2º ESO

CAPÍTULO 10: TABLAS Y GRÁFICAS. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS.

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

El estudio de las relaciones entre dos magnitudes y su representación mediante **tablas y gráficas** es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos naturales y cotidianos que se relacionan de manera funcional.

En muchas ocasiones necesitaremos que los datos recogidos en una tabla sean representados gráficamente y utilizaremos el **sistema de referencia cartesiano**.

El sistema de referencia cartesiano se llama así en honor al filósofo, científico y matemático francés ***René Descartes*** que vivió entre los años 1596 y 1650. *Descartes* quiso fundamentar su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un «*punto de partida*» sobre el que edificar todo el conocimiento. En Geometría, *Descartes* también comenzó tomando un "*punto de origen*" para poder representar la geometría plana.

René Descartes

En este tema aprenderemos a utilizar el **lenguaje gráfico** para interpretar y describir situaciones del mundo que nos rodea. También estudiaremos las **funciones** entre dos magnitudes variables, en las que una tiene una relación de dependencia de la otra. *Descartes, Newton* y *Leibniz* ya establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables. Aunque su definición y comprensión fue posterior, a partir de *Fourier*, llegando al siglo XX.

Así, los contenidos que vamos a tratar nos van a permitir trabajar con las distintas formas de representar algunas situaciones funcionales: numérica, gráfica, verbal o a través de una expresión algebraica (como las que acabamos de estudiar en el capítulo anterior) y las distintas formas de traducir una expresión de uno a otro lenguaje.

1. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS

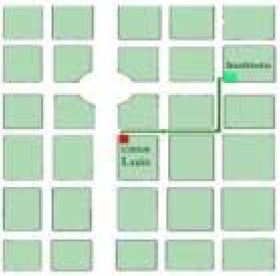
1.1. Sistema de referencia cartesiano

Ya sabes que:

Constantemente nos encontramos con situaciones en las que tenemos que indicar la localización de objetos o lugares respecto de otros conocidos y, en ocasiones, sus posiciones en un plano o mapa. Para entendernos es muy importante que tengamos una referencia común.

Si quieres indicar a unos amigos que no conocen tu barrio, donde se encuentra una tienda determinada o el Instituto donde estudias, bastará con que les indiques su posición con las referencias que utilicéis todos.

Ejemplo 1:



- Luis vive en la casa marcada en rojo en el plano adjunto y estudia en un Instituto cercano marcado en verde en el plano.

Para indicar a sus amigos franceses donde está su Instituto les da las siguientes indicaciones:

"Al salir de mi casa vais hacia la derecha y cruzáis dos calles,
luego hacia la izquierda cruzáis una calle y ya habéis llegado"

Las referencias izquierda y derecha así como la idea de cruzar una calle son comunes a todos nosotros, además fíjate que en el esquema la línea que indica el camino es muy clara

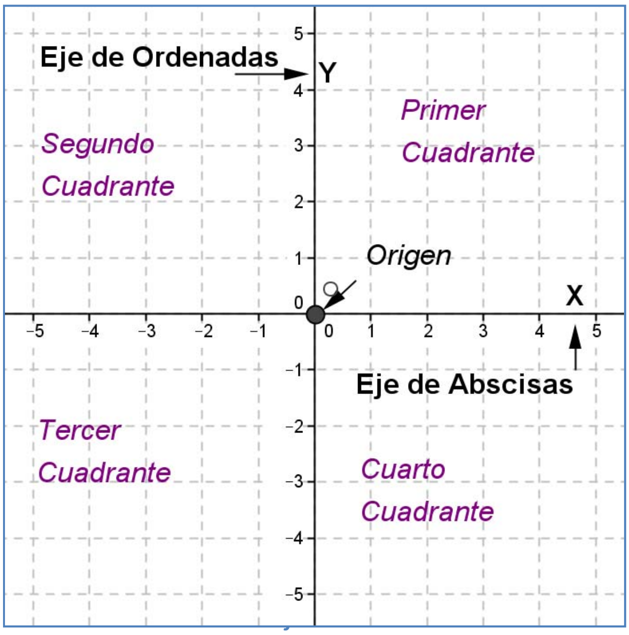
En Matemáticas, en la mayoría de las ocasiones, utilizamos sistemas de referencia cartesianos que también se utilizan en Ciencias Sociales para trabajar los mapas y los planos.

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **ejes**. El punto en el que se cortan los ejes es el origen del sistema, también llamado **origen de coordenadas.**

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal le denominamos **eje de abscisas** o también eje X y al vertical **eje de ordenadas** o eje Y.

Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha
- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda
- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda
- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha



Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo 2:

- "Si estas situado sobre la X que aparece en el mapa, sigue 3 leguas al Este y luego 2 leguas al Norte. Allí está enterrado el tesoro"

Nota: La legua es una antigua unidad de longitud que expresa la distancia que una persona puede andar durante una hora. La legua castellana se fijó originalmente en 5.000 varas castellanas, es decir, 4,19 km

Las referencias Norte, Sur, Este y Oeste nos definen un sistema de referencia cartesiano donde el Origen es el punto marcado con la X.

Actividades resueltas

- Marca en el plano el punto donde se encuentra el tesoro y como se llegaría a él desde el punto X

Solución:

Actividades propuestas

1. Describe y marca en el plano adjunto como llegarías a:

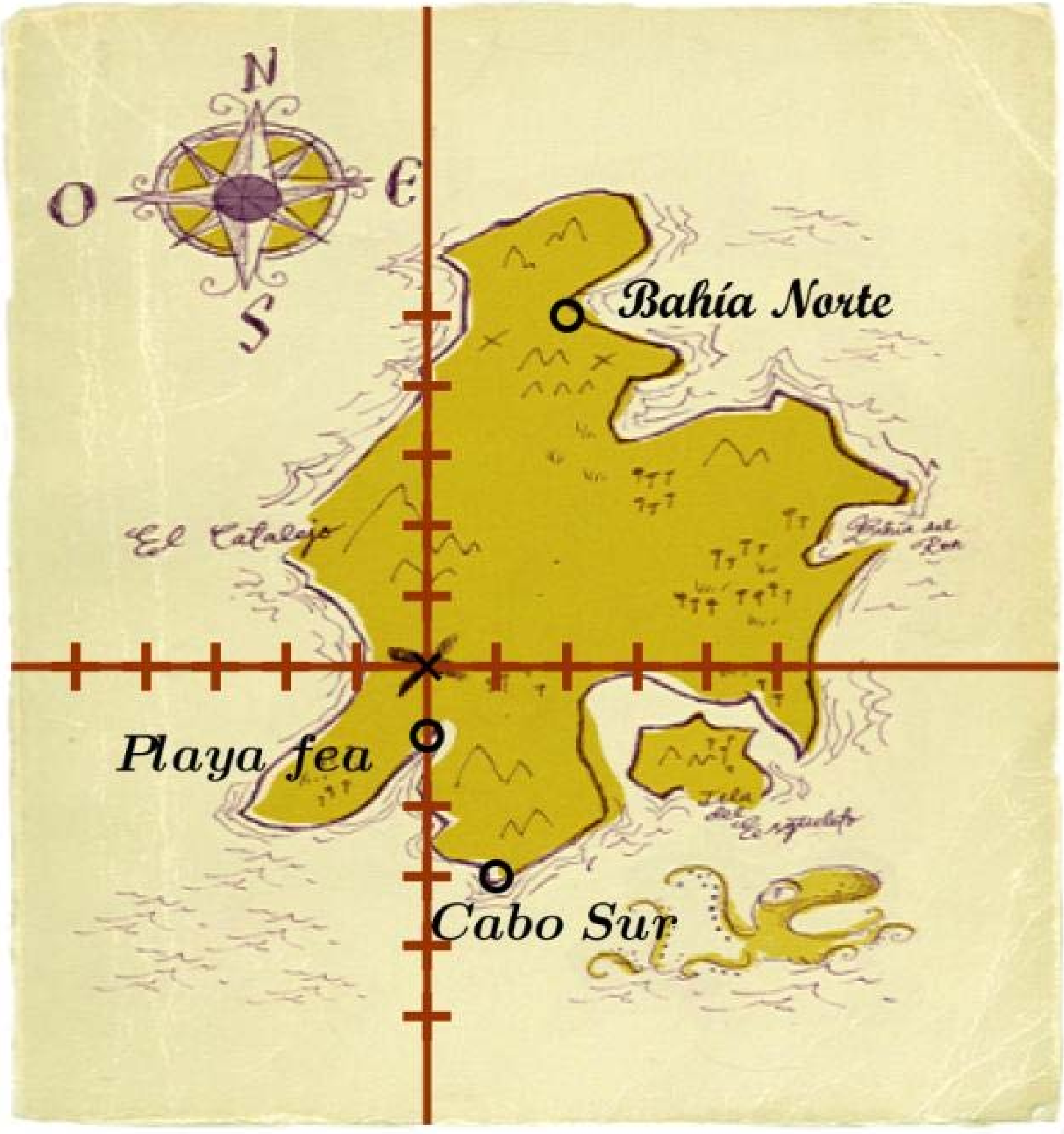
a) Cabo Sur

b) Bahía Norte

c) Playa Fea

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Material fotocopiable



Isla del Tesoro

Fuente: Banco de Imágenes y sonidos del INTEF.
Colecciones: Robert Louis Stevenson: La isla del tesoro. La isla del tesoro: El mapa del tesoro, Ilustrador: Loren

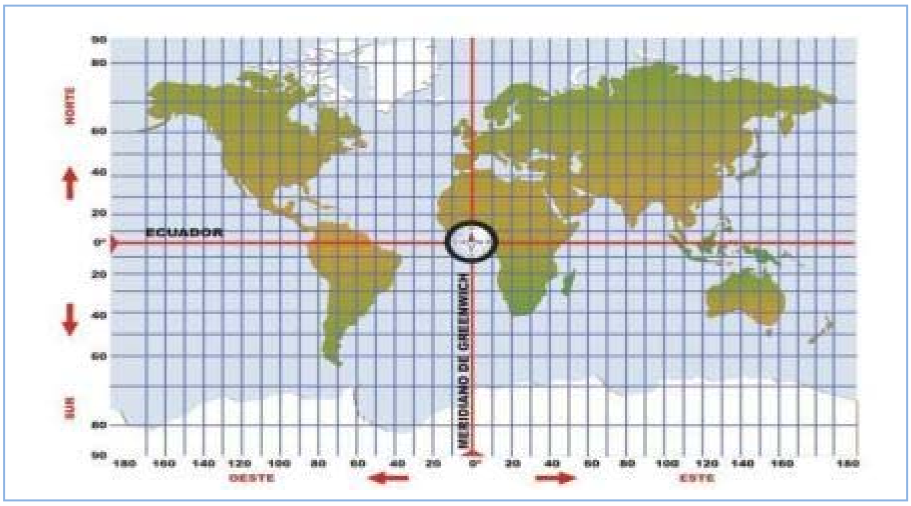
2. En el mapa indica en que cuadrante se encuentran los siguientes paises:

a) Australia

b) España

c) Argentina

d) China

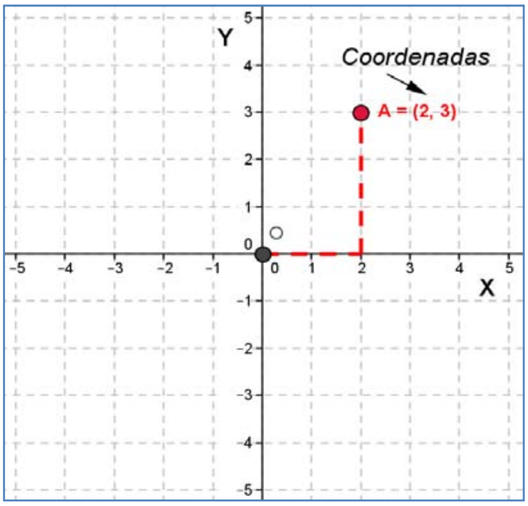


1.2. Coordenadas. Representación e identificación de puntos

En las actividades anteriores hemos descrito como llegaríamos a algunos puntos a partir de un sistema de referencia. Para llegar a un punto, partiendo del Origen del sistema de referencia, hemos recorrido una determinada cantidad hacia la derecha o la izquierda y luego otra hacia arriba o hacia abajo. Así cada punto quedará determinado por un par de números a los que llamaremos **coordenadas del punto**.

