

Tema 6. (II) Polinomios

Resumen

Un polinomio es la suma de varios monomios. Si la suma es de dos monomios se le puede llamar **binomio**; si es suma de tres monomios, **trinomio**. Y en general, polinomio.

- Cada uno de los monomios que forman el polinomio se llama **término**. Como sabes, cada término está formado por una parte numérica (coeficiente) y por una parte literal.
- El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Ejemplos: a) Son binomios: $3a - 5b$, $3x - 7$; $x^2 + 2x$; $2x^3 - \frac{3}{5}x$. El último es de grado 3.

b) Son trinomios: $-2ax + 3a - 5x$; $3x^2 + 2x - 4$; $x^2 - \frac{1}{3}x + 2$. Los tres son de grado 2.

Polinomios en x . En matemáticas la mayoría de las veces se utiliza la letra x . Por eso, casi siempre se emplean polinomios como $4x^3 + 5x - 6$ o $-2x^2 + 7x + 3$; y con frecuencia se escriben así: $A(x) = 4x^3 + 5x - 6$ o $B(x) = -2x^2 + 7x + 3$. La expresión más común es $P(x)$.

Ejemplo: La expresión $P(x) = 2x^5 - 4x^3 + 5x - 6$ es un polinomio de grado 5. Los términos que lo forman son: $2x^5$, de grado 5 y coeficiente 2; $-4x^3$, de grado 3 y coeficiente -4 ; $5x$, de grado 1 y coeficiente 5; el número -6 es el término independiente.

Ese polinomio no tiene los términos de 4º grado ni de 2º; pero, si conviene, podría escribirse $P(x) = 2x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 5x - 6$. Así, los coeficientes, ordenados de mayor a menor grado, son: 2 (para x^5), 0 (para x^4), -4 (para x^3), 0 (para x^2), 5 (para x); -6 (término independiente).

Valor numérico de una expresión algebraica es el número que resulta cuando se sustituyen las letras por números.

Ejemplos: a) El valor numérico de $5x^2 + 2x - 4$ para $x = 3$ es $5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 4 = 45 + 6 - 4 = 47$. Y para $x = -2$ es: $5 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 4 = 5 \cdot 4 - 4 - 4 = 20 - 8 = 12$.

Operaciones con polinomios

Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se suman o restan los términos semejantes.

Ejemplos: Para los polinomios: $4x^3 + 5x - 6$ y $3x^3 - 2x^2 + 7x$:

$$a) (4x^3 + 5x - 6) + (3x^3 - 2x^2 + 7x) = (4x^3 + 3x^3) - 2x^2 + (5x + 7x) - 6 = 7x^3 - 2x^2 + 12x - 6.$$

$$b) (4x^3 + 5x - 6) - (3x^3 - 2x^2 + 7x) = (4x^3 - 3x^3) - (-2x^2) + (5x - 7x) - 6 = x^3 + 2x^2 - 2x - 6.$$

Observación: es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos.

Multiplicación de un polinomio por un monomio

Se multiplica cada término del polinomio por el monomio; para ello se utiliza la propiedad distributiva del producto y las reglas de la potenciación.

$$\text{Ejemplo: } 4x^2 \cdot (3x^3 - 2x^2 + 7x) = (4x^2 \cdot 3x^3) + (4x^2 \cdot (-2x^2)) + (4x^2 \cdot 7x) = 12x^5 - 8x^4 + 28x^3$$

Observación: es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos.

Multiplicación de dos polinomios

Se multiplica cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo: “todos por todos”. Esto es, se aplica la propiedad distributiva del producto y las reglas de la potenciación. Una vez realizados los productos deben agruparse los términos semejantes.

Ejemplos: a) $(5x - 6)(2x^2 - 3x + 1) = (5x)(2x^2 - 3x + 1) - 6(2x^2 - 3x + 1) =$
 $= (5x \cdot 2x^2) + (5x \cdot (-3x)) + (5x \cdot 1) - (6 \cdot 2x^2) - (6 \cdot (-3x)) - (6 \cdot 1) =$
 $= 10x^3 - 15x^2 + 5x - 12x^2 + 18x - 6 = 10x^3 - 27x^2 + 23x - 6$

b) $(4x^3 + 5x - 6)(3x^3 - 2x^2 + 7x) = (4x^3 \cdot 3x^3) + (4x^3 \cdot (-2x^2)) + (4x^3 \cdot 7x) +$
 $+ (5x \cdot 3x^3) + (5x \cdot (-2x^2)) + (5x \cdot 7x) - (6 \cdot 3x^3) - (6 \cdot (-2x^2)) - (6 \cdot 7x) =$
 $= 12x^6 - 8x^5 + 28x^4 + 15x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 18x^3 + 12x^2 - 42x =$
 $= 12x^6 - 8x^5 + 43x^4 - 28x^3 + 47x^2 - 42x$

Observación: es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos, tanto al multiplicar como al sumar.

Productos notables:**Cuadrado de una suma:** $(a + b)^2$

Multiplicando como dos polinomios:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow \underline{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Ejemplos: a) $(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$

b) $(x^2 + 1)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2$

Multiplicando como dos polinomios:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \cdot a + a \cdot (-b) - b \cdot a - b \cdot (-b) = a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow \underline{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Ejemplos: a) $(4x - 3)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2 = 16x^2 - 24x + 9$

b) $(5 - x^2)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x^2 + (x^2)^2 = 25 - 10x^2 + x^4$

Suma por diferencia: $(a + b) \cdot (a - b)$

Multiplicando como dos polinomios:

$$(a + b)(a - b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) = a^2 - b^2 \rightarrow \underline{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Ejemplos: a) $(4x + 3)(4x - 3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$

b) $(2 + x^2)(2 - x^2) = 2^2 - (x^2)^2 = 4 - x^4$