11 Semejanza. Teorema de Tales

ACTIVIDADES INICIALES

11.I. Cuando Gulliver entra al servicio del emperador, se le asigna una manutención: "… comida y bebida suficiente para el mantenimiento de 1724 de nuestros súbditos…". Los matemáticos de la corte, viendo que la altura de Gulliver era 12 veces la de un liliputiense, habían calculado esa cantidad. ¿Es correcta?

La proporción es correcta, ya que $12^3 = 1728$, y para alimentar a Gulliver se tuvo en cuenta la proporción entre su volumen y el de un liliputiense.

11.II. Utilizando esa proporción entre las alturas, ¿cuánto medirías si fueses liliputiense? Calcula también las alturas que tendrían tu habitación, un elefante africano de 3 metros de alto, una secuoya de 116 metros y la torre Eiffel.

Una persona de 1,60 metros a escala liliputiense debería medir algo más de 13 centímetros. El elefante mediría 25 centímetros; la secuoya, 9,67 metros, y la torre Eiffel, unos 27 metros.

11.III. Los fans del tren intentan reproducir su particular Liliput ferroviario en impresionantes maquetas. ¿Has visto alguna vez una de ellas? Fíjate en la que aparece en el siguiente vídeo.

www.e-sm.net/2esoz55

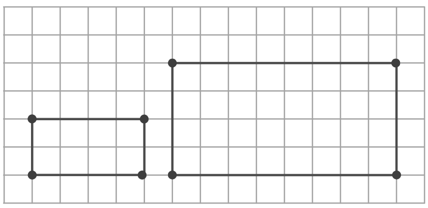
Busca cuáles son las escalas más habituales que se emplean en las miniaturas ferroviarias y calcula cuál sería la longitud de un tren AVE de 200 metros en cada una de las correspondientes maquetas.

Hay varias escalas: Z (1:220), N (1:160), HO (1:87), S (1:64), O (1:48), G (1:22,5), entre otras. Por ejemplo, un tren de 200 metros mediría unos 91 centímetros en la primera de esas escalas, y unos 8,89 metros en la última. La respuesta dependerá de las escalas que hayan encontrado. Es interesante que los alumnos vean que la primera escala no es la que corresponde a los trenes más grandes, ya que es un error que suelen cometer.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

11.1. Actividad resuelta.

11.2. Dibuja dos rectángulos tales que su base sea justo el doble que su altura. ¿Son semejantes las figuras que has dibujado? ¿Cuál es la razón de semejanza?



La razón de semejanza es 2.

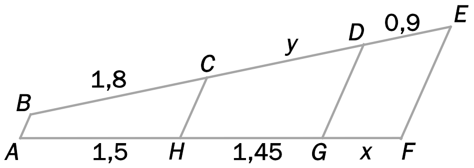
11.3. Las medidas de un rectángulo son 5 y 10 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que el lado mayor mida 5 centímetros.

La razón de semejanza de los dos rectángulos es $\frac{5}{10} = 0{,}5$.

Las medidas del segundo rectángulo son 5 · 0,5 = 2,5 cm y 10 · 0,5 = 5 cm.

11.4. Actividad resuelta.

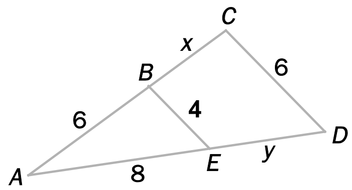
11.5. (TIC) En la siguiente figura, halla la longitud de *x* e *y*.



$$\frac{AH}{BC} = \frac{GF}{DE} \Rightarrow \frac{1{,}5}{1{,}8} = \frac{x}{0{,}9} \Rightarrow x = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}9}{1{,}8} = 0{,}75$$

$$\frac{AH}{BC} = \frac{HG}{CD} \Rightarrow \frac{1{,}5}{1{,}8} = \frac{1{,}45}{y} \Rightarrow y = \frac{1{,}45 \cdot 1{,}8}{1{,}5} = 1{,}74$$

11.6. Explica por qué los triángulos de la figura están en posición de Tales y calcula las longitudes desconocidas *x* e *y*.