Las **coordenadas de un punto A** son un par ordenado de números **(*x*, *y*)**, siendo ***x*** la primera coordenada que la llamamos **abscisa** y nos indica la cantidad a la que dicho punto se encuentra del eje vertical. La segunda coordenada es la ***y***, llamada **ordenada** y nos indica la cantidad a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal.

Cuando esta cantidad sea hacia la izquierda o hacia abajo la indicaremos con un número **negativo** y si es hacia arriba o a la derecha la indicaremos con uno **positivo**, de la misma manera que hacíamos al representar los números en la recta.



Ejemplo 3:

- En el grafico el punto A tiene coordenadas (2, 3).

Ejemplo 4:

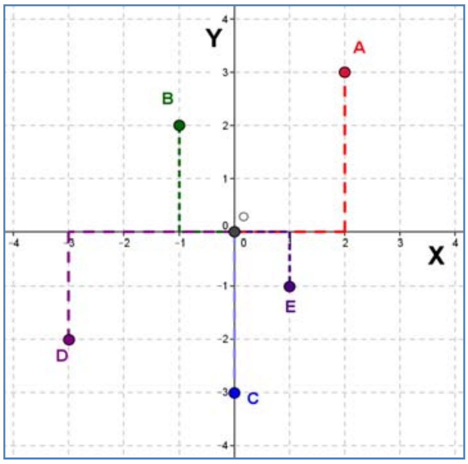
- En la Actividad resuelta 1 el TESORO se encuentra en el punto de coordenadas (3, 2).

En la Actividad propuesta 2 el Cabo Sur se encuentra en el punto de coordenadas (1, –3), la Bahía Norte en el punto (2, 5) y Playa fea en el punto (0, –1).

Nota: El cabo Sur se encuentra en el cuarto cuadrante y su ordenada es una cantidad negativa porque desde el origen tiene que ir hacia el Sur, esto es, tiene que bajar. Y la Playa Fea se encuentra en el eje de ordenadas hacía el Sur, por eso su abscisa es 0 *y su ordenada negativa.*

Actividades resueltas

- Indica cuales son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:



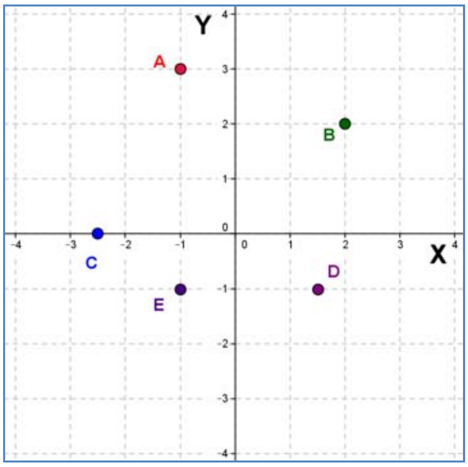
Solución

A = (2, 3); B = (–1, 2); C = (0, –3); D = (–3, –2) y E = (1, –1)

- Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

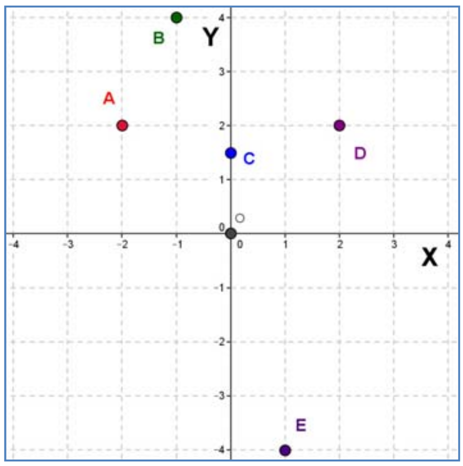
  A = (–1, 3); B = (2, 2); C = (–2'5, 0), D = (1'5, –1) y E = (–1, –1)

Solución



Actividades propuestas

3. Indica cuales son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:



4. Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

A = (–2, 3); B = (–2, –2); C = (–1'5, 0'5) y D = (0, –1)

2. TABLAS Y GRÁFICAS

2.1. Relación entre dos magnitudes. Tablas de valores

Ya sabes que:

En muchas ocasiones tenemos una relación entre dos magnitudes que nos viene dada por la correspondencia entre las cantidades de cada una de ellas. Esta relación puede ser de proporcionalidad, como estudiamos en el capítulo 8, también puede estar dada por una expresión verbal o definida por una fórmula o ecuación de las que acabamos de estudiar en el capítulo 9.

De una relación entre dos magnitudes podemos obtener un conjunto de datos, relacionados dos a dos, que si los ordenamos en una tabla nos facilita su interpretación.

Una **tabla de valores** es una tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.

Ejemplo 5:

- Los 100 metros lisos es una carrera en la que se tiene que recorrer 100 metros, libres de todo obstáculo, con la mayor rapidez posible. Se considera, en general, como la competición de carreras de velocidad más importante.

  Los mejores atletas la realizan en un tiempo de alrededor de 10 segundos de duración corriendo cada 10 metros en un promedio de 1 segundo.

Longitud (m)	10	20	50	70	90	100
Tiempo (s)	1	2	5	7	9	10

Nota: La tabla también se puede poner en sentido vertical

longitud (m)	tiempo (s)
10	1
20	2
50	5
70	7
90	9
100	10

En algunas ocasiones la relación entre dos magnitudes nos la pueden indicar directamente mediante su tabla de valores

Ejemplo 6:

- *"La sopa estaba muy caliente, así que la dejé enfriar durante cinco minutos, la temperatura de la sopa, según se enfriaba, la indica la tabla siguiente"*

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	80	60	50	44	40	39

Ejemplo 7:

- Las notas de Matemáticas y Tecnología, en la segunda evaluación, de un grupo de 2º de E.S.O. fueron las recogidas en la siguiente tabla:

Matemáticas	3	5	10	3	5	6	9	7	5	8	3	8	9	1	5	5	4	6	5	9	6	10	6	3	4	1	8	6	9	7
Tecnología	4	7	7	5	6	8	7	6	4	10	2	8	10	1	5	6	7	10	3	5	8	10	9	3	5	1	6	5	5	8

En otras ocasiones desconocemos cuales son las magnitudes con las que estamos trabajando, tan solo conocemos los valores relacionados, y las solemos indicar con las letras X e Y

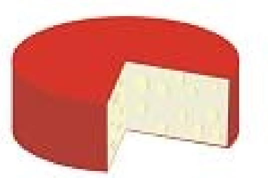
Ejemplo 8:

- En la tabla adjunta tenemos la relación entre la magnitud **X** y la magnitud **Y**

X	–2	–1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	–1	–3

Actividades resueltas

- El precio de un kilo de queso especial de cabra, de la sierra de Madrid, es de 18 € y se vende al peso. Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que relacione el peso del queso con su precio.



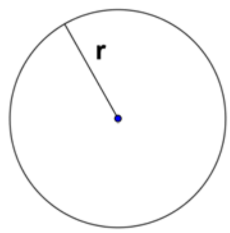
Solución

Como nos piden seis cantidades diferentes vamos a escoger algunas que nos parecen cotidianas hasta un kilo, por ejemplo, 100 *g,* 250 *g (cuarto de kilo),* 500 *g (medio kilo),* 625 *g,* 750 *g y* 1000 *g.*

Como el precio y el peso son magnitudes proporcionales sabemos (capítulo 8*) completar la tabla.*

Peso (g)	100	250	500	625	750	1000
Precio (€)	1,80	4,50	9	11,25	13,50	18

- Como sabes el área de un círculo se puede calcular mediante la fórmula $A = \pi r^2$, en donde r es el radio del círculo (utilizamos $\pi = 3{,}14$). Construye una tabla de valores desde un radio de 1 cm a uno de 5 cm, de centímetro en centímetro.



Solución

Nos piden que elaboremos una tabla para los valores del radio 1, 2, 3, 4 y 5.
Para ello sustituimos $\boldsymbol{r}$ *en la fórmula por cada uno de esos valores y obtenemos:*

para $\boldsymbol{r} = 1 \to \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$; *para* $\boldsymbol{r} = 2 \to \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56; \ldots$

Radio (cm)	1	2	3	4	5
Área (cm²)	3,14	12,56	28,26	50,24	78,50

Actividades propuestas

5. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, que relacione el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo medio es de 7 litros cada 100 kilómetros.

6. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, en que se relacione el lado de un cuadrado y su perímetro.

7. Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que represente la siguiente situación: *"Una compañía de telefonía cobra 6 céntimos de euro por establecimiento de llamada y 3 céntimos por minuto hablado"*

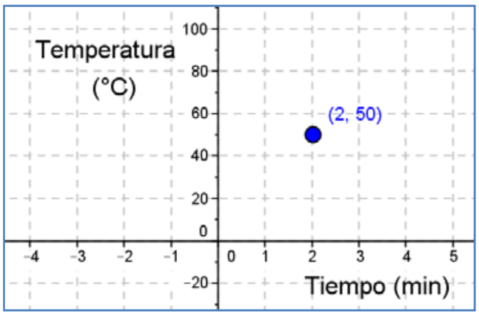
2.2. Representando puntos. Las gráficas

Cada par de datos correspondientes de una relación entre dos magnitudes los podemos **representar** en un sistema cartesiano

Ejemplo 9:

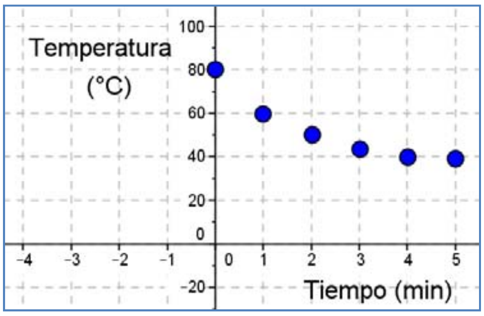
- En la relación del ejemplo de la temperatura de la sopa veíamos que a los 2 minutos, la sopa tenía una temperatura de 50 °C.

Este par de números son las coordenadas de un punto (2, 50) en un sistema de referencia cartesiano en el que en el eje de abscisas representamos la magnitud *Tiempo* medida en minutos y en el eje de ordenadas representamos la magnitud *Temperatura* medida en grados centígrados.



Si representamos en un sistema de referencia cartesiano todos los pares de datos de una tabla de valores obtenemos una **gráfica**.

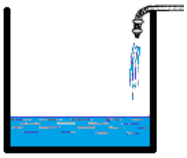
Si representamos todos los pares de datos de la tabla de valores del ejemplo anterior obtenemos la siguiente gráfica:



En ocasiones podríamos haber dado muchos más datos en la tabla de valores y al representarlos nos quedaría casi una línea. En estos casos la **gráfica**, **uniendo los puntos**, estaría constituida por **una línea** que en muchas situaciones sería continua.

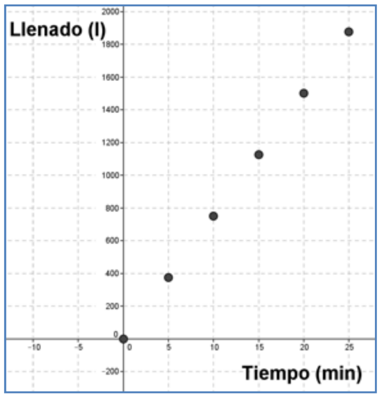
Ejemplo 10:

- Si llenamos un depósito de agua mediante un surtidor que vierte 75 litros de agua por minuto podemos calcular una tabla de valores con la cantidad de agua que va teniendo el depósito (llenado) en relación al tiempo que ha ido pasando.

