La probabilidad de que la bola extraída sea blanca y de la urna II.
- La probabilidad de que la bola extraída sea negra.

Actividad 17: El despertador de Víctor no funciona muy bien y el 20% de las veces no suena. Cuando suena, Víctor llega tarde a clase el 20% de las veces, pero si no suena, llega tarde a clase el 90% de las veces.

- Determina la probabilidad de que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador.
- Halla la probabilidad de que llegue temprano.

Actividad 18: Tenemos tres urnas. La primera contiene 3 bolas rojas y 5 negras, la segunda contiene 2 rojas y 1 negra y la tercera 2 rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola que ha resultado roja, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna?

Actividad 19: El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y la mitad de los economistas también, mientras que de los que del resto de trabajadores (no ingenieros ni economistas), solamente un 20% ocupan un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un directivo elegido al azar sea ingeniero?

Actividad 20: En un edificio se usan dos ascensores. El primero lo usan el 45% de los inquilinos y el resto de inquilinos utiliza el segundo. El primer ascensor falla un 5% de las veces que se usa y el segundo un 8%. Si un cierto día un inquilino se queda atrapado en el ascensor, ¿qué probabilidad hay de que haya sido en el primero?

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 21: Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/5$ y $P(A \cup B) = 7/15$. Halla:

- a) La probabilidad de que se verifiquen A y B.
- b) La probabilidad de que se verifique A y no se verifique B.
- c) La probabilidad de que no se verifiquen A ni B.
- d) La probabilidad de que no se verifique A si no se ha verificado B.

Actividad 22: Se escuchan 3 discos y se vuelven a guardar al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?

Actividad 23: De una muestra de 9 personas, 2 son de nivel socioeconómico bajo, de de nivel medio y 4 alto.

- a) Si se eligen dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean de nivel socioeconómico bajo?
- b) Si se eligen tres personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna sea de nivel alto?

Actividad 24: El gerente de unos grandes almacenes ha comprobado que un 38% de las familias que residen en una determinada ciudad no son clientes habituales y que un 85% de sus clientes pagan al contado el importe de sus compras. Determina la probabilidad de que, seleccionada al azar una familia en esa ciudad, sea cliente y pague al contado el importe de sus compras.

Actividad 25: Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Se pide:

- a) La probabilidad de que la segunda bola sea verde.
- b) La probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

Actividad 26: En una ciudad el 60% de sus habitantes son aficionados al fútbol, el 30% son aficionados al baloncesto y el 25% a ambos deportes.

- a) ¿Son independientes los sucesos “ser aficionado al fútbol” y “ser aficionado al baloncesto”?
- b) Si una persona no es aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no sea aficionada al baloncesto?

c) Si una persona no es aficionada al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que sea aficionada al fútbol?

Actividad 27: Tenemos un cofre A con 2 monedas de oro y 3 de plata, un cofre B con 5 monedas de oro y 4 de plata y un tercer cofre C con 2 monedas de oro. Elegimos un cofre al azar y sacamos una moneda.

- Calcula la probabilidad de que sea de oro.
- Sabiendo que ha sido de plata, calcula la probabilidad de que haya sido extraída del cofre A.

Actividad 28: En un cineclub hay 80 películas; 60 son de acción y 20 de terror. Susana elige una película al azar y se la lleva. A continuación Luis elige otra película al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que tanto Susana como Luis elijan películas de acción?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida por Luis sea de acción?

Actividad 29: En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

- A: “sacar al menos una cara y una cruz”.
- B: “sacar a lo sumo una cara”.

- Determina el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.
- ¿Son independientes ambos sucesos?

Actividad 30: Dado un espacio muestral E se consideran los sucesos A y B, cuyas probabilidades son $P(A) = 2/3$ y $P(B) = 1/2$.

- ¿Pueden ser los sucesos A y B incompatibles? ¿Por qué?
- Suponiendo que los sucesos A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$.
- Suponiendo que $A \cup B = E$, calcula $P(A \cap B)$.

Actividad 31: Juan y Pedro juegan a obtener la puntuación más alta lanzando sus dados. El dado de Juan tiene cuatro caras con la puntuación 5 y las otras dos caras con el 1. El dado de Pedro tiene dos caras con el 6, otras dos con el 4 y las otras dos con el 1.

- ¿Cuál es la probabilidad de que gane Pedro?
- ¿Cuál es la probabilidad de empatar?