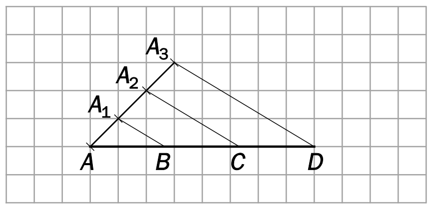


Los triángulos comparten el ángulo *A*, y los lados opuestos correspondientes *BE* y *CD* son paralelos. Por tanto, son triángulos en posición de Tales.

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{6+x} \Rightarrow 6 + x = 9 \Rightarrow x = 3 \qquad \frac{6}{8} = \frac{x}{y} \Rightarrow 6y = 8x = 24 \Rightarrow y = 4$$

11.7. Divide un segmento de 8 centímetros de longitud en tres partes iguales mediante el teorema de Tales.

Sean *A* y *D* los extremos del segmento que se desea dividir, como en la figura.

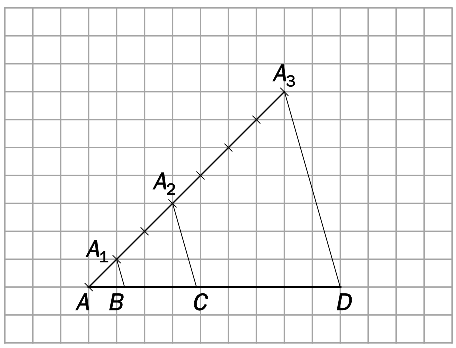


Desde el extremo *A*, se traza una semirrecta auxiliar sobre la que se llevan tres segmentos de la misma longitud (la que se quiera) y que tienen por extremos *A*, A_1, A_2 y A_3.

Se une A_3 con *D* y se trazan paralelas a la recta A_3D por A_1 y A_2, que cortan a *AD* en *B* y *C*.

Gracias al teorema de Tales, se puede asegurar que los segmentos *AB*, *BD* y *CD* son iguales.

11.8. (TIC) Divide un segmento de 9 centímetros de longitud en tres partes proporcionales a 1, 2 y 4 mediante el teorema de Tales.



11.9. Actividad resuelta.

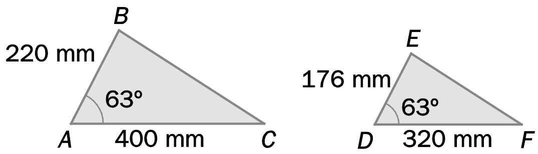
11.10. (TIC) La sombra de un árbol de 2,5 metros de alto es de 3,25 metros en cierto momento. ¿Qué sombra proyectará en ese momento otro árbol de 3,5 metros de alto?

Aplicando la semejanza de triángulos y siendo x la medida buscada:

$$\frac{2,5}{3,25} = \frac{3,5}{x} \Rightarrow x = \frac{3,25 \cdot 3,5}{2,5} = 4,55 \text{ m}$$

11.11. Actividad interactiva.

11.12. Comprueba, mediante alguno de los criterios, que los triángulos son semejantes.



Los triángulos tienen un ángulo igual: $A = D$

Los lados que lo forman son proporcionales: $\frac{220}{176} = \frac{400}{320}$ (pues 220 · 320 = 400 · 176)

Por tanto, gracias al segundo criterio, se puede afirmar que los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes.

11.13. Actividad resuelta.

11.14. Actividad resuelta.

11.15. (TIC) Los lados de un cuadrilátero miden 2, 3, 4 y 5 cm, respectivamente.

a) Calcula la medida de los lados de otro cuadrilátero semejante al anterior y que tenga por perímetro 49 centímetros.

b) ¿Cuál será la razón de las áreas entre los dos cuadriláteros?

c) ¿El nuevo cuadrilátero puede ser un rectángulo? ¿Y un trapecio?

d) Dibuja los cuadriláteros y comprueba tus resultados.

a) La razón de semejanza es igual a la razón de los perímetros: $k = \frac{49}{2+3+4+5} = \frac{49}{14} = 3,5$

Por tanto:

El homólogo del lado de 2 cm mide $2 \cdot k = 2 \cdot 3,5 = 7$ cm

El homólogo del lado de 3 cm mide $3 \cdot k = 3 \cdot 3,5 = 10,5$ cm

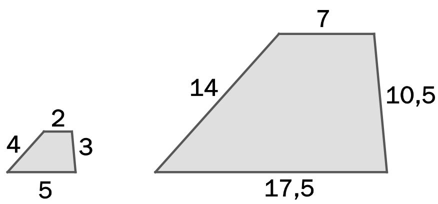
El homólogo del lado de 4 cm mide $4 \cdot k = 4 \cdot 3,5 = 14$ cm

El homólogo del lado de 5 cm mide $5 \cdot k = 5 \cdot 3,5 = 17,5$ cm

b) La razón de las áreas será $k^2 = 3,5^2 = 12,25$.