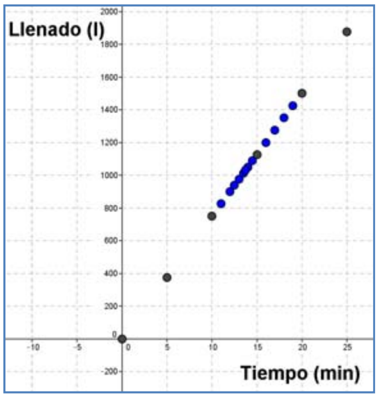


tiempo (min)	0	5	10	15	20	25
llenado (l)	0	375	750	1125	1500	1875

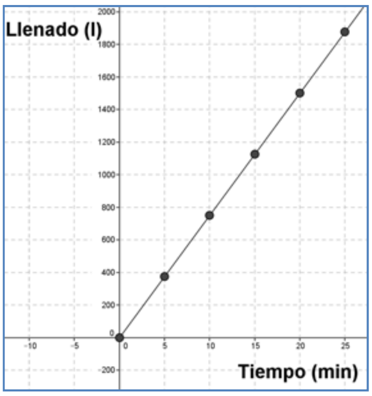
Dibujamos su gráfica a partir de esta tabla de valores



En esta ocasión tendría sentido medir la cantidad de agua que va teniendo el depósito cada menos tiempo. Si lo representamos podría quedar de la siguiente manera:



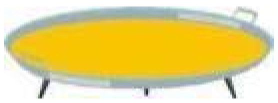
Si representáramos todos los posibles valores nos quedaría la siguiente gráfica:



Nota: La gráfica comienza, en el tiempo 0, en el instante en que empezamos a llenar el depósito. No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un tiempo negativo.

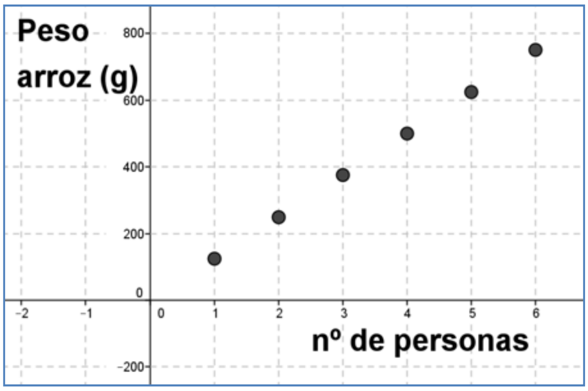
Ejemplo 11:

- En la siguiente situación: *"Una paella para seis personas necesita 750 g de arroz"* podemos construir una tabla de valores en la que se relacionan el número de personas y la cantidad de arroz que se necesita:



Número de personas	1	2	3	4	5	6
Peso arroz (g)	125	250	375	500	625	750

y podemos construir una gráfica de puntos con estos valores:

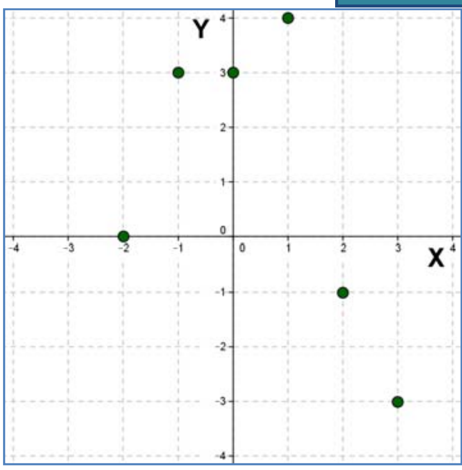


Sin embargo no podemos calcular valores intermedios (para dos personas y media por ejemplo), pues no podemos dividir a una persona y, por lo tanto, no tiene sentido unir los puntos de la gráfica.

Ejemplo 12:

- También podemos representar la relación entre las magnitudes **X** e **Y** del ejemplo 8 a partir de su tabla de valores:

X	−2	−1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	−1	−3

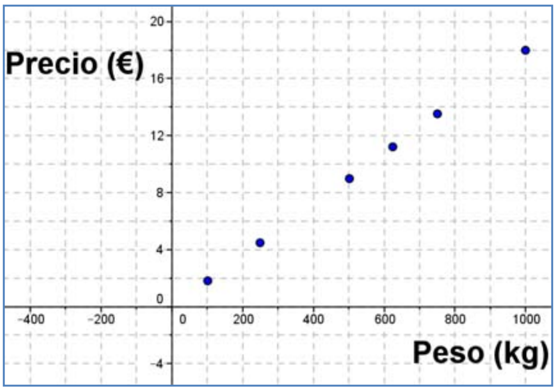


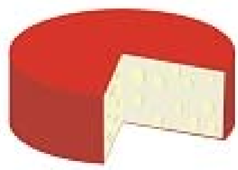
Nota: En este caso no podemos unir los puntos, pues al no conocer cuáles son las magnitudes ni cuál es la relación entre ellas, salvo en los puntos que vienen determinados por la tabla de valores, no podemos saber, por ejemplo, qué valor tendría la magnitud Y si la magnitud X valiese 1,5.

Actividades resueltas

- Construye una gráfica de puntos a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad resuelta del precio del queso y, si es posible, une sus puntos:

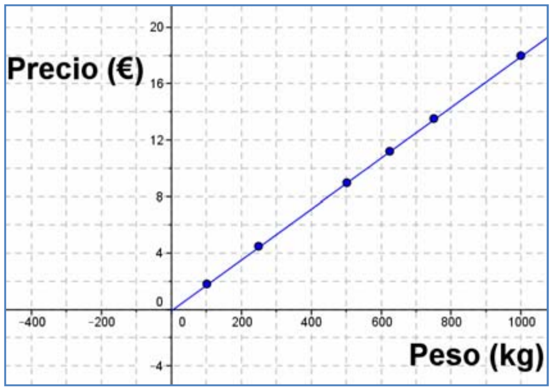
Solución





Sí, en este caso es posible porque podemos calcular el precio para cualquier peso (es una relación proporcional).

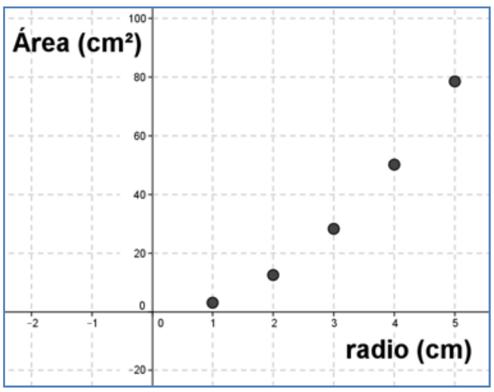
La gráfica quedaría:

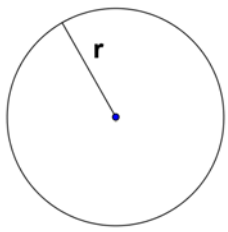


Nota: No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un peso negativo

- Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad resuelta del área del círculo y, si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

Solución:

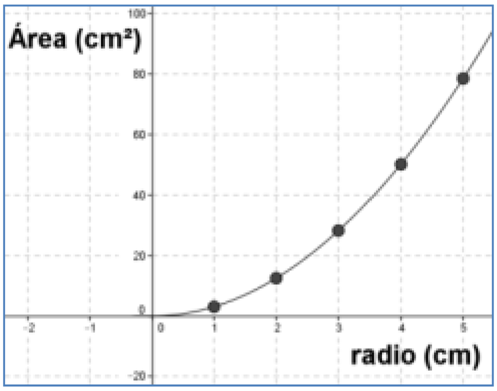




Sí, es posible, porque podemos calcular el área para cualquier radio.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La grafica quedaría:



Nota: No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un radio negativo

Actividades propuestas

8. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo es de 7 litros cada 100 kilómetros. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

9. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

10. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta de la *compañía de telefonía*. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

11. En un recibo del gas de la vivienda de Juan viene la siguiente distribución de gasto:

Consumo de gas: ....0,058 € por kw/h
Impuesto especial:........0,002 € por kw/h
Término fijo: ....4,30 € por mes
Alquiler de contador.... 2,55 €

La factura era de dos meses, había consumido 397 kw/h y el gasto ascendía a 34,97 €. Otra factura anterior el gasto era de 26,15 € con un consumo de 250 kw/h.

Construye una gráfica que relacione el consumo de gas y el gasto. ¿Tiene sentido unir los puntos?

2.3. Gráficas a partir de situaciones

En la mayoría de las situaciones que hemos estudiado hasta ahora, hemos podido calcular los pares de valores relacionados, porque se trataban de relaciones de proporcionalidad o de relaciones dadas por una fórmula que conocíamos.

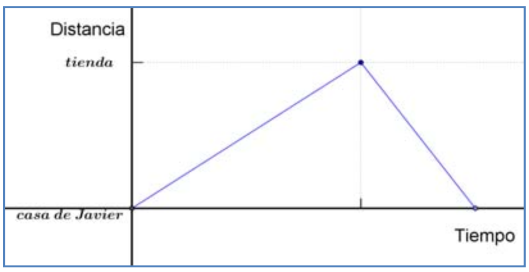
Esto no siempre ocurre. A veces nos encontrarnos con que nos describen una situación en la que nos dan una información entre dos magnitudes sin aportarnos apenas cantidades numéricas.

En muchas ocasiones **una situación cotidiana o relacionada con fenómenos naturales descrita verbalmente se puede representar mediante una gráfica** de manera directa.

Ejemplo 13:

- *Javier tiene que ir a comprar a una tienda algo alejada de su casa, como no tiene prisa decide ir dando un paseo. Justo cuando llega a la tienda se da cuenta de que se le ha olvidado la cartera y no tiene dinero para comprar. Corriendo vuelve a su casa a por la cartera.*

A partir de este enunciado podemos elaborar una grafica como esta:

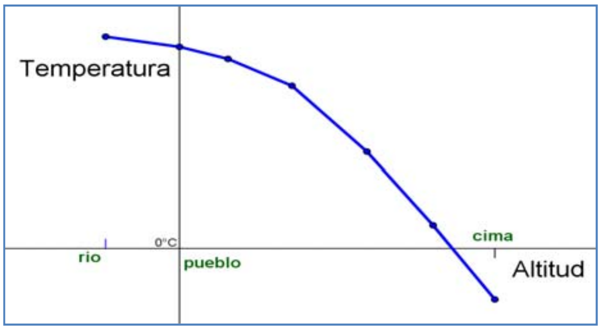


Nota: la distancia entre la casa de Javier y la tienda no la conocemos, pero sabemos que en la vuelta ha tardado menos tiempo que en la ida.

Ejemplo 14:

- *La temperatura en una montaña va descendiendo según ganamos en altitud. En la cima llegamos a temperaturas bajo cero.*

Podemos representar una situación en la que medimos la temperatura según subimos desde un pueblo a la cima de una montaña en una gráfica como la siguiente:



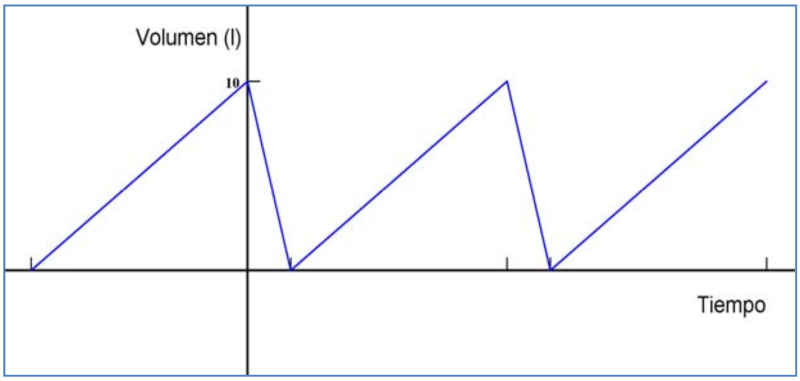
En el sistema de referencia cartesiano que hemos establecido, el origen está en el pueblo y es por ello por lo que el rio tiene abscisa negativa, porque está más bajo. En la cima la temperatura es negativa y por ello su ordenada es negativa.

La temperatura desciende. Su gráfica es **decreciente**.

Ejemplo 15:

- *En un establecimiento comercial, el depósito de agua de los servicios públicos va llenándose poco a poco hasta alcanzar los 10 L de agua y, en ese momento, se vacía regularmente. Cuando está vacío se repite el proceso. En llenarse tarda el quíntuple de tiempo que en vaciarse.*

Podemos hacer una gráfica que refleje la variación de la cantidad de agua (volumen) del depósito en función del tiempo, a partir de un momento en el que el depósito está lleno.



El origen de nuestro sistema de referencia cartesiano esta en un momento con el depósito lleno, el tiempo negativo significa que es anterior a ese momento.

Al vaciarse el depósito se tiene una gráfica **decreciente**. Cuando está vacío, se tiene un **mínimo**. Al llenarse, la gráfica es **creciente**, y cuando está totalmente lleno, se tiene un *máximo*.

Los puntos de corte con los ejes son: Con el eje de ordenadas en el punto (0, 10), con el eje de abscisas cuando el depósito está vacío.