Actividad 32: Los alumnos de Bachillerato de un IES proceden de 3 localidades A, B y C, siendo un 20% de A, un 30% de B y el resto de C. El 80% de los alumnos de A cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º. El 50% de los alumnos de B cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º. El 60% de los alumnos de C cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º.

- Seleccionado, al azar, un alumno de Bachillerato de ese IES, ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º?
- Si elegimos, al azar, un alumno de Bachillerato de ese IES y éste es un alumno de 1º, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la localidad B?

Actividad 33: El partido A y el partido B concurren a unas elecciones en un municipio donde el 55% de los votantes son mujeres. Se sabe que el 40% de los hombres votan al

partido A y el 50% al B. El 60% de las mujeres votan al partido A y el 20% al B. El resto de electores no vota.

- Halle la probabilidad de que una persona, elegida al azar, no vote.
- Sabiendo que una persona, elegida al azar, ha votado al partido A, halle la probabilidad de que sea mujer.

ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

Actividad 34: (2013) El 55% de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30% usa vehículo propio y el resto va andando. El 65% de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70% de los que usan vehículo propio son hombres y el 52% de los que van andando son mujeres.

- Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.
- Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?

Actividad 35: (2013) De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que $P(A) = 0,3$ y que $P(B^c) = 0,25$. Calcula las siguientes probabilidades:

- $P(A \cup B)$
- $P(A^c \cap B^c)$
- $P(A/B^c)$

Actividad 36: (2013) Una granja avícola dedicada a la producción de huevos posee un sistema automático de clasificación en tres calibres según el peso: grande, mediano y pequeño. Se conoce que el 40% de la producción es clasificada como huevos grandes, el 35% como medianos y el 25% restante como pequeños. Además, se sabe que este sistema de clasificación produce defectos por rotura en el cascarón que dependen del peso. Así, la probabilidad de que un huevo grande sea defectuoso por esta razón es del 5%, la de uno mediano del 3% y de uno pequeño del 2%. Elegido aleatoriamente un huevo,

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?
- Si el huevo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea grande?

Actividad 37: (2013) A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 años y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.

- Calcula la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.
- La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes, ¿es correcta la afirmación?
- Si una persona escogida al azar ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años?

Actividad 38: (2013) En un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un suceso A es 0.68, la de que ocurra otro suceso B es 0.2, y la de que no ocurra ninguno de los dos es 0.27. Halla la probabilidad de que:

- a) Ocurran los dos a la vez.
- b) Ocurra B pero no A.
- c) Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.

Actividad 39: (2013) Una encuesta realizada en un banco indica que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un préstamo personal y un 20% tiene un préstamo de cada tipo. Se elige, al azar, un cliente de ese banco:

- a) Calcula la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos préstamos.
- b) Calcula la probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario sabiendo que no tiene préstamo personal.

Actividad 40: (2013) En una urna A hay 10 bolas verdes y 10 rojas, y en otra urna B hay 15 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado, de forma que si sale múltiplo de 3 se extrae una bola de la urna A y en el resto de casos se extrae una bola de la urna B.

- a) Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea roja.
- b) Si la bola extraída resulta ser de color verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Actividad 41: (2013) En una empresa, el 65% de sus empleados habla inglés, y de éstos, el 40% habla también alemán. De los que no hablan inglés, el 25% habla alemán. Se escoge un empleado al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable ambos idiomas?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alemán?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que habla alemán, hable también inglés?

Actividad 42: (2013) Un Centro de Salud propone dos terapias, A y B, para dejar de fumar. De las personas que acuden al Centro para dejar de fumar, el 45% elige la terapia A, y el resto la B. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia A y el 80% de los que siguieron la B no han vuelto a fumar. Se elige al azar un usuario del Centro que siguió una de las dos terapias:

- a) Calcula la probabilidad de que después de un año no haya vuelto a fumar.
- b) Si transcurrido un año esa persona sigue sin fumar, calcula la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.
- c) Si transcurrido un año esa persona ha vuelto a fumar, calcula la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.

Actividad 43: (2013) De los sucesos independientes A y B se sabe que $P(A^c) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.8$.

- a) Halla la probabilidad de B.
- b) Halla la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.
- c) ¿Son incompatibles los sucesos A y B ?

Actividad 44: (2013) Se cree que hay una vuelta hacia estilos de bailes más populares, por lo que se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato, resultando que al 40% les gusta la salsa, al 30% le gusta el merengue y al 10% les gusta tanto la salsa como el merengue.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?
- b) ¿Y la de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?
- c) ¿Son independientes los sucesos "gustar la salsa" y "gustar el merengue"? ¿Son compatibles?

