Tema 4. Potencias y Fracciones (III) **Resumen**

La potencia de una fracción tiene el mismo significado que la potenciación en general, y se cumplen las mismas propiedades que en potenciación con números enteros.

Propiedades de la potenciación con números enteros:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad (a^n)^m = a^{n\cdot m}$ $\quad a^n : a^m = a^{n-m}$ $\quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad (a:b)^n = a^n : b^n$

Potencia de una fracción. Definición: $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Propiedad inicial: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ **Ejemplos**: a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$

Al revés: $\frac{p^n}{q^n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n$. **Ejemplo**: $\frac{6^3}{9^3} = \left(\frac{6}{9}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

Producto y cociente de potencias de la misma base:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

Ejemplos: a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$ b) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 : \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

Potencia de un producto de fracciones: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$

Ejemplo: $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}\right)^4 = \left(\frac{9}{12}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$

Potencia de un cociente de fracciones: $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$

Ejemplos: $\left(\frac{1}{3}:\frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1^3}{3^3} : \frac{5^3}{6^3} = \frac{1}{27} : \frac{125}{216} = \frac{216}{27\cdot 125} = \frac{216}{3375} = \frac{8}{125}$

- En este caso, conviene operar antes el paréntesis: $\left(\frac{1}{3}:\frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{15}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

Potencia de una potencia: $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$ **Ejemplo:** $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^8$

Potencia de exponente 0: $a^0 = 1$; $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ **Ejemplos**: $\left(\frac{7}{8}\right)^0 = 1$; $\left(\frac{-1}{5}\right)^0 = 1$

Potencia de exponente negativo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Ejemplos: a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3 = 8$ c) $\frac{2^{-3}}{3^{-3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$

Números y potencias de base 10

La potencia 10^n equivale a la unidad de orden de magnitud n; esto es, 1 seguido de tantos ceros como indica el exponente n. Así:

$10^0 = 1$ (unidad) $10^1 = 10$ (decena: orden de magnitud 1)

$10^2 = 100$ (centena: magnitud 2) $10^3 = 1\ 000$ (unidad de millar: magnitud 3) …

Si extendemos esta notación a exponentes negativos se tiene:

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ (décima) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ (centésima)

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ (milésima)

$10^{-4} = 0{,}0001$ $0{,}00001 = 10^{-5}$ $0{,}000001 = 10^{-6}$…

Por tanto, cualquier número entero o decimal, puede escribirse mediante potencias de 10.

Ejemplos:

a) $7345304 = 7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

b) $368{,}098 = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$

$= 300 + 60 + 8 + 0{,}0 + 0{,}09 + 0{,}008$

Números muy grandes o muy pequeños

Las potencias de 10 facilitan la expresión de números de muchas cifras, decimales o no. En muchos de ellos, para facilitar la comprensión de la cantidad conviene redondear.

Ejemplos:

a) $160000000 = 16 \cdot 100000000 = 16 \cdot 10^8$. También: $1{,}6 \cdot 1000000000 = 1{,}6 \cdot 10^9$

b) $0{,}00000089 = 89 \cdot 0{,}00000001 = 89 \cdot 10^{-8}$. También: $8{,}9 \cdot 10^{-7}$

Fracciones y números decimales.

Al dividir el numerador entre el denominador se obtiene un número decimal. Por tanto, una fracción puede considerarse como un número decimal.

Ejemplos: $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{12}{5} = 2{,}4$; $\frac{23}{100} = 0{,}23$; $\frac{2}{3} = 0{,}666…$

- Y al revés, los números decimales (con un número finito de cifras decimales o con infinitas cifras decimales periódicas) pueden escribirse como una fracción.

Ejemplos: $0{,}78 = \frac{78}{100}$; $3{,}2 = \frac{32}{10}$; $0{,}375 = \frac{375}{1000}$.

Para obtener la **fracción equivalente (generatriz) a un números decimal periódico** hay que multiplicar el número dado por 10, 100, …, según convenga, a fin de que al restar los números se consiga eliminar las cifras decimales.

Ejemplo: Si el número es 2,5676767… → Se escribe $F = 2{,}5676767…$

- Se multiplica por 1000: $1000 \cdot F = 2567{,}6767…$
- Se multiplica por 10: $10 \cdot F = 25{,}6767…$
- Se restan esos números: $990 \cdot F = 2542$ Se despeja F: $F = \frac{2542}{990}$

Los números racionales, son todos los que pueden escribirse en forma de fracción.

Los números racionales son: los naturales, los enteros, los decimales con un número finito de cifras decimales, y los números decimales periódicos.

- Los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas no son racionales. Se llaman números irracionales. Por ejemplo: 7,01002000300004…