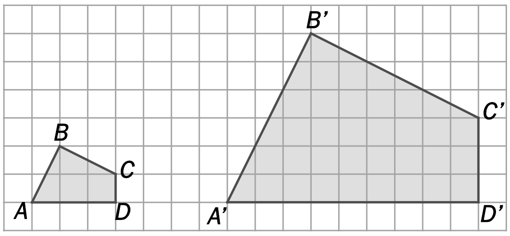
c) No puede ser un rectángulo, ya que los lados deben ser iguales dos a dos. Sin embargo, sí puede ser un trapecio (aunque no obligatoriamente).

d)



11.16. Actividad interactiva.

11.17. Para los polígonos semejantes de la figura:



a) Halla la medida de sus lados, perímetros y áreas.

b) Comprueba la relación que existe entre la razón de semejanza y las razones de los perímetros y de las áreas.

a) $AB = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ $\quad BC = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ $\quad CD = 1$ $\quad DA = 3$

$A'B' = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ $\quad B'C' = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ $\quad C'D' = 3$ $\quad D'A' = 9$

b) Razón de semejanza: $k = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{1} = \dfrac{9}{3} = 3$

Perímetros: $P_1 = \sqrt{5} + \sqrt{5} + 1 + 3 = 4 + 2\sqrt{5}$ $\quad P_2 = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3 + 9 = 12 + 6\sqrt{5}$

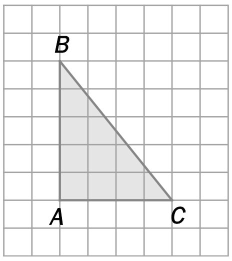
Razón de los perímetros $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{12+6\sqrt{5}}{4+2\sqrt{5}} = \dfrac{6\left(2+\sqrt{5}\right)}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{6}{2} = 3$, coincide con k.

Áreas: $A_1 = \dfrac{2\cdot 1}{2} + \dfrac{2\cdot 1}{2} + 2 = 4$ $\quad A_2 = \dfrac{3\cdot 6}{2} + \dfrac{3\cdot 6}{2} + 18 = 36$

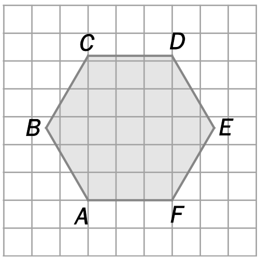
Razón de áreas: $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{36}{4} = 9$, coincide con k^2.

11.18. Construye en tu cuaderno polígonos semejantes a los siguientes con razón de semejanza 0,5.

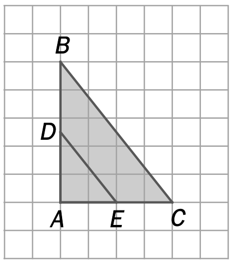
a)



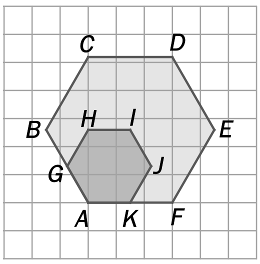
b)



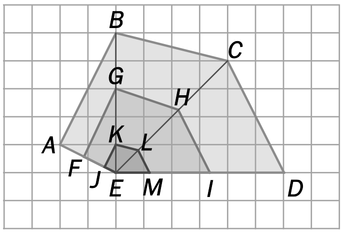
a) Los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes con razón de semejanza 0,5.



b) Los hexágonos *ABCDEF* y *AGHIJK* son semejantes con razón de semejanza 0,5.



11.19. Indica la razón de semejanza de los pentágonos *ABCDE* y *FGHIE* y de los pentágonos *ABCDE* y *JKLME*.

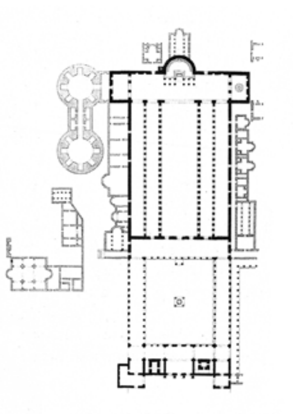


Los pentágonos *ABCDE* y *FGHIE* son semejantes con razón de semejanza $\frac{3}{5}$.