Actividad 45: (2013) El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30% para industria y el 20% para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.

- a) Si se elige al azar un préstamo, calcula la probabilidad de que se pague.
- b) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo?
- c) Ante un préstamo impagado el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo, ¿lleva razón el director?

Actividad 46: (2012) Una compañía de seguros ha hecho un seguimiento durante un año a 50.000 coches de la marca A, a 20.000 de la marca B y a 30.000 de la C, que tenía asegurados, obteniendo que, de ellos, habían tenido accidente 650 coches de la marca A, 200 de la B y 150 de la C. A la vista de estos datos:

- a) ¿Cuál de las tres marcas de coches tiene menos proporción de accidentes?
- b) Si, elegido al azar uno de los coches observados, ha tenido un accidente, ¿cuál es la probabilidad de que sea la marca C?

Actividad 47: (2012) En una localidad hay solamente dos supermercados A y B. El 58% de los habitantes compra en el A, el 35% en el B y el 12% compra en ambos. Si se elige un ciudadano al azar, calcule la probabilidad de que:

- a) Compre en algún supermercado.
- b) No compre en ningún supermercado.
- c) Compre solamente en un supermercado.
- d) Compre en el supermercado A, sabiendo que no compra en el B.

Actividad 48: (2012) En un congreso de 200 jóvenes profesionales se pasa una encuesta para conocer los hábitos en cuanto a contratar los viajes por internet. Se observa que 120 son hombres y que, de estos, 84 contratan los viajes por Internet, mientras que 24 de las mujeres no emplean esa vía. Elegido un congresista al azar, calcula la probabilidad de que:

- a) No contrate sus viajes por internet.
- b) Use internet para contratar los viajes, si la persona elegida es una mujer.
- c) Sea hombre, sabiendo que contrata sus viajes por internet.

Actividad 49: (2012) Lanzamos un dado, si sale 5 o 6 extraemos una bola de la urna A, que contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Si sale otro resultado se extrae una bola de la urna B, que contiene 3 bolas blancas y 7 negras. Calcula:

- a) La probabilidad de que la bola extraída sea negra.
- b) La probabilidad de que la bola sea negra y de la urna B.

c) La probabilidad de que haya salido menos de 5 si la bola extraída ha sido blanca.

Actividad 50: (2012) Una empresa dispone de tres máquinas A, B y C, que fabrican, respectivamente, el 60%, 30% y 10% de los artículos que comercializa. El 5% de los artículos que fabrica A, el 4% de los de B y el 3% de los de C son defectuosos. Elegido, al azar, un artículo de los que se fabrican en la empresa:

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y esté fabricado por la máquina C?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?
- Si sabemos que no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A?

Actividad 51: (2012) Se sabe que el 90% de los estudiantes del último curso de una Universidad está preocupado por sus posibilidades de encontrar trabajo, el 30% está preocupado por sus notas y el 25% por ambas cosas.

- Si hay 400 alumnos matriculados en el último curso de dicha Universidad, ¿cuántos de ellos no están preocupados por ninguna de las dos cosas?
- Si un alumno del último curso, elegido al azar, no está preocupado por encontrar trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté preocupado por sus notas?

Actividad 52: (2012) Se ha impartido un curso de “conducción eficiente” a 200 personas. De los asistentes al curso, 60 son profesionales de autoescuela y, de ellos, el 95% han mejorado su conducción. Este porcentaje baja al 80% en el resto de los asistentes. Halle la probabilidad de que, elegido un asistente al azar:

- No haya mejorado su conducción.
- No sea profesor de autoescuela, sabiendo que ha mejorado su conducción.

Actividad 53: (2012) Se sabe que el 44% de la población activa de cierta provincia está formada por mujeres. También se sabe que, de ellas, el 25% está en paro y que el 20% de los hombres de la población activa también están en paro.

- Elegida, al azar, una persona de la población activa de esa provincia, calcula la probabilidad de que esté en paro.
- Si hemos elegido, al azar, una persona que trabaja, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Actividad 54: (2012) Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae una bola al azar.

- Calcula la probabilidad de que sea blanca.
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca sabiendo que está marcada?
- ¿cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada?
- Son independientes los sucesos “sacar bola marcada” y “sacar bola blanca”.

Actividad 55: (2012) Se consideran dos sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$ y $P(A \cup B) = 0.94$

- ¿Son A y B sucesos independientes?