Las **gráficas** nos dan una visión más clara de la situación que estamos estudiando, además de ellas podemos obtener una **tabla de valores** y así hacer una **interpretación** más precisa.

Ejemplo 16:

- En la situación anterior si consideramos que tarda un minuto en vaciarse el depósito, tardará cinco minutos en llenarse y podemos obtener la siguiente tabla de valores:

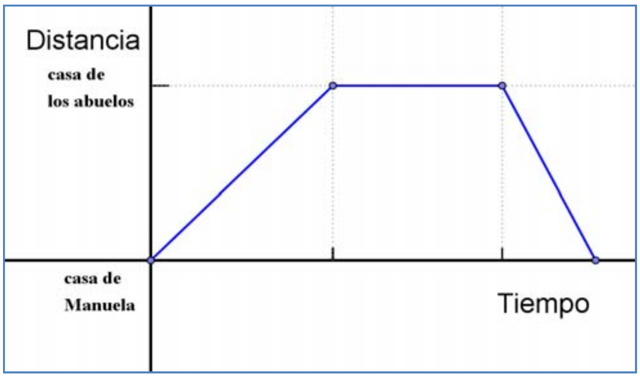
Tiempo (min)	–5	0	1	6	7	12
Volumen (l)	0	10	0	10	0	10

Nota: el valor negativo del tiempo quiere decir que el depósito comenzó a llenarse con anterioridad a la situación inicial (origen) en el que el depósito está lleno.

Actividades resueltas

- Manuela va algunas tardes a casa de sus abuelos donde pasa un buen rato con ellos. Después vuelve rápidamente a su casa para hacer los deberes antes de cenar. Construye una gráfica de esta situación

Solución:



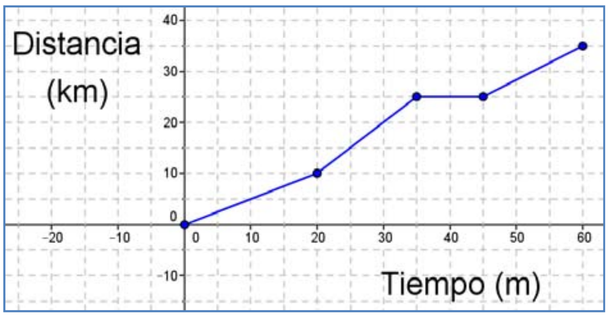
Observa que en la gráfica se tiene un primer tramo que es creciente, el siguiente es constante y el último es decreciente. La gráfica de la función es continua (en ningún momento es preciso levantar el lápiz para dibujarla).

- "Este verano Juan fue en bicicleta a casa de sus abuelos que vivían en un pueblo cercano, a 35 kilómetros del suyo. A los 20 minutos había recorrido 10 km; en ese momento comenzó a ir más deprisa y tardó 15 minutos en recorrer los siguientes 15 km. Paró a descansar durante 10 minutos y, después, emprendió la marcha recorriendo los últimos 10 km en 15 minutos."

Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

Solución

La gráfica sería:



La gráfica es continua y siempre creciente.

Y la tabla de valores:

Tiempo (min)	0	20	35	45	60
Distancia (km)	0	10	25	25	35

Actividades propuestas

12. *La familia de Pedro fue un día de excursión al campo en coche; después de pasar el día volvieron y a mitad de camino pararon durante un buen rato a echar gasolina y tomar unos refrescos. Al final llegaron a casa. Construye una gráfica de esta situación.*

13. *"María salió a dar un paseo, primero fue a casa de su amiga Lucía, que vive a 200 metros, y tardó 5 minutos en llegar. La tuvo que esperar otros 5 minutos en su portal y, después, tardaron 10 minutos en llegar al parque, que estaba a 500 m, donde merendaron y charlaron durante media hora. Por último María regresó a casa rápidamente, porque le había llamado su madre. Sólo tardó 7 minutos."* Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

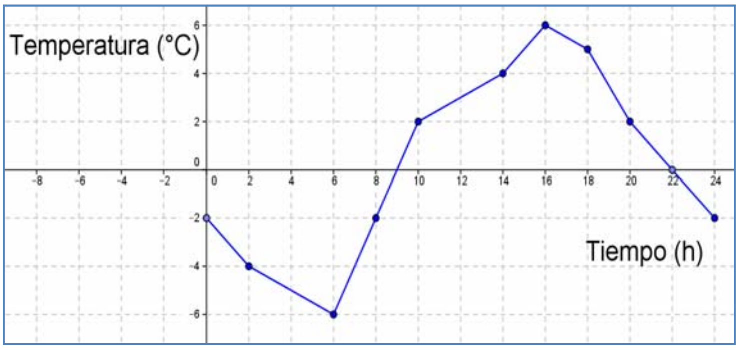
2. 4. Interpretación y lectura de gráficas

Las gráficas resumen de manera eficaz la información sobre la relación entre dos magnitudes, por ello se suelen emplear mucho, tanto en situaciones de carácter científico o social, como en la información que se emplea en los medios de comunicación. Su lectura e interpretación es pues de mucha utilidad.

De las coordenadas de los puntos de una gráfica podemos extraer datos muy interesantes para la comprensión de la situación que nos muestra la gráfica (la ordenada más alta o más baja, como se relacionan las magnitudes,…)

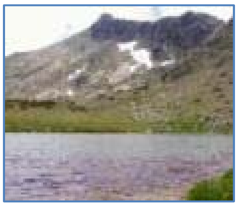
Ejemplo 17:

- El gráfico adjunto muestra las temperaturas a lo largo de un día de invierno en el pico de Peñalara.



A partir de esta gráfica podemos obtener más información sobre la situación planteada.

Así, por ejemplo podemos ver que la temperatura mínima que se alcanzó ese día fue de –6 °C a las 6 h de la mañana, nos lo indica el punto de coordenadas (6, –6) que tiene la ordenada menor de todos los puntos de la gráfica. Es un **mínimo**.



- Del mismo modo podemos ver que la temperatura más alta fue de 6 °C, que se obtuvo a las 16 h. El punto de coordenadas (16, 6) así nos lo indica. Es un **máximo**.

Podemos también afirmar que la temperatura fue subiendo desde las 6 h hasta las 16 h pues las ordenadas de los puntos cuya abscisa está entre esas horas van creciendo. Es **creciente**.

Así mismo el punto (10, 2) nos indica que a las 10 h de la mañana hacía una temperatura de 2 °C, temperatura que se alcanzó también a las 20 h, aunque esta vez bajando.

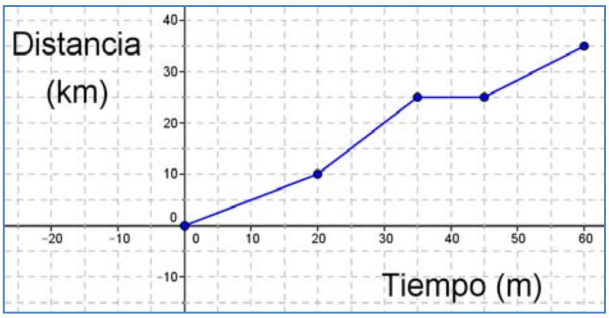
El hecho de que de 10 h a 14 h subiera la temperatura menos que en horas anteriores (gráfica menos inclinada) pudo ser debido a causas climatológicas concretas, como que se pusiera la niebla, y después, de 14 a 16 h, hay una subida rápida (pudo salir el sol). La gráfica nos indica que algo así pudo pasar.

A partir de las 16 horas la temperatura baja, la gráfica es **decreciente**.

La temperatura es de 0 ºC hacia las 9 horas y a las 22 horas. (0, 9) y (0, 22). Son los puntos en que la gráfica corta al eje de abscisas. Al eje de ordenadas lo corta en (–2, 0).

Ejemplo 18:

- La actividad resuelta que nos describe el recorrido de Juan de camino a casa de sus abuelos. La gráfica que dibujamos y resume el viaje era la que figura a la derecha.



viaje de Juan a casa de sus abuelos

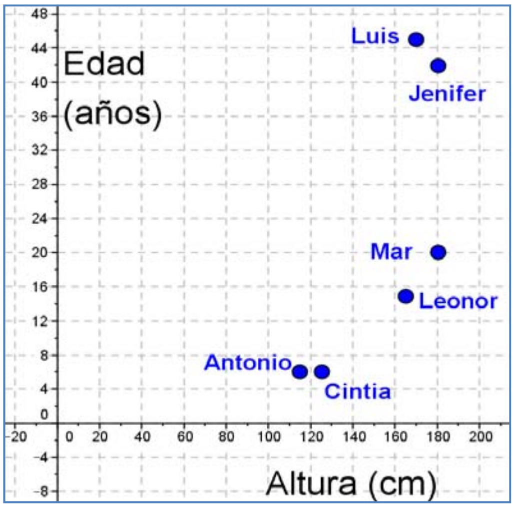
De la gráfica, además de lo que ya conocíamos y que nos ayudo a dibujarla, podemos extraer, "de un simple vistazo" más información.

Por ejemplo, si miramos a la gráfica podemos observar que en el kilómetro 20 llevaba 30 minutos pedaleando, o que a los 10 minutos había recorrido 5 kilómetros, que el tramo más rápido fue de los 20 a los 35 minutos (se ve mayor inclinación), o que en el minuto 40 estaba parado.

Es una gráfica **continua**, pues podemos dibujarla sin levantar el lápiz.

Ejemplo 19:

- La gráfica siguiente nos indica la relación entre la edad y la estatura de los miembros de una familia.



Si observamos los puntos de esta grafica veremos que Jenifer y Luis son los puntos (180, 43) y (170, 45) y representan a los padres que tienen 43 y 45 años y miden 180 y 170 cm respectivamente.

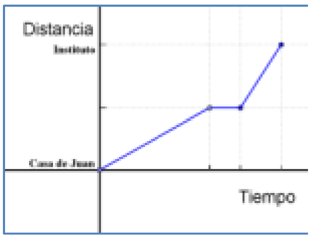
Los pequeños Antonio y Cintia son mellizos de 6 años y miden 115 y 125 centímetros. Mar tiene 20 años y mide 180 cm, representada por el punto (180, 20) y, por último Leonor mide 165 y tiene 15 años.

De la gráfica también podemos deducir que Mar y su madre, Jenifer, son los más altos de la familia, que Luis es el de más edad y que Cintia mide 10 centímetros más que su hermano mellizo.

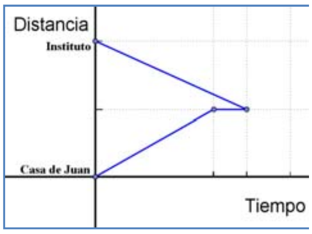
Actividades resueltas

- Observando las gráficas de debajo, determina cuál es la que mejor se ajusta a la situación siguiente:

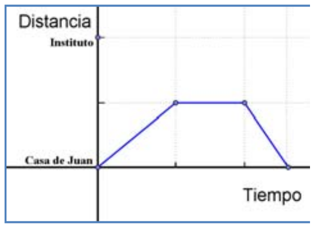
"Antonio va al Instituto cada mañana desde su casa, un día se encuentra con un amigo y se queda charlando un ratito. Como se la ha hecho tarde sale corriendo para llegar a tiempo a la primera clase"



gráfica 1



gráfica 2



gráfica 3

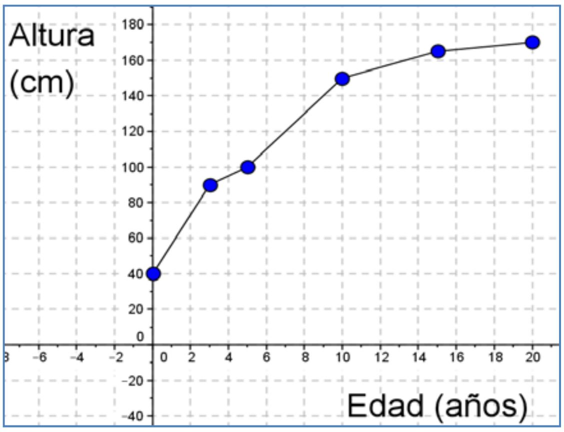
Solución

La gráfica 1 **es la que más se ajusta** pues: el segmento horizontal indica que durante un tiempo pequeño no avanzó en distancia, esto es que estaba parado, y la inclinación del tercer segmento es mayor que la del primero, lo que indica que en menos tiempo recorrió más distancia, esto es, que fue más rápido.