Los pentágonos *ABCDE* y *JKLME* son semejantes con razón de semejanza $\frac{1}{5}$.

11.20. Actividad resuelta.

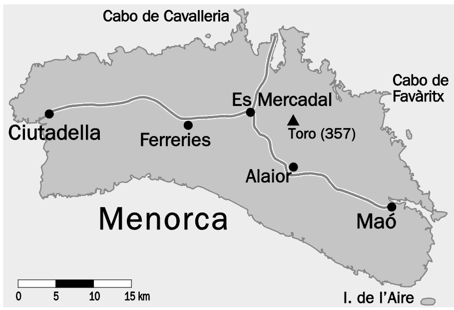
11.21. Explica qué tipo de representación es cada una de las siguientes situaciones.



Son, respectivamente, una maqueta, un plano y un mapa.

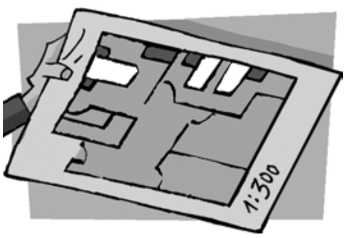
11.22. Actividad resuelta.

11.23. El siguiente mapa muestra las carreteras de la isla de Menorca. Calcula la distancia de Ciutadella a Maó.



Midiendo con una regla la distancia por carretera en el mapa y teniendo en cuenta la escala, la distancia de Ciutadella a Maó debe ser de aproximadamente 40 km.

11.24. Fíjate en este plano a escala 1:300 y calcula las dimensiones y el área reales de cada estancia de la casa.



Para calcular las dimensiones reales, hay que medir con regla las dimensiones de cada estancia en el plano y multiplicar por 300. Por ejemplo, la habitación con una cama mide aproximadamente 1 × 1 cm, con lo que las dimensiones reales serán de 3 × 3 m.

Para calcular las áreas reales podemos calcular las áreas sobre el plano, usando las dimensiones medidas con regla, y multiplicar por 300^2, o calcular directamente las áreas reales usando las dimensiones reales calculadas previamente.

11.25. Actividad interactiva.

EJERCICIOS

Figuras semejantes. Teorema de Tales

11.26. (TIC) Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos. Estudia, en cada caso, si son o no semejantes. En caso afirmativo, determina la correspondiente razón de semejanza.

a) 2 4 5 8 16 20

b) 3 4 6 4,5 6 8,5

c) 2,5 5,5 7 6,25 13,75 17,5

a) Los lados son proporcionales, ya que $\frac{8}{2}=\frac{16}{4}=\frac{20}{5}=4$.

Por el tercer criterio, los triángulos son semejantes con razón de semejanza de k = 4 del segundo respecto del primero.

b) Los lados no son proporcionales, ya que $\frac{4,5}{3}=\frac{6}{4}\neq\frac{8,5}{6}$.

Los triángulos no son semejantes.

c) Los lados son proporcionales, ya que $\frac{6,25}{2,5}=\frac{13,75}{5,5}=\frac{17,5}{7}=2,5$.

Por el tercer criterio, los triángulos son semejantes con razón de semejanza de k = 2,5 del segundo respecto del primero

11.27. a) ¿Son semejantes todos los pentágonos regulares?

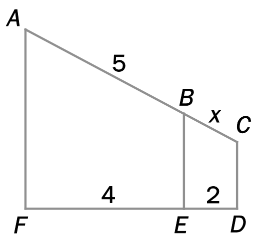
b) Un pentágono regular tiene por lado 4 cm. Calcula el perímetro de otro pentágono regular con razón de semejanza respecto al anterior de 2,5.

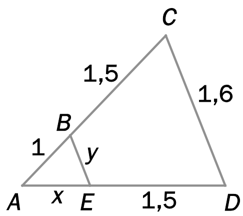
a) Todos los pentágonos regulares son semejantes ya que sus ángulos son siempre de $\frac{180º\cdot 3}{5}=108º$ y sus lados son proporcionales, ya que son iguales en cada uno de ellos.

b) Los lados del nuevo pentágono miden 4 · 2,5 = 10 cm.