- b) Calcula $P(A/B)$
c) Calcula $P(A^c \cup B^c)$

Actividad 56: (2012) Un pescador tiene tres tipos de carnada de las que sólo una es adecuada para pescar salmón. Si utiliza la carnada correcta la probabilidad de que pesque un salmón es $1/3$, mientras que si usa una de las inadecuadas esa probabilidad se reduce a $1/5$.

- a) Si elige aleatoriamente la carnada, ¿cuál es la probabilidad de que pesque un salmón?
b) Si ha pescado un salmón, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho con la carnada adecuada?

Actividad 57: (2012) Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral, de los que se conocen las probabilidades $P(A) = 0.60$ y $P(B) = 0.25$. Determina las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes supuestos:

- a) Si A y B fuesen incompatibles.
b) Si A y B fueran independientes.
c) Si $P(A/B) = 0.40$.

Actividad 58: (2011) En una primera bolsa se han colocado 4 bolas blancas y 3 negras, y en una segunda bolsa 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera y, sin verla, se introduce en la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda. Halla la probabilidad de que:

- a) La bola extraída de la segunda bolsa sea negra.
b) La bola extraída de la primera bolsa sea negra, si sabemos que la bola extraída de la segunda ha sido blanca.

Actividad 59: (2011) Un libro tiene cuatro capítulos. El primer capítulo tiene 140 páginas, el segundo 100, el tercero 150 y el cuarto 50. El 5% de las páginas del primer capítulo, el 4% del segundo y el 2% del tercero tienen algún error. Las páginas del cuarto capítulo no tienen errores.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una página al azar, tenga algún error?
b) Supongamos que elegimos una página al azar y observamos que no tiene ningún error, ¿cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?

Actividad 60: (2011) Un examen consta de una parte teórica y una parte práctica. La probabilidad de que se apruebe la parte teórica es 0.7 y la de que se apruebe la parte práctica es 0.75. Se sabe que el 50% de los alumnos ha aprobado ambas.

- a) Calcula la probabilidad de aprobar alguna de las dos partes.
b) Calcula la probabilidad de aprobar la parte práctica sabiendo que no se ha aprobado la parte teórica.
c) ¿Son independientes los sucesos “aprobar parte teórica” y “aprobar parte práctica”?

Actividad 61: (2011) Pedro vive en una ciudad donde el 40% de los días del año hay riesgo de lluvia y el resto no lo hay. Cuando hay riesgo de lluvia, Pedro coge el paraguas un 98% de las veces y cuando no lo hay, un 5% de las veces. Si se selecciona un día del año al azar,

- ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro no haya cogido el paraguas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que exista riesgo de lluvia, si sabemos que ese día Pedro ha cogido el paraguas?

Actividad 62: (2011) Sean los sucesos, A y B, tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ y $P(A/B) = 0.5$

- Halla la probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.
- Calcula la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.
- ¿Son independientes los sucesos A y B? Razona la respuesta.

Actividad 63: (2011) Una compañía aseguradora realiza operaciones de seguros médicos y de seguros de vida. El 20% de las operaciones corresponde a seguros médicos y el resto a seguros de vida. El porcentaje de operaciones en las que no se producen retrasos en los pagos es del 10% en los seguros médicos y del 15% en seguros de vida.

- Halla el porcentaje de operaciones en las que no se producen retrasos en los pagos.
- De las operaciones que han sufrido retrasos en los pagos, ¿qué porcentaje corresponde a los seguros de vida?

Actividad 64: (2011) Un jugador lanza a la vez un dado y una moneda

- Construye el espacio muestral de este experimento aleatorio.
- Determina la probabilidad del suceso A: "El jugador obtiene un número par en el dado y cruz en la moneda".
- Si sabemos que en la moneda ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado haya salido más de 3 puntos?

Actividad 65: (2011) Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.

- Calcula la probabilidad de que gane Ana.
- Calcula la probabilidad de que gane Manolo.
- Calcula la probabilidad de que haya empate.

Actividad 66: (2011) En una ciudad, el 55% de la población consume aceite de oliva, el 30% de girasol, y el 20% ambos tipos de aceite. Se escoge una persona al azar:

- Si consume aceite de oliva, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también aceite de girasol?
- Si consume aceite de girasol, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma aceite de oliva?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite?

Actividad 67: (2011) El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión y de los que sí lo están, solamente un 5% fueron reparados anteriormente. Se elige un aparato al azar en el servicio técnico:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido reparado en otra ocasión?
 b) Si es la primera vez que ha llegado al servicio técnico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en garantía?

Actividad 68: (2011) En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma suene es 0.95. La probabilidad de que suene la alarma sin que haya incidente es de 0.03.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que suene la alarma?
 b) Si ha sonado la alarma, calcula la probabilidad de que no haya habido incidente.

Actividad 69: (2011) Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:
 $P(A) = 0.4$; $P(B) = 0.5$; $P(A \cap B) = 0.2$

- a) Calcula las siguientes probabilidades $P(A \cup B)$, $P(A/B)$ y $P(B/A^c)$.
 b) Razona si A y B son sucesos incompatibles.
 c) Razona si A y B son independientes.

Actividad 70: (2010) Un alumno va a la Facultad en autobús el 80% de los días y el resto en su coche. Cuando va en autobús llega tarde el 20% de las veces y cuando va en coche llega a tiempo sólo el 10% de las veces. Elegido un día cualquiera al azar, determina:

- a) La probabilidad de que llegue a tiempo a clase y haya ido en autobús.
 b) La probabilidad de que llegue tarde a clase.
 c) Si ha llegado a tiempo a clase, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido en autobús?

Actividad 71: (2010) De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elige al azar una persona asistente al congreso.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea hombre ni sea pediatra?
 c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?

Actividad 72: (2010) De dos sucesos aleatorios A y B del mismo espacio de sucesos se sabe que $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ y $P(A \cap B) = \frac{5}{8}$. Calcula:

- a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.
 b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
 c) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B .

Actividad 73: (2010) El 60% de los camareros de una localidad tienen 35 años o más, y de ellos el 70% son dueños del local donde trabajan. Por otra parte, de los camareros con menos de 35 años sólo el 40% son dueños del local donde trabajan.

- Seleccionado un camarero al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea dueño del local?
- Elegido al azar un camarero dueño de su local, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 35 años?

Actividad 74: (2010) Una empresa utiliza dos servidores para conectarse a Internet. El primero, S_1 , lo utiliza el 45% de las veces y el segundo, S_2 , el resto. Cuando se conecta a Internet con S_1 , los ordenadores se bloquean el 5% de las veces, y cuando lo hace con S_2 el 8%. Si un día, al azar, la empresa está conectada a Internet,

- ¿Cuál es la probabilidad de que los ordenadores se queden bloqueados?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa esté utilizando el servidor S_1 , sabiendo que los ordenadores se han quedado bloqueados?

Actividad 75: (2010) En un centro de enseñanza secundaria se sabe que el 45% de los alumnos juegan al fútbol, que el 60% practican atletismo, y que de los que practican atletismo el 50% juegan al fútbol.

- ¿Qué porcentaje de alumnos practican ambos deportes?
- Si se elige al azar un alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que no practique ninguno de estos deportes?
- Si un alumno de ese centro no juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que practique atletismo?

Actividad 76: (2010) El 41% de quienes se presentan a un examen son varones. Aprueban dicho examen el 70% de los varones presentados y el 60% de las mujeres presentadas.

- Calcula la probabilidad de que si una persona escogida al azar ha aprobado, sea mujer.
- Calcula la probabilidad de que si una persona escogida al azar ha suspendido, sea mujer.
- Ana dice que si alguien ha aprobado, es más probable que sea mujer que varón; Benito dice que si alguien ha suspendido es más probable que sea mujer que varón. ¿Quién tiene razón?

Actividad 77: (2010) Una persona lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas de 1 al 6.

- Determina el número de resultados del espacio muestral de este experimento aleatorio.
- Sea A el suceso “la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4” y B el suceso “la primera puntuación es impar”. Halla la probabilidad de A y la de B.
- ¿Son independientes A y B?

Actividad 78: (2010) En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado equilibrado con las caras numeradas del 1 al 6 y observar el resultado se consideran los siguientes sucesos:

A: “Obtener un número mayor que 4”. B: “Obtener un número par”

- a) Escribe los elementos de cada uno de los siguientes sucesos:
 A ; B ; $A^c \cup B$; $A \cap B^c$; $(A \cap B)^c$
- b) Calcula las probabilidades $P(A^c \cap B^c)$ y $P(A^c \cup B^c)$.

Actividad 79: (2010) Una fábrica posee un sistema de alarma contra robos. Por estudios previos a la instalación del sistema se sabe que la probabilidad de que un día se produzca un robo en la fábrica es 0.08. Las indicaciones técnicas del fabricante de la alarma dicen que la probabilidad de que suene si se ha producido un robo es 0.98, y de que suene si no ha habido robo es 0.03.

- a) En un día cualquiera, calcula la probabilidad de que no suene la alarma.
 b) Si suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no sea debido a un robo?

Actividad 80: (2010) En una capital se editan dos periódicos, CIUDAD y LA MAÑANA. Se sabe que el 85% de la población lee alguno de ellos, que el 18% lee los dos y que el 70% lee CIUDAD. Si elegimos al azar un habitante de esa capital, halle la probabilidad de que:

- a) No lea ninguno de los dos.
 b) Lea sólo LA MAÑANA.
 c) Lea CIUDAD, sabiendo que no lee LA MAÑANA.

Actividad 81: (2010) Un dado tiene seis caras, tres de ellas marcadas con un 1, dos marcadas con una X y la otra marcada con un 2. Se lanza tres veces ese dado.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres veces el 1?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos X y un 2 en cualquier orden?
 c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres resultados diferentes?

Actividad 82: (2009) Un turista que realice un crucero tiene un 50% de probabilidad de visitar Cádiz, un 40% de visitar Sevilla y un 30% de visitar ambas. Calcula la probabilidad de que:

- a) Visite al menos una de las dos ciudades.
 b) Visite únicamente una de las dos ciudades.
 c) Visite Cádiz pero no visite Sevilla.
 d) Visite Sevilla, sabiendo que ha visitado Cádiz.

Actividad 83: (2009) En un centro escolar, los alumnos de 2º Bachillerato pueden cursar, como asignaturas optativas, Estadística o Diseño Asistido por Ordenador (DAO). El 70% de los alumnos estudia Estadística y el resto DAO. Además, el 60% de los alumnos que estudia Estadística son mujeres y, de los alumnos que estudian DAO son hombres el 70%.

- a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?
 b) Sabiendo que se ha seleccionado una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Estadística?

Actividad 84: (2009) Lena y Adrián son aficionados al tiro con arco. Lena da en el blanco con probabilidad $7/11$ y Adrián con probabilidad $9/13$. Si ambos sucesos son independientes, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) “Ambos dan en el blanco”.
- b) “Sólo Lena da en el blanco”.
- c) “Al menos uno da en el blanco”

Actividad 85: (2009) Una encuesta realizada por un banco muestra que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un préstamo personal y el 20% tiene un préstamo de cada tipo. Se elige, al azar, un cliente de ese banco.

- a) Calcula la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos préstamos.
- b) Calcula la probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario, sabiendo que no tiene un préstamo personal.

Actividad 86: (2009) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A^c) = 0.2$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.85$

- a) ¿Son los sucesos A y B independientes?
- b) Calcula $P(A^c / B^c)$.

Actividad 87: (2009) Un polideportivo dispone de 100 bolas de pádel y 120 bolas de tenis. Se sabe que 65 bolas son nuevas. Además, 75 bolas de pádel son usadas. Por un error, todas las bolas se han mezclado.

- a) Calcula la probabilidad de que si elegimos, al azar, una bola de tenis, ésta sea usada.
- b) Calcula la probabilidad de que si elegimos, al azar, una bola, sea nueva.

Actividad 88: (2009) Sean A y B dos sucesos tales que: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.65$. Contesta razonadamente las siguientes preguntas:

- a) ¿Son incompatible A y B?
- b) ¿Son independientes A y B?
- c) Calcula $P(A / B^c)$.

Actividad 89: (2009) Sean A y B dos sucesos independientes de un mismo experimento aleatorio, tales que: $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$

- a) Calcula $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.
- b) Calcula $P(A / B)$ y $P(B / A^c)$.

Actividad 90: (2009) Se consideran dos sucesos A y B, asociados a un espacio muestral, tales que: $P(A \cup B) = 1$, $P(A \cap B) = 0.3$, $P(A / B) = 0.6$.

- a) Halla las probabilidades de los sucesos A y B.
- b) Determina si el suceso B es independiente del suceso A.

Actividad 91: (2009) El 70% de los visitantes de un museo son españoles. El 49% son españoles y mayores de edad. De los que no son españoles, el 40% son menores de edad.

- a) Si se escoge, al azar, un visitantes de este museo, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor de edad?
- b) Se ha elegido, aleatoriamente, un visitante de este museo y resulta que es menor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que no sea español?

Actividad 92: (2009) Una enfermedad afecta al 10% de la población. Una prueba de diagnóstico tiene las siguientes características: si se aplica a una persona con la enfermedad, da positivo en el 98% de los casos; si se aplica a una persona que no tiene la enfermedad, da positivo en el 6% de los casos. Se elige una persona, al azar, y se le aplica la prueba.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que dé positivo?
- b) Si no da positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga la enfermedad?

Actividad 93: (2009) En una editorial hay dos máquinas A y B que encuadernan 100 y 900 libros al día, respectivamente. Además, se sabe que la probabilidad de que un libro encuadernado por A tenga algún fallo de encuadernación es del 2% y del 10% si ha sido encuadernado por la máquina B. Se elige, al azar, un libro encuadernado por esa editorial.

- a) Calcula la probabilidad de que no sea defectuoso.
- b) Si es defectuoso, halla la probabilidad de haber sido encuadernado por la máquina A.

10.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES.

Actividad 1:

- a) $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ b) $A = \{2,3,5,7,11\}$ c) $B = \{1,3,5,7,9,11\}$

Actividad 2:

- a) $A \cap B = \{3,5,7\}$ b) $B \cap C = \{3,9\}$ c) $(A \cup B) \cap C = \{3,9\}$
 d) $A \cap \bar{B} = \{2\}$ e) $B - C = \{1,5,7\}$ f) $\overline{A \cup B} = \{4,6,8\}$

Actividad 3:

- a) $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ b) $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,2,4,6,8\}$, $C = \{6,7,8,9\}$
 c) $A \cup B = \{0,1,2,4,6,8\}$, $B \cap C = \{6,8\}$, $A^c \cap B^c = \{5,7,9\}$, $A \cap C = \emptyset$ d) 1024

Actividad 4:

- a) 0,7 b) 0,3 c) 0,3 d) 0,6

Actividad 5:

- a) 0,6 b) 0,7

Actividad 6:

- a) $P(A) = 5/12$ b) $P(A) = 1/2$

Actividad 7:

- a) $1/5$ b) $13/40$ c) $1/40$

Actividad 8:

- a) $1/6$ b) $1/9$ c) $2/9$

Actividad 9:

- a) 0,12 b) 0,88

Actividad 10: $13/20$ **Actividad 11:**

- a) 0 b) 0,432 c) 0,28

Actividad 12: $1/5$ **Actividad 13:** 0,2**Actividad 14:** 0,3**Actividad 15:**

- a) $2/15$ b) $7/15$ c) $1/9$

Actividad 16:

- a) $27/50$ b) $2/5$

Actividad 17:

- a) $4/25$ b) $33/50$

Actividad 18: $45/173$ **Actividad 19:** $15/37$ **Actividad 20:** $45/133$ **Actividad 21:**

- a) $1/15$ b) $4/15$ c) $8/15$ d) $2/3$

Actividad 22: $2/3$ **Actividad 23:**

- a) $1/36$ b) $5/42$

Actividad 24: 0,527

Actividad 25:

- a) 53/91 b) 38/91

Actividad 26:

- a) No b) 7/8 c) 1/2

Actividad 27:

- a) 88/135 b) 27/47

Actividad 28:

- a) 177/316 b) 3/4

Actividad 29:

- a) $E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$
 $A = \{CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC\}$
 $B = \{CXX, XCX, XXC, XXX\}$

- b) Sí, son independientes.

Actividad 30:

- a) No b) 5/6 c) 1/6

Actividad 31:

- a) 4/9 b) 1/9

Actividad 32:

- a) 39/100 b) 15/61

Actividad 33:

- a) 31/200 b) 11/17

Actividad 34:

- a) 949/2000 b) 144/949

Actividad 35:

- a) 33/40 b) 7/40 c) 3/10

Actividad 36:

- a) $71/2000$ b) $40/71$

Actividad 37:

- a) $2/7$ b) Falso c) $4/33$

Actividad 38:

- a) $3/20$ b) $1/20$ c) $5/32$

Actividad 39:

- a) $1/10$ b) $4/5$

Actividad 40:

- a) $1/3$ b) $3/4$

Actividad 41:

- a) $13/50$ b) $139/400$ c) $104/139$

Actividad 42:

- a) $151/200$ b) $63/151$ c) $27/49$

Actividad 43:

- a) $1/2$ b) $1/2$ c) Compatibles

Actividad 44:

- a) $1/4$ b) $1/3$ c) Dependientes y compatibles.