La gráfica 2 **no puede ser**, pues Juan no puede estar en dos sitios distintos, a la vez, en el mismo momento. Esta gráfica indica, por ejemplo, que en el instante inicial (tiempo 0) Juan está en su casa y en el instituto al mismo tiempo.

La gráfica 3 **no puede ser**, ya que la gráfica nos indica que Juan regresa a su casa después de charlar con su amigo y no va al instituto.

- La gráfica siguiente nos muestra la variación de la estatura de Laura con relación a su edad.



Observando la gráfica contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué edad medía 1 metro?

b) ¿Cuánto medía al nacer?

c) ¿Cuánto medía a los 10 años? ¿Y a los 20?

d) ¿En qué periodo creció menos?

Solución:

a) Mirando a la gráfica observamos que el punto (5, 100) es el que nos piden pues la ordenada es 100 (1 metro), luego Laura tenía 5 años.

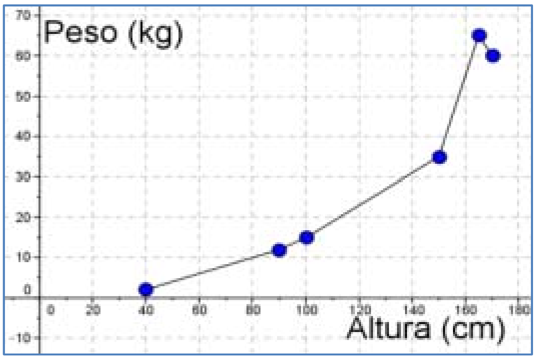
b) El punto que representa el nacimiento es el (0, 40) luego midió 40 centímetros

c) Del mismo modo observamos que a los 10 años medía 155 centímetros y a los 20 años 170.

d) En la gráfica observamos que el tramo menos inclinado es el que va de los 15 a los 20 años, eso quiere decir que en ese tramo Laura creció menos.

Actividades propuestas

14. La gráfica siguiente nos muestra la variación del peso de Laura con relación a su estatura a lo largo de su vida.



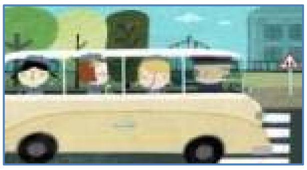
Analiza la gráfica, comenta la situación y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto pesaba cuando medía un metro? ¿Y cuando medía 150 cm?

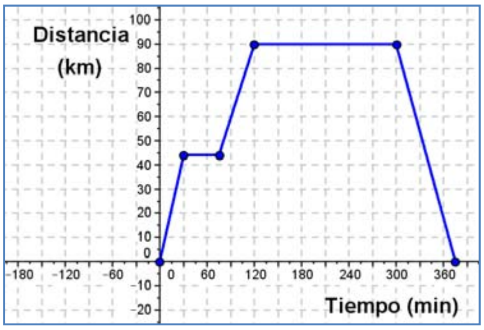
b) ¿Cuánto medía cuando pesaba 55 kg?

c) ¿A qué altura pesaba más? ¿Laura adelgazó en algún momento?

15. La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de 2º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez.



Sabiendo que Toledo está a 90 km del Instituto y Aranjuez a 45 km:



a) ¿Cuánto tiempo pararon en Aranjuez? ¿y en Toledo?

b) ¿Cuánto tiempo tardaron en llegar a Toledo? ¿y en regresar al Instituto?

c) Si salieron a las 9 h de la mañana ¿A qué hora regresaron? ¿A las diez y media dónde se encontraban?

d) Haz una descripción verbal del viaje

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. LAS FUNCIONES

3.1. La función como relación entre dos variables. Variable dependiente y variable independiente

No es raro escuchar o leer en la prensa expresiones como: *"el precio está **en función de** la demanda"*, *"el número de escaños obtenidos por un partido político está **en función del** número de votos obtenidos"*, *"los resultados obtenidos en los estudios están **en función del** tiempo dedicado a estudiar"*, o como esta: *"el área de un círculo está **en función del** radio"*.

Estas expresiones indican que el precio de un objeto, el número de escaños, los resultados académicos o el área del círculo están relacionados, respectivamente, con la demanda, el número de votos recibidos, el tiempo dedicado al estudio o el radio, de tal forma que la primera magnitud citada depende únicamente de la segunda.

Una magnitud **Y** está **en función de** otra magnitud **X**, si el valor de la magnitud **Y** depende de **manera única** del valor que tenga la magnitud **X**.

*Nota: la Real Academia Española, en el Diccionario panhispánico de dudas, dice que **'en función de'** es una locución preposicional que significa **'según o dependiendo de'***

Ejemplo 20:

- La temperatura del agua que está en un cazo al fuego dependerá de la cantidad de calor que reciba, así decimos que: *la temperatura del agua **T** varía **en función del** calor recibido **Q***, o simplemente que **T** está en función de **Q**.

Cuando realizamos un viaje en coche podemos observar varias magnitudes; vamos a estudiar la relación entre dos de ellas, por ejemplo la distancia recorrida y el tiempo transcurrido desde la salida.

Según sea nuestro viaje y lo que hagamos durante su recorrido (ir por autopista o por una carretera secundaria, parar un rato, volver,…) la distancia recorrida según el tiempo transcurrido será de una manera u otra, pero es claro que *la distancia está **en función** del tiempo*. En cada instante de tiempo habremos recorrido una distancia determinada.

Como hemos visto en algunos ejemplos y actividades anteriores, por ejemplo en el caso de Juan que va a ver a sus abuelos, en la actividad 20, hay un periodo de tiempo (10 minutos) en el que se detiene a descansar y no avanza distancia, pero el tiempo no se detiene. Así nos encontramos con que a varios valores de la magnitud tiempo les corresponden el mismo valor de la magnitud distancia (los 25 kilómetros que había recorrido antes de parar).

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Sin embargo, a cada valor de la magnitud tiempo solamente le corresponde un único valor de la magnitud distancia, esto es evidente pues Juan no puede estar en dos sitios distintos en el mismo instante de tiempo.

Cuando esto ocurre decimos que la relación entre las dos magnitudes es una **función.**

Una **función** es una relación entre dos magnitudes numéricas **X** e **Y**, de tal forma que a cada valor de la primera magnitud **X**, le hace corresponder **un único** valor de la segunda magnitud **Y**.

Además ambas magnitudes tienen valores numéricos y varía una en función de la otra (la distancia varía según la variación del tiempo en el ejemplo de Juan). Para abreviar nos vamos a referir a ellas como variables.

En las **relaciones funcionales,** a las magnitudes relacionadas las llamamos **variables.**

Asimismo, en nuestro viaje, la distancia depende del tiempo transcurrido, así que decimos que la distancia es la variable dependiente y el tiempo es la variable independiente.

Nota: Cuando tenemos una relación funcional entre dos variables en la que una es el tiempo que transcurre, esta, normalmente, es la variable independiente.

Cuando tenemos dos magnitudes, **X** e **Y**, que están relacionadas de tal forma que **Y** es función de **X**, a la magnitud **Y** se la denomina **variable dependiente**, y a la magnitud **X,** de la que depende, se la denomina **variable independiente**.

*Nota: Cuando tenemos una función entre dos variables que desconocemos, a las magnitudes solemos llamarlas **X** e **Y**, siendo **X** la independiente e **Y** la dependiente.*

Ejemplo 21:

- *"El precio del kg de peras es de 1,80 €."* Esta situación nos define una relación entre el precio y el peso, de tal manera que el precio que pagamos depende del peso que compramos. La relación es una función, el peso y el precio son las variables, el peso es la variable independiente y el precio la variable dependiente.

Ejemplo 22:

- *La relación entre dos variables viene dada por la función* $y = 2x - 1$.

En este caso **Y** está en función de **X**, pues para cada valor **x** de la variable **X** hay un único valor **y** de la variable **Y**, siendo la variable **X** la variable independiente y la variable **Y** la dependiente.

*Nota: Cuando tenemos una función entre dos variables que desconocemos, solemos llamarlas **X** e **Y**, y a los valores que toman estas variables les denominamos **x** e **y** respectivamente. Así cuando la magnitud **X** toma el valor **x**, la magnitud **Y** vale **y**.*

Actividades resueltas

- En las siguientes relaciones di si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a) El consumo de un coche y la velocidad a la que circula.
b) El perímetro de un polígono regular y la longitud de su lado.
c) El número de habitantes de los pueblos y la temperatura media en verano.
d) La altura y el número de hermanos de los estudiantes de 1º de E.S.O.

Solución

a) El consumo de un coche sí está en función de la velocidad a la que circula. En este caso el consumo es la variable dependiente y la velocidad la variable independiente.

b) También aquí se da una relación funcional, el perímetro es función del lado. El perímetro es la variable dependiente y el lado la independiente.

c) En este caso no hay una relación funcional pues hay pueblos grandes y pequeños no teniendo que ver con la temperatura media en varano que haga en ellos.

d) Tampoco hay relación funcional en este caso, puedes comprobarlo en tu clase.

Actividades propuestas

16. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a) El consumo de un coche y la distancia recorrida.
b) La velocidad a la que circula un coche y la edad del conductor.
c) El número de habitantes de un barrio de una ciudad, o un pueblo, y el número de colegios públicos que hay allí.
d) La temperatura de un lugar y la hora del día.
e) El número de lados de un polígono y el número de diagonales que tiene.

17. Propón tres ejemplos, diferentes a todos los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos magnitudes en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

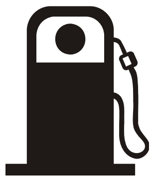
3.2. La función: tabla de valores, gráfica, expresión verbal y expresión algebraica

La gran mayoría de las situaciones que hemos estudiado hasta este momento son relaciones funcionales en las que hay dos variables, y una depende de la otra de manera única; esto es, son ***funciones***.

Además hemos visto que las ***funciones*** se pueden representar de varias maneras; como una ***descripción verbal*** que describe una situación, como una ***tabla de valores*** que nos indica los valores correspondientes de la relación, como una ***gráfica*** que nos visualiza la situación y como una ***expresión algebraica*** (fórmula) que nos relaciona las dos magnitudes.

Ejemplo 23:

- Si observamos el precio de la gasolina en un día concreto al llenar el depósito de un coche podemos estudiar la relación entre el número de litros de gasolina y lo que pagamos.

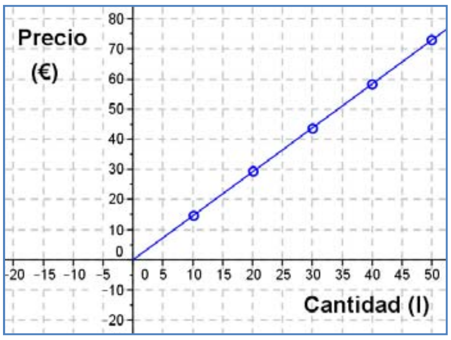


El precio que pagamos es función de la cantidad de gasolina que echamos y puede venir dada de las siguientes maneras:

- Descripción verbal: *"El litro de gasolina se situó en la primera semana de agosto en 1,46 €".*
- Expresión algebraica (fórmula): $p = 1{,}46 \cdot l$ (donde p es el precio y l es la cantidad de gasolina)
- Tabla de valores:

Cantidad (l)	10	20	30	40	50
Precio (€)	14,60	29,20	43,80	58,40	73,00

- Gráfica:



Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo 24:

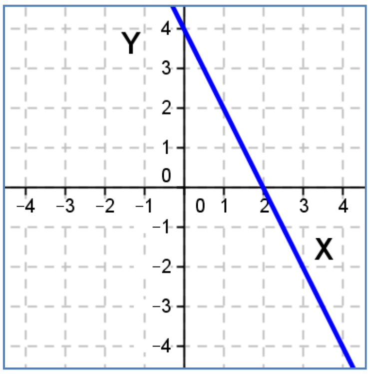
- Cuando tenemos una función que relaciona dos magnitudes que desconocemos, que las llamamos **X** e **Y**, la podemos tener definida por una fórmula (expresión algebraica).

Por ejemplo $y = 4 - 2 \cdot x$

De la que podemos elaborar una tabla de valores como la siguiente:

X	0	1	2	3	4
Y	4	2	0	−2	−4

y, a partir de ella, dibujar una gráfica:



En este caso sí podemos unir los puntos, porque mediante su fórmula para cualquier valor ***x*** de la variable **X** podemos calcular el valor ***y*** de la variable **Y**.

Podríamos dar, también, una descripción verbal que defina la relación entre estas variables, por ejemplo: "*A cada número le corresponden cuatro unidades menos el doble del número*"

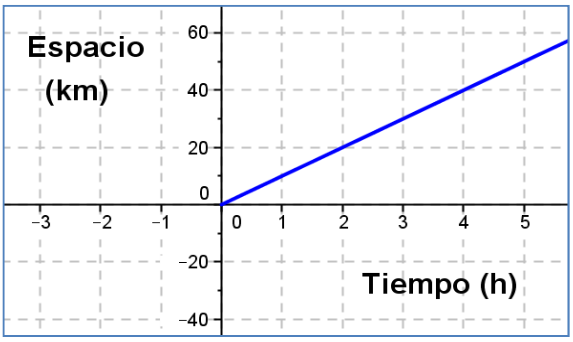
Nota: En muchas ocasiones no es posible, a nuestro nivel, encontrar la fórmula que define una función dada como una tabla de valores, su descripción verbal o su gráfica.

Actividades propuestas

18. Expresa de forma gráfica y verbal la función definida por la siguiente tabla de valores:

Edad (años)	0	1	5	10	15	20
Altura (m)	0	42	96	123	151	177

19. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica.



20. Expresa de forma gráfica y mediante una tabla de valores la función definida por la siguiente fórmula: $l = 2 \cdot \pi \cdot r$

3.3. Una función importante. La función lineal o de proporcionalidad directa

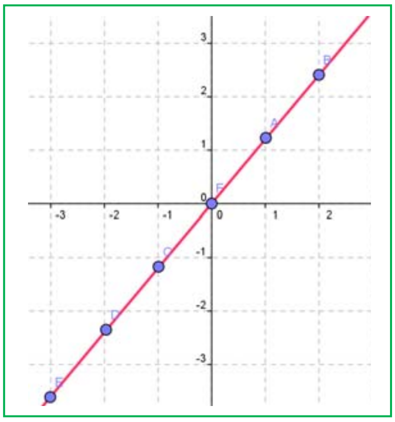
Recuerda que:

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa *k***.

Ejemplo:

- *Representa gráficamente la relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:*



Magnitud A (*x*)	–3	–2	0	1	2
Magnitud B (*y*)	–3’6	–2’4	0	1’2	2’4

Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

$$k = \frac{-3'6}{-3} = \frac{-2'4}{-2} = \frac{1'2}{1} = \frac{2'4}{2} = 1'2$$

La relación se define así: $y = 1'2x$.

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Una **función lineal** es la que tiene la fórmula ***y* = *m*·*x***.

Una función lineal corresponde a una relación de proporcionalidad directa.

Por tanto, la relación de proporcionalidad directa es una **función lineal** de la forma ***y* = *m*·*x***.

Actividades propuestas

21. María quiere comprar una cinta que vale a 0’7 euros el metro. Representa gráficamente lo que deberá pagar según los metros de cinta que compre.

22. Representa gráficamente las funciones:

a) $y = 5x$, *b)* $y = 1'5x$, *c)* $y = 0'5x$, *d)* $y = -2x$, *e)* $y = -3'2x$, *f)* $y = -1'2x$

23. Indica en las funciones anteriores cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. Razona la respuesta.

24. Juan anda muy deprisa, recorre 5 km a la hora. Representa gráficamente el paseo diario de Juan relacionando tiempo con espacio recorrido. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?

25. En una urbanización se consume por término medio al día tres mil litros de agua. Representa gráficamente el consumo de agua a lo largo de una semana. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?

3.4. Utilización de *Geogebra* para la interpretación de la pendiente de una función lineal

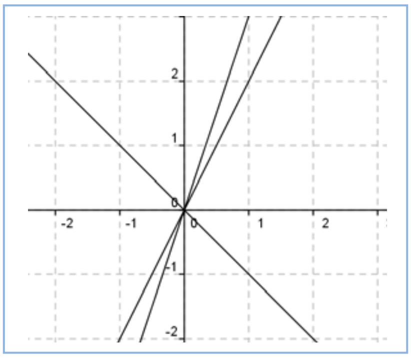
En esta actividad se va a utilizar el programa **Geogebra** para representar funciones lineales cuyas gráficas son rectas.

Se representan rectas con la misma pendiente para observar la relación que existe entre ellas y determinar la propiedad que las caracteriza.

Actividades resueltas

Utiliza Geogebra para estudiar rectas con distintas pendientes.

- Abre el programa Geogebra y en **Visualiza** activa **Cuadrícula** para que sea más fácil analizar las funciones.



- En la ventana de debajo de la pantalla, en **Entrada**, escribe: $y = 2x$. Inmediatamente aparece dibujada esa función en la ventana gráfica.
- Escribe de nuevo en **Entrada** otras rectas con distintas pendientes: $y = 3x$, $y = –x$…
- Dibuja todas las funciones lineales que quieras y responde a las siguientes preguntas.
  - Cuando la pendiente es positiva, ¿qué ocurre al crecer la pendiente? ¿Y al disminuir?
  - Cuando la pendiente es negativa, ¿qué ocurre al crecer la pendiente en valor absoluto? ¿Y al disminuir?
- Todas las funciones de la forma $y = mx$ son rectas. Son funciones lineales. Todas ellas pasan por el origen (0, 0).
  - Cuando la abscisa vale 1, ¿cuánto vale la ordenada?

Actividades propuestas

26. Utiliza *Geogebra* para nuevamente representar gráficamente las funciones:

a) $y = 5x$, *b)* $y = 1’5x$, *c)* $y = 0’5x$, *d)* $y = –2x$, *e)* $y = –3’2x$, *f)* $y = –1’2x$

27. Indica en las funciones anteriores sus características: a) cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. b) ¿Son continuas? c) Busca los puntos de corte con los ejes coordenados. d) ¿Existen máximos o mínimos? Razona las respuestas.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Descartes y el sistema de referencia cartesiano

El sistema de referencia cartesiano se llama así en honor al filósofo, científico y matemático francés ***René Descartes*** *que vivió entre los años 1596 y 1650. Descartes quiso fundamentar su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un «punto de partida» sobre el que edificar todo el conocimiento. En Geometría, Descartes también comenzó tomando un "punto de origen" para poder representar la geometría plana.*

Principio del palomar o Principio de Dirichlet

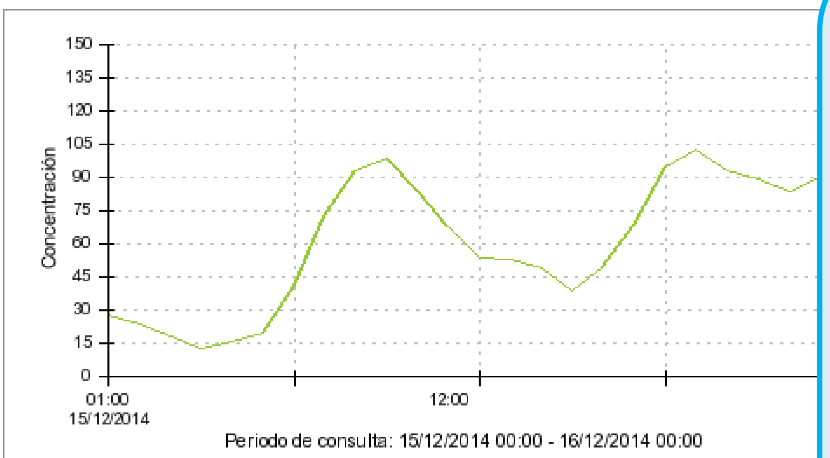
"Si una bandada de 21 palomas se mete por 20 agujeros de un palomar, es seguro que al menos dos palomas se han metido en el mismo agujero"

¿Estás de acuerdo?

Este principio tan sencillo permite resolver otros problemas, como por ejemplo:

¿Se puede asegurar que ahora mismo hay en Madrid al menos 20 personas con el mismo número de pelos en la cabeza?

Para razonar la respuesta considera que nadie tiene más de 200 mil pelos en la cabeza y que en Madrid hay unos 4 millones de personas.

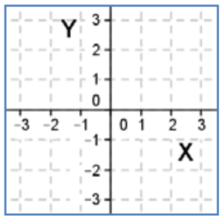
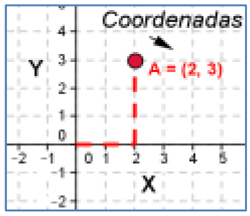
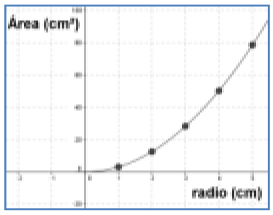
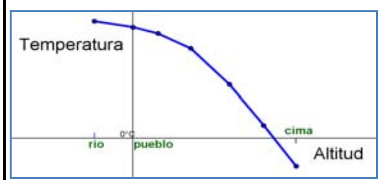


La gráfica indica la evolución del NO_2 en la estación de calidad del aire de Cuatro Caminos de Madrid durante un día, el 16 de diciembre de 2014. Observa como sube hacia las 9 de la mañana a la entrada del trabajo y vuelve a subir a la salida, hacia las 6 de la tarde.

En la página de la Comunidad de Madrid puedes conocer cómo está la calidad del aire en cada momento, y saber cuáles son los valores umbrales que no se deberían rebasar.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Sistema de referencia cartesiano</td><td>Dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas Ejes, que se cortan en un punto llamado Origen. El eje horizontal se denomina eje de abscisas, y al eje vertical, eje de ordenadas.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Coordenadas</td><td>Es un par ordenado de números (x, y), que nos indica donde se encuentra el punto respecto al sistema de referencia cartesiano que estamos utilizando.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tabla de valores</td><td>Tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.</td><td><table><tr><td>Tiempo (min)</td><td>0</td><td>30</td><td>80</td><td>100</td></tr><tr><td>Distancia (km)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>Si representamos en un sistema de referencia cartesiano todos los pares de datos de una tabla de valores obtenemos una gráfica.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Gráficas a partir de situaciones</td><td>Una situación cotidiana o relacionada con fenómenos naturales descrita verbalmente se puede representar mediante una gráfica</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Función</td><td>Una magnitud Y está en función de otra magnitud X, si el valor de Y depende de manera única del valor que tenga X.</td><td>La temperatura del agua T varía en función del calor recibido Q</td></tr>
<tr><td>Variables</td><td>En las relaciones funcionales, a las magnitudes variables relacionadas las llamamos solamente variables</td><td>"El precio del kg de peras es 1,80 €." el peso y el precio son las variables</td></tr>
<tr><td>Variable dependiente e independiente</td><td>Cuando tenemos dos magnitudes variables que están relacionadas de tal forma que Y es función de X, a la magnitud Y se la denomina variable dependiente, y a la magnitud X se la denomina variable independiente.</td><td>El consumo de un coche y la velocidad a la que circula.
El consumo es la variable dependiente y la velocidad la variable independiente</td></tr>
<tr><td>Variables y valores</td><td>Cuando tenemos una función entre dos variables X e Y, a los valores que toman estas variables les denominamos x e y respectivamente.</td><td>Cuando la magnitud X toma el valor x, la magnitud Y vale y.</td></tr>
</table>

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El plano cartesiano. Coordenadas

1. Representa los siguientes pares ordenados en un plano cartesiano:

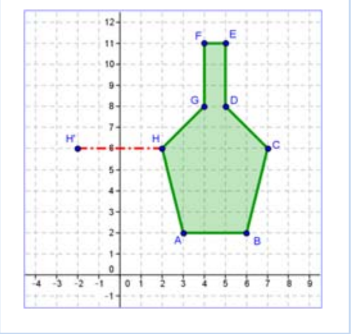
$I=\left(\frac{3}{2},-3\right)$ $J=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $K=(6,3'5)$ $L=\left(-\frac{3}{4},-0'5\right)$

2. Sin representar los siguientes puntos, di en qué cuadrante están:

$M=\left(4,-\frac{5}{2}\right)$ $N=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $P=\left(-6,-\frac{9}{5}\right)$ $Q=\left(-\frac{7}{2},5\right)$

$R=(2,0)$ $S=(-7,0)$ $T=\left(0,-\frac{7}{2}\right)$ $U=(0,7)$ $O=(0,0)$

3. Observa la siguiente vasija:



a. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto marcado de la vasija.

b. Imagina que el eje Y es un espejo y el punto H' es el reflejado del punto H por este espejo. Dibuja cada punto reflejado de la vasija y dibuja la vasija reflejada.

c. Nombra cada vértice de la nueva vasija. ¿Es un polígono? En caso afirmativo, ¿Qué tipo de polígono? ¿Cómo se llamaría?

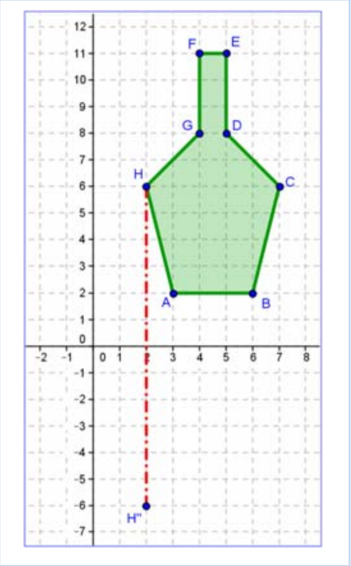
d. ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?

En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de ordenadas (eje Y).

e. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.

f. Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica la relación que hay entre ellos.

4. Continuamos con la vasija del ejercicio anterior.



a. Imagina que el eje X es ahora otro espejo, y el punto H'' es el reflejado de H por este nuevo espejo.

b. Dibuja en tu cuaderno la nueva vasija reflejada y nombra cada uno de sus vértices.

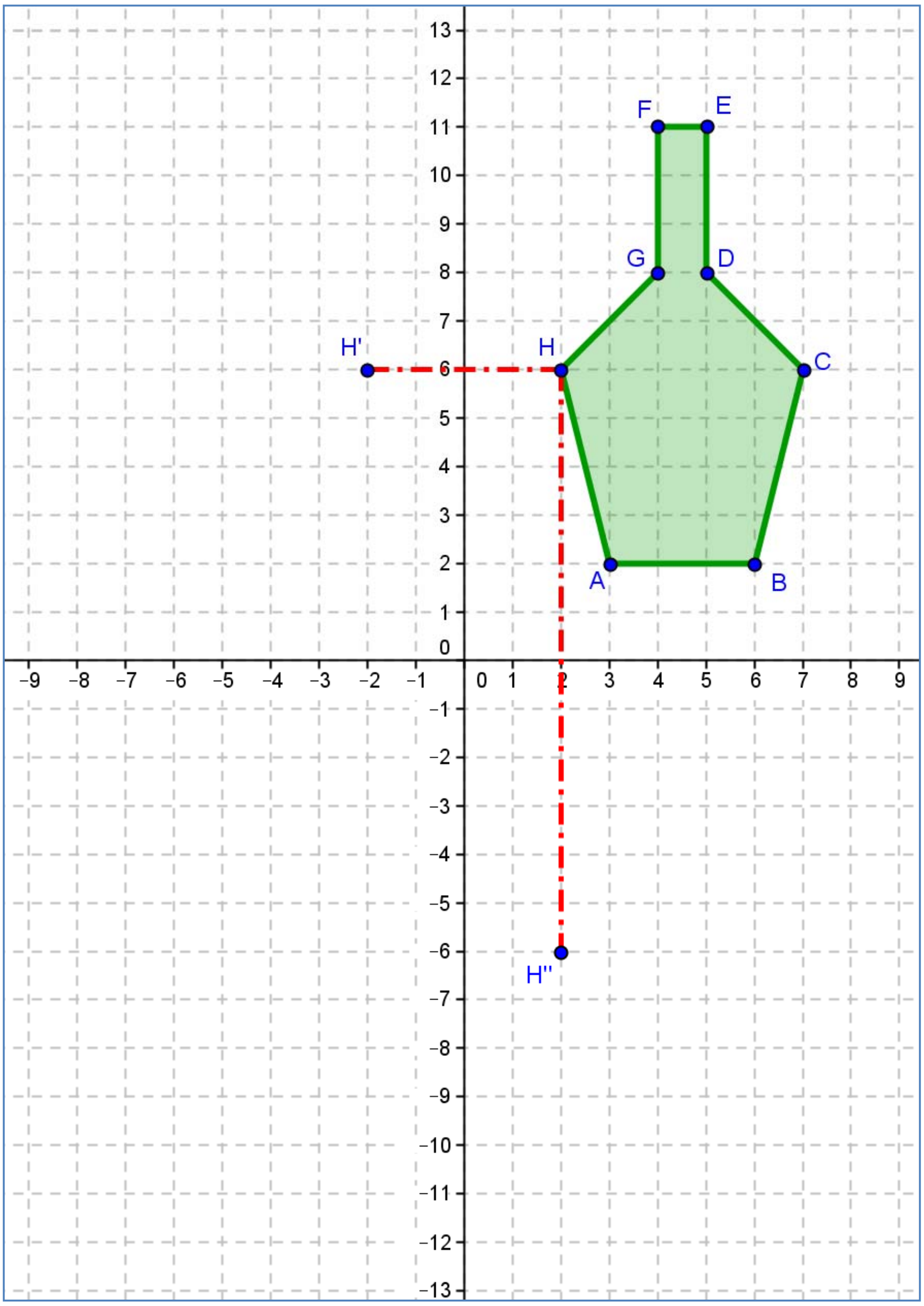
c. ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?.

En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de abscisas (eje X).

d. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.

e. Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica qué relación hay entre ellos.

Material fotocopiable



Vasija

5. Ayudándote de regla, escuadra y cartabón dibuja en un folio en blanco un sistema de referencia cartesiano y los ejes con divisiones de 1 centímetro.

a. Representa los puntos M = (3, 4) N = (–1, 1) y R = (2, –4)

b. Dibuja otro sistema de referencia cartesiano, con los ejes paralelos a los anteriores y que se corten en el punto (1, –1) del sistema anterior.

c. Escribe las coordenadas de los puntos M, N y R respecto al nuevo sistema cartesiano.

d. ¿Han cambiado los puntos? Describe con palabras lo que ha pasado.

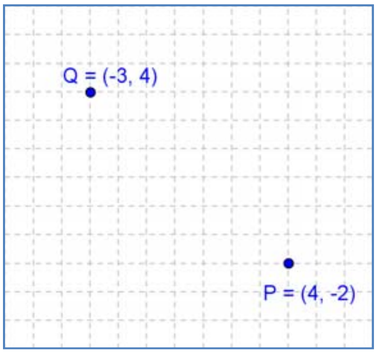
6. Dibuja un sistema de referencia cartesiano en un papel milimetrado.

a) Representa un punto cuya distancia al eje de abscisas sea de 3,3 cm, y la distancia al eje de ordenadas sea de 1,9 cm.

b) ¿Existe más de una solución? En este caso, representa todos los puntos que cumplan esta condición e indica sus coordenadas cartesianas.

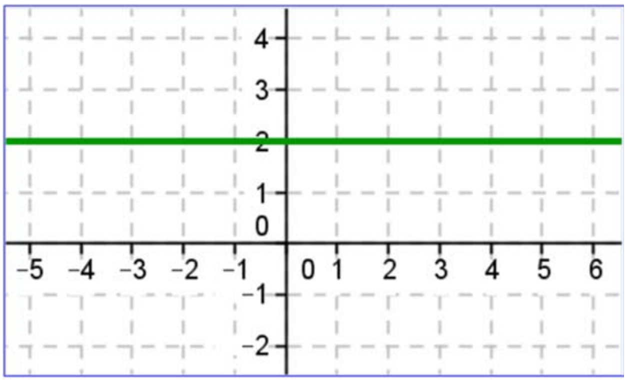
c) ¿Cómo son éstos puntos entre sí dos a dos?

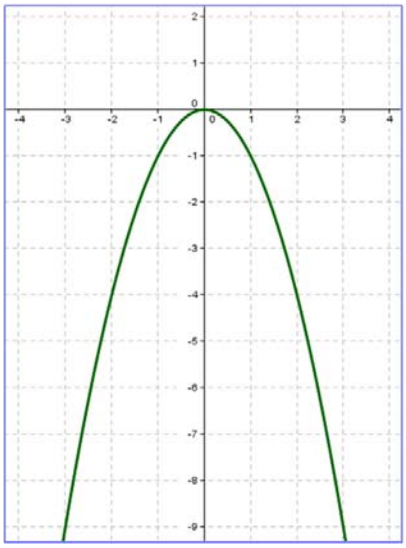
7. Representa en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano para que los puntos P y Q tengan las coordenadas que se indican.

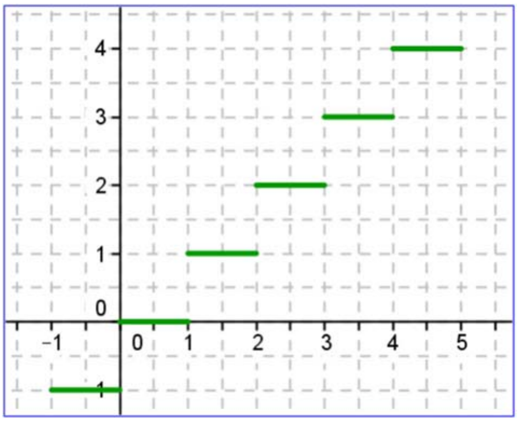


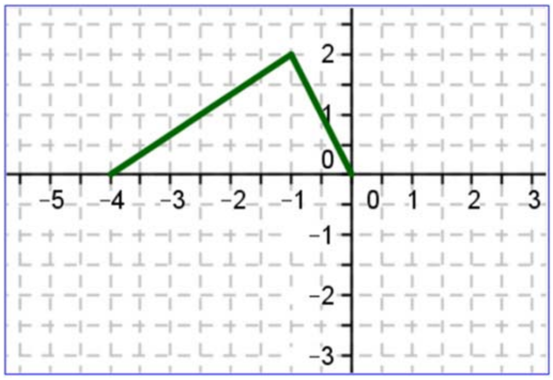
Tablas y Gráficas

8. Construye tablas de valores, con cinco cantidades diferentes, correspondientes a las cuatro gráficas siguientes:



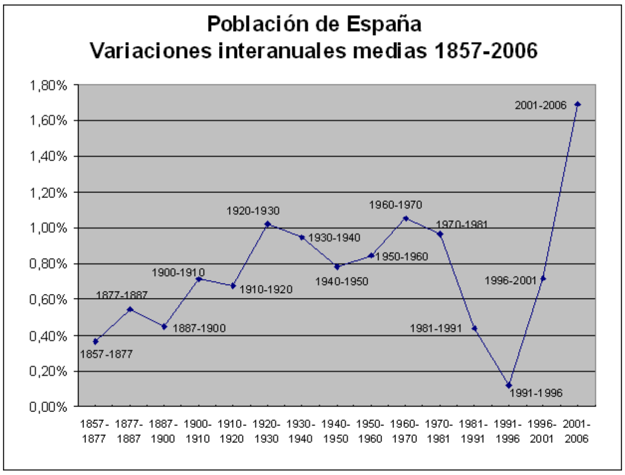






Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

9. El Instituto Nacional de Estadística ha publicado el siguiente balance de la evolución demográfica de la `población española, mediante la gráfica siguiente:



Variaciones interanuales medias de la población española entre 1857 y 2006.

a) Entre 1970 y 1991 la población ¿crece o decrece?

b) Entre 1920 y 1940 la población ¿crece o decrece?

c) ¿Y entre 1991 y 2001?

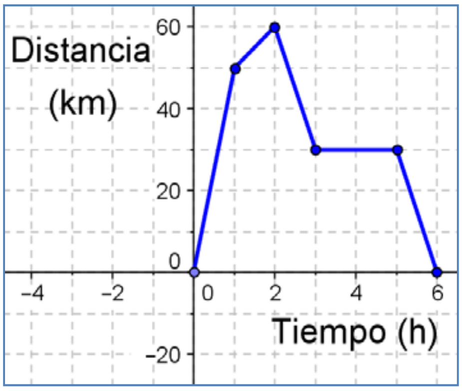
Razona sobre el significado de esta gráfica.

a) Los porcentajes del eje de ordenadas, ¿qué significan?

b) ¿En algún momento la población ha dejado de crecer, o simplemente crece más lentamente?

c) Indica posibles motivos que expliquen esta gráfica

10. Juan sale de su casa en bicicleta y hace el recorrido que muestra la gráfica:



a. ¿A qué distancia de su casa llega?

b. ¿Cuánto tiempo está parado?

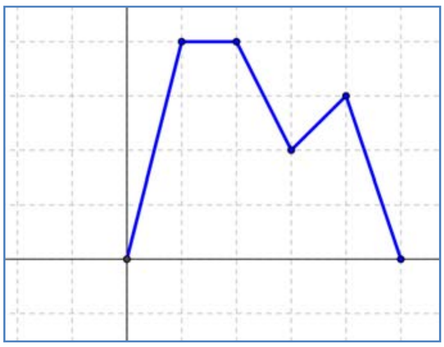
c. ¿Cuánto tarda en volver?

d. A las dos horas ¿a qué distancia está de su casa?

e. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 50 km?

f. ¿Cuándo va más deprisa? Y ¿Cuándo más despacio?

11. La gráfica nos muestra una relación entre dos magnitudes.



A. Inventa una situación que pueda ser representada por esta gráfica.
B. Señala cuales son las magnitudes y en qué unidades se miden.
C. Indica, en los ejes, los números adecuados.
D. Describe, a partir de tus datos, la situación que has inventado.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

12. El fenómeno de los incendios forestales se ha convertido en uno de los mayores problemas ecológicos que sufren nuestros montes debido a la elevada frecuencia e intensidad que ha adquirido en las últimas décadas. Los que han ocurrido en Madrid y el nº de hectáreas quemadas nos lo da la tabla siguiente:

Hectáreas quemadas (Ha)	825	1.095	450	339	325	101	385
Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

Haz una gráfica con estos resultados.

13. Construye tablas de valores, con cuatro cantidades diferentes, que nos expresen las siguientes relaciones:

a. El peso y el precio de la miel de La Hiruela (Madrid), sabiendo que el kilo vale 7 €

b. Un número y la mitad de dicho número.

c. El perímetro de un triángulo equilátero y la medida de su lado.

Las funciones

14. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a. La temperatura del puré a largo del tiempo.

b. El precio de una camiseta y su color.

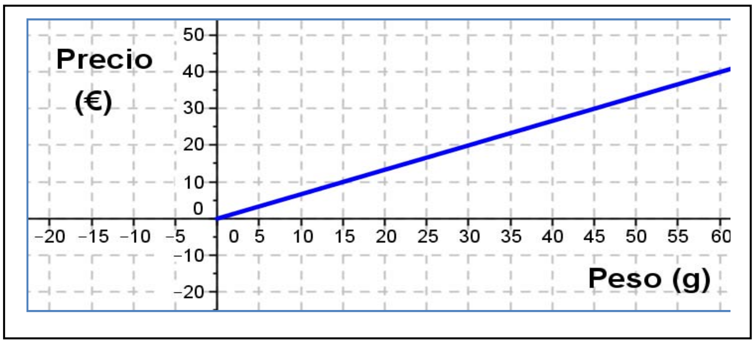
c. El área de un cuadrado y su lado.

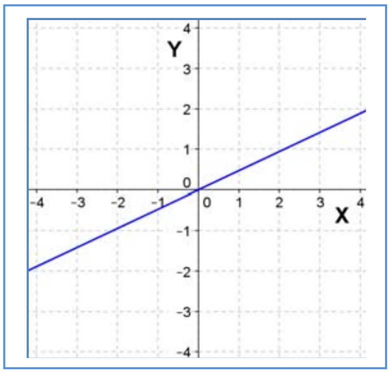
d. El precio de las naranjas que hemos comprado y su peso.

e. El volumen de una esfera y su radio.

15. Propón dos situaciones diferentes a todas los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

16. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica.



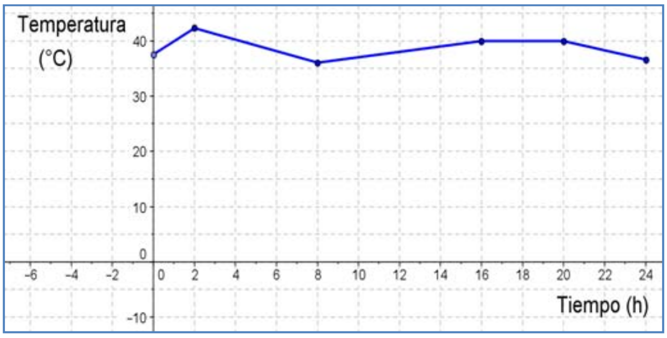


¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la independiente? ¿Tiene sentido prolongar la gráfica por el tercer cuadrante?

17. Expresa de forma gráfica, mediante una tabla de valores y mediante una descripción verbal, la función definida por la siguiente fórmula: $d = 100 \cdot t$ ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la variable independiente?

18. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la independiente?

19. La siguiente gráfica describe la evolución de la temperatura de un enfermo durante un día.



Mirando la gráfica indica:

a) ¿Qué temperatura tenía a las cuatro de la mañana? ¿y a las doce de la noche?

b) ¿A qué horas tenía cuarenta grados de fiebre?

c) ¿A qué hora tuvo más temperatura? ¿De cuánto era?

d) ¿A qué hora tuvo menos temperatura? ¿De cuánto era?

e) Describe con palabras esta situación.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

20. Una bañera de 500 litros se vacía mediante un sumidero que desagua 25 litros cada minuto. Haz una tabla de valores con los diez primeros minutos de vaciado. Representa gráficamente la función que relaciona la cantidad de agua que hay en la bañera con el tiempo transcurrido desde que empieza a vaciarse. Indica cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

21. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a. La temperatura de un enfermo a largo del tiempo.
b. El precio de un coche y su color.
c. El volumen de un líquido y su peso.
d. La distancia al Instituto y el tiempo empleado.
e. La longitud de un muelle y el peso colgado en él.

22. Propón dos situaciones diferentes a todas los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

23. En una papelería 10 lápices cuestan 2,5 €, haz una tabla de valores, dibuja su gráfica y escribe su expresión algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿y la variable independiente?

24. Juan, otro día, da un paseo con su amiga Luna. Salen de casa de Luna por un camino llano durante un tiempo, descansan durante un rato y, después regresan a casa de Luna por el mismo camino pero más despacio. Haz una gráfica (tiempo, distancia) que describa esta situación.

AUTOEVALUACIÓN

1) El punto de coordenadas A = (–5, –6) está situado en el:

a) primer cuadrante b) segundo cuadrante c) tercer cuadrante d) cuarto cuadrante.

2) Indica qué afirmación es falsa:

a) El eje de abscisas es el eje OY
b) El eje de ordenadas es vertical
c) El eje de abscisas es perpendicular al eje de ordenadas
d) El eje de ordenadas es el eje OY

3) Los puntos de coordenadas A = (0, –5), B = (0, 4), C = (0, –7), D = (0, 8) están todos ellos en el:

a) eje de ordenadas b) primer cuadrante c) eje de abscisas d) segundo cuadrante

4) Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

Personas	1	4	8	
Kg de comida	7			21

a) 16, 32, 7 b) 10, 20, 3 c) 28, 56, 3 d) 9, 18, 4

5) La siguiente tabla de valores puede corresponder a:

X	4	12	20	36
Y	1	3	5	9

a) una proporcionalidad directa. b) una proporcionalidad inversa

c) la relación entre el lado de un cuadrado y su área. d) la relación entre el radio del círculo y su área

6) Indica en los casos siguientes aquel que NO es una función:

a) La temperatura de un enfermo a lo largo del tiempo. b) Y = 3X + 2.

c) La longitud de una circunferencia como función del radio. d) El área de un círculo y su color.

7) Indica qué afirmación es falsa:

a) El origen de coordenadas es la intersección entre el eje de abscisas y el de ordenadas

b) En una función a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente

c) En una función a cada valor de la variable dependiente le corresponde un único valor de la variable independiente

8) Escribe una tabla de valores de la función y = 2x – 3.

x	1	2	3	4
y				

a) –1, 1, 3, 5. b) 0, 1, 4, 5. c) –1, –7, –9, –11. d) –1, 0, 3, 6.

9) Dibuja la gráfica de la función: Área del cuadrado = Lado al cuadrado.

PARA EL PROFESORADO

El concepto de función es uno de los conceptos básicos en Matemáticas y, al mismo tiempo, uno de los más difíciles de adquirir por los estudiantes de secundaria. Esto no es extraño si analizamos cómo ha evolucionado dicho concepto a lo largo de la historia.

En la historia de las Matemáticas comienza a plantearse el concepto de función hacia el siglo XIV y ha sido uno de los que ha presentado una mayor dificultad, siendo en el siglo XX uno de los ejes de la investigación matemática. Incluso para los matemáticos del siglo XVIII no estaba muy claro el concepto de función. Por ejemplo, en un artículo de *Jean Bernoulli* publicado en 1718 se encuentra esta primera definición: *“Una función de una variable es definida aquí como una cantidad compuesta de alguna manera por una variable y constantes”*. Los matemáticos estaban dispuestos a aceptar dos tipos de funciones, las que venían dadas por una fórmula o las que se trazaban arbitrariamente dibujando su gráfica. La idea abstracta de función como correspondencia tardó un tiempo en aparecer. Fue *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768 – 1830) en su obra *“La teoría analítica del calor”* el motor para la profundización del concepto de función. Recordemos que cuando Fourier expuso su desarrollo de una función en serie trigonométrica, empezó a discutirse sobre qué era una función, cuáles podían ajustarse a ese desarrollo, y este hecho fue un catalizador en la historia de las Matemáticas que, entre otras muchas cosas, llevó a formalizar este concepto. La noción moderna de función es muy reciente, podemos fecharla en la obra de *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805-1859) de 1837, donde aparece la noción de función como correspondencia, independiente de una representación analítica o geométrica.

A lo largo de la historia, este concepto se ha ido desarrollando a partir del estudio de fenómenos del mundo que nos rodea y ha sido expresado en distintos lenguajes —verbal, gráfico, algebraico y numérico—. Por tanto, para poder conseguir una aproximación significativa al sentido de las funciones, es preciso estudiar este concepto desde distintos aspectos, utilizando diferentes lenguajes y trabajando en distintas situaciones.

Ya que las relaciones funcionales se encuentran con frecuencia en nuestro entorno, el estudio de funciones, por los estudiantes de 1º de E.S.O., debe comenzar con el tratamiento de aquellas situaciones que existen en su entorno, sin olvidar las relacionadas con otras áreas de conocimiento (las Ciencias de la Naturaleza, las Ciencias Sociales, etc.).

Desde el primer curso de la E.S.O. los estudiantes pueden ir aproximándose al concepto de función interpretando los significados de las distintas expresiones de las funciones. Estos procedimientos se han de trabajar a lo largo de toda la etapa, y se van adquiriendo a medida que aumenta la madurez cognitiva y el campo de experiencia del estudiante.

La dificultad de visualización de la representación gráfica de una función puede salvarse con la utilización de programas informáticos específicos como el Geogebra, o por aplicaciones elaboradas ya por algunos profesores y que están a disposición de todos, como las elaboradas dentro del Proyecto Gauss (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado) o en páginas personales de estos.

Bien utilizando un solo ordenador en el aula —con la PDi o mediante la proyección de la pantalla—, o bien con el uso de los ordenadores por los estudiantes en el aula de informática, estos pueden familiarizarse con la forma de las gráficas y la interpretación de sus puntos y es un apoyo inestimable para acercarse a la representación de funciones y al concepto de función.

Por último hay que indicar que la tercera parte de este capítulo pretende una primera formalización al concepto de función y, aunque se ha tratado de seleccionar actividades en las que las relaciones funcionales son esencialmente proporcionales, puede ser de mayor dificultad.

De este modo, encontrar la expresión algebraica a partir de la representación gráfica de una función sencilla es una de las ampliaciones que se pueden proponer a los estudiantes más aventajados y puede servir para el estudio y comprensión mayor del significado de las funciones.

Por todo ello, y dependiendo del tiempo que se desee o se pueda emplear para el desarrollo de este capítulo, esta tercera parte se puede suprimir sin que haya ninguna actividad, de las partes anteriores, que quede sin terminar de desarrollar.