El perímetro del nuevo pentágono mide 5 · 10 = 50 cm.

11.28. (TIC) Calcula el valor de los segmentos desconocidos en cada una de las siguientes representaciones.





Primera figura: $\frac{5}{4}=\frac{x}{2}\Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = 2,5$

Segunda figura: $\frac{1}{x}=\frac{1,5}{1,5}\Rightarrow 1,5x = 1,5 \Rightarrow x = 1$ $\frac{1,6}{1+1,5}=\frac{y}{1}\Rightarrow 2,5y = 1,6 \Rightarrow y = 0,64$

11.29. Decide, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Todos los cuadrados son semejantes.

b) Todos los rectángulos son semejantes.

c) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

d) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

e) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

f) Todos los triángulos que son a la vez rectángulos e isósceles son semejantes.

a) Verdadera. Todos los ángulos son rectos y los lados correspondientes son proporcionales, ya que en cada cuadrado los lados son iguales.

b) Falsa. Aunque todos los ángulos son iguales, los lados no tienen por qué ser proporcionales. Por ejemplo, los rectángulos de lados 1 y 2 cm y 1 y 3 cm.

c) Verdadera. Todos los ángulos son de 60° y, por tanto, iguales, y los lados correspondientes son proporcionales, ya que en cada triángulo los lados son iguales.

d) Falsa. Ni siquiera tienen por qué tener los ángulos iguales.

e) Falsa. Ni siquiera tienen por qué tener los ángulos iguales.

f) Verdadera. Los ángulos correspondientes son iguales, ya que en todos los casos miden 90°, 45° y 45°, y los lados correspondientes son proporcionales, pues son de la forma x, x y $x\sqrt{2}$.

11.30. (TIC) Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos semejantes. Calcula, en cada caso, la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos.

a) 3, 4, 6   4,5, *x*, *y*

b) *x*, 4, 3   2, 2, *y*

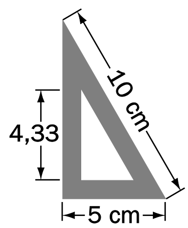
c) *x*, *y*, 8   12, 20, 25

a) La razón de semejanza es $\frac{4,5}{3} = 1,5$. Por tanto: $\frac{x}{4} = 1,5 \Rightarrow x = 6$ $\quad \frac{y}{6} = 1,5 \Rightarrow y = 9$

b) La razón de semejanza es $\frac{2}{4} = 0,5$. Por tanto: $\frac{2}{x} = 0,5 \Rightarrow x = 4$ $\quad \frac{y}{3} = 0,5 \Rightarrow y = 1,5$

c) La razón de semejanza es $\frac{25}{8} = 3,125$. Por tanto: $\frac{12}{x} = 3,125 \Rightarrow x = 3,84$ $\quad \frac{20}{y} = 3,125 \Rightarrow y = 6,4$

11.31. (TIC) Comprueba que los dos triángulos que forman el cartabón de la figura son proporcionales. Calcula la medida de los lados e indica la razón de semejanza.



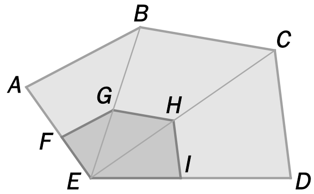
Los triángulos exterior e interior son semejantes, ya que tienen los ángulos iguales (los lados son paralelos).

El triángulo exterior tiene por lados: 10, 5 y $\sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8,66$ cm.

La razón de semejanza es, por tanto, $k = \frac{4,33}{8,66} = 0,5$.

Los lados del triángulo interior serán: 4,33, $10 \cdot 0,5 = 5$ y $5 \cdot 0,5 = 2,5$ cm.

11.32. (TIC) Del polígono *ABCDE* de la figura se conocen las medidas: *AB* = 27, *BC* = 30, *CD* = 30, *DE* = 45 y *EA* = 25. Si el polígono *EFGHI* es semejante al anterior e *IE* = 20:



a) Calcula la razón de semejanza de los dos polígonos.

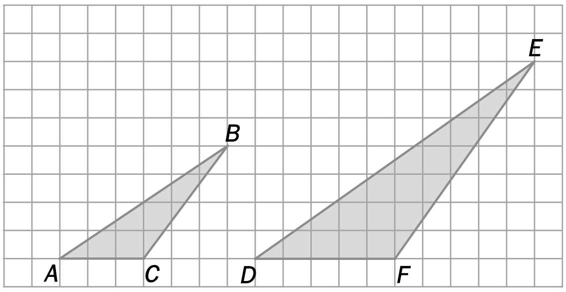
b) Halla los lados desconocidos de *EFGHI*.

a) La razón de semejanza del mayor respecto del menor es $k = \dfrac{DE}{IE} = \dfrac{45}{20} = 2{,}25$.

b) $EF = \dfrac{EA}{2{,}25} = \dfrac{25}{2{,}25} = 11{,}11$ $\qquad FG = \dfrac{AB}{2{,}25} = \dfrac{27}{2{,}25} = 12$

$GH = \dfrac{BC}{2{,}25} = \dfrac{30}{2{,}25} = 13{,}33$ $\qquad HI = \dfrac{CD}{2{,}25} = \dfrac{30}{2{,}25} = 13{,}33$

11.33. Con la ayuda del teorema de Pitágoras, calcula los lados de los triángulos *ABC* y *DEF* y comprueba si son semejantes.



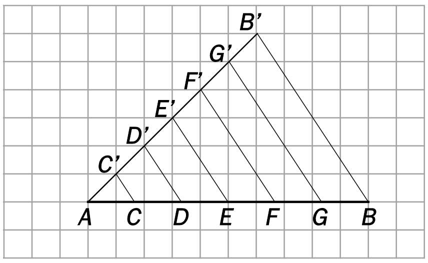
$AC = 3$ $\qquad BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ $\qquad AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

$DF = 5$ $\qquad EF = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ $\qquad ED = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149}$

Los lados no son proporcionales, ya que $\dfrac{3}{5} = 0{,}6$, $\dfrac{5}{\sqrt{74}} \approx 0{,}58$ y $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{149}} \approx 0{,}59$; por tanto, los dos triángulos no son semejantes.

División de segmentos. Criterios de semejanza

11.34. Divide un segmento de longitud 10 centímetros en seis partes iguales.



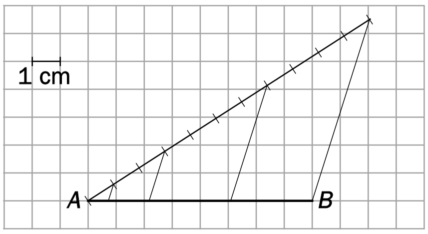
Sean *A* y *B* los extremos del segmento que se desea dividir.

Desde el extremo *A* se traza una semirrecta auxiliar sobre la que se llevan seis segmentos de la misma longitud (la que se quiera) y que tienen por extremos *C'*, *D'*, *E'*, *F'*, *G'* y *B'*.

Se une *B'* con *B* y se trazan paralelas a la recta *BB'* por *C'*, *D'*, *E'*, *F'* y *G'* que cortan a *AB* en *C*, *D*, *E*, *F* y *G*.

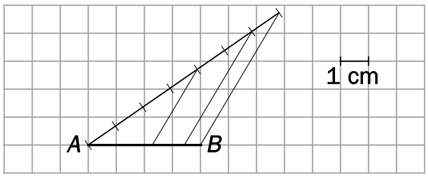
Gracias al teorema de Tales, se puede asegurar que los segmentos *AC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG* y *GB* son iguales.

11.35. Divide un segmento de 8 cm de longitud en cuatro partes proporcionales a 1, 2, 4 y 4.



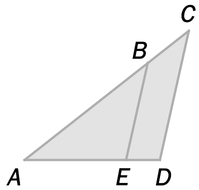
11.36. Divide un segmento de 4 cm en tres partes de forma que la primera sea doble de la segunda, y esta, doble de la tercera.

Se trata de dividir un segmento *AB* de 4 cm en partes proporcionales a 1, 2 y 4.