Actividad 45:

- a) $143/200$ b) $28/57$ c) $20/57$

Actividad 46:

- a) La C b) $3/20$

Actividad 47:

- a) $81/100$ b) $19/100$ c) $69/100$ d) $46/65$

Actividad 48:

- a) $3/10$ b) $7/10$ c) $3/5$

Actividad 49:

- a) $3/5$ b) $7/15$ c) $1/2$

Actividad 50:

- a) $3/1000$ b) $19/200$ c) $114/199$

Actividad 51:

- a) 20 b) $1/2$

Actividad 52:

- a) $31/200$ b) $112/169$

Actividad 53:

- a) $111/500$ b) $224/389$

Actividad 54:

- a) $1/4$ b) $3/10$ c) $7/16$ d) Dependientes

Actividad 55:

- a) Independientes b) $4/5$ c) $22/50$

Actividad 56:

- a) $11/45$ b) $5/11$

Actividad 57:

- a) 0 y 0,85 b) 0,15 y 0,7 c) 0,1 y 0,75

Actividad 58:

- a) $38/63$ b) $9/25$

Actividad 59:

- $7/220$ b) $16/71$

Actividad 60:

- a) $19/20$ b) $5/6$ c) Dependientes.

Actividad 61:

- a) $289/500$ b) $196/211$

Actividad 62:

- a) $1/5$ b) $3/5$ c) Independientes.

Actividad 63:

- a) $7/50$ b) $79/100$

Actividad 64:

- a) $E = \{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 1X, 2X, 3X, 4X, 5X, 6X\}$ b) $1/2$ c) $1/2$

Actividad 65:

- a) $27/72$ b) $35/72$ c) $1/6$

Actividad 66:

- a) $4/11$ b) $1/3$ c) $7/20$

Actividad 67:

- a) $31/200$ b) $57/169$

Actividad 68:

- a) $61/500$ b) $27/122$

Actividad 69:

- a) $7/10$, $2/5$ y $1/2$ b) Compatibles. c) Independientes.

Actividad 70:

- a) $32/50$ b) $17/50$ c) $1/33$

Actividad 71:

- a) $1/9$ b) $4/9$ c) $1/3$

Actividad 72:

- a) $19/24$ b) $5/24$ c) $5/6$

Actividad 73:

- a) $21/50$ b) $8/29$

Actividad 74:

- a) $133/2000$ b) $45/133$

Actividad 75:

- a) 30% b) $1/4$ c) $6/11$

Actividad 76:

- a) $354/641$ b) $236/359$ c) Los dos.

Actividad 77:

- a) 36 resultados b) $1/12$ y $1/2$ c) Dependientes.

Actividad 78:

- a) $A = \{5,6\}$; $B = \{2,4,6\}$; $A^c \cup B = \{1,2,3,4,6\}$; $A \cap B^c = \{5\}$; $(A \cap B)^c = \{1,2,3,4,5\}$
b) $1/3$ y $5/6$

Actividad 79:

- a) $447/500$ b) $69/265$

Actividad 80:

- a) $3/20$ b) $3/20$ c) $52/67$

Actividad 81:

- a) $1/8$ b) $1/18$ c) $1/6$

Actividad 82:

- a) $3/5$ b) $3/10$ c) $1/5$ d) $3/5$

Actividad 83:

- a) $49/100$ b) $14/17$

Actividad 84:

- a) $63/143$ b) $28/143$ c) $127/143$

Actividad 85:

- a) $1/10$ b) $4/5$

Actividad 86:

- a) Independientes b) $1/5$

Actividad 87:

- a) $2/3$ b) $13/44$

Actividad 88:

- a) Compatibles. b) Dependientes. c) $5/12$

Actividad 89:

- a) $6/25$ y $19/25$ b) $2/5$ y $3/5$

Actividad 90:

- a) $4/5$ y $1/2$ b) Dependientes.

Actividad 91:

- a) $67/100$ b) $4/11$

Actividad 92:

- a) $19/125$ b) $1/424$

Actividad 93:

- a) $227/250$ b) $1/49$

NOTA IMPORTANTE: Las actividades de la 34 a la 93 son de Selectividad. En las dos páginas web siguientes se encuentran las soluciones de todos los exámenes de forma detallada:

- <http://emestrada.wordpress.com/category/matematicas-aplicadas-a-las-ccss-ii/>
- <http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/>