11.37. En la figura adjunta, los lados *CD* y *BE* son paralelos.

Se sabe que: *AB* = 3 *AE* = 2 *BC* = 1 *BE* = 2



a) ¿Cómo son los triángulos *ABE* y *ACD*?

b) Calcula las medidas de los segmentos *AD, ED* y *CD*.

c) ¿Cuánto vale la razón de semejanza?

a) Los triángulos *ABE* y *ACE* son semejantes, ya que están en posición de Tales.

b) $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{3+1}{AD} = \frac{3}{2} \Rightarrow AD = \frac{8}{3}$

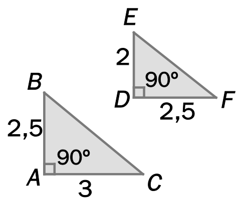
$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{ED} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{ED} \Rightarrow ED = \frac{2}{3}$

$\frac{BE}{AE} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{CD}{8/3} \Rightarrow CD = \frac{8}{3}$

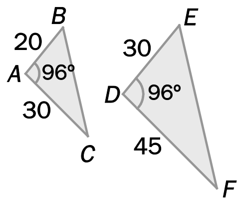
c) La razón de semejanza vale $\frac{4}{3}$.

11.38. Estudia si los siguientes pares de triángulos son o no semejantes.

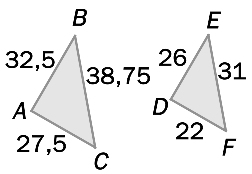
a)



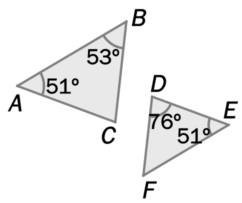
c)



b)



d)



a) Tienen un ángulo igual (el de 90º), pero los lados que lo forman no son proporcionales, ya que $\frac{2,5}{3} \neq \frac{2}{2,5}$. Por tanto, no son semejantes.

b) Los lados son proporcionales, ya que $\frac{32,5}{26} = \frac{27,5}{22} = \frac{38,75}{31}$ = 1,25. Por tanto, y de acuerdo con el tercer criterio, los triángulos son semejantes.

c) Tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales, ya que $\frac{20}{30} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. Por tanto, y de acuerdo con el segundo criterio, los triángulos son semejantes.

d) Los ángulos del primer triángulo son 53º, 51º, y 180º – 53º – 51º = 76º. Por tanto, los dos triángulos tienen dos ángulos iguales y, en aplicación del primer criterio, son semejantes.

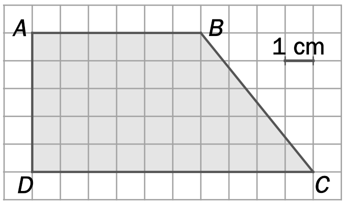
Razón de longitudes, áreas y volúmenes

11.39. Dado el cuadrilátero de la figura:

a) Halla la medida de sus cuatro lados.

b) Halla su perímetro.

c) Dibuja un cuadrilátero de 44 centímetros de perímetro y semejante al anterior.



a) AB = 6 cm $BC = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ cm CD = 10 cm DA = 5 cm

b) $P = 21 + \sqrt{41} \approx 27{,}4$ cm

c) La razón de semejanza será la razón de los perímetros: $k = \dfrac{44}{21+\sqrt{41}} \approx 1{,}6$

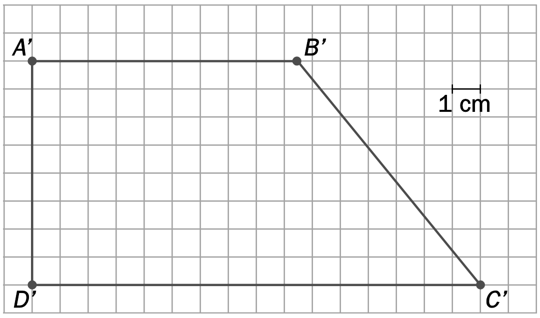
Los lados del nuevo cuadrilátero medirán por tanto:

$A'B' \approx 1{,}6 \cdot 6 = 9{,}6$ cm

$B'C' \approx 1{,}6 \cdot 6{,}4 = 10{,}24$ cm

$C'D' \approx 1{,}6 \cdot 10 = 16$ cm

$D'A' \approx 1{,}6 \cdot 5 = 8$ cm



11.40. (TIC) Los lados de un pentágono miden 4, 5, 5, 5 y 6 centímetros, respectivamente. Calcula los lados de otro pentágono semejante al anterior y con perímetro de 37,5 centímetros.

La razón de semejanza coincide con la razón de perímetros $k = \dfrac{37{,}5}{4+5+5+5+6} = \dfrac{37{,}5}{25} = 1{,}5$.

Por tanto, los lados del nuevo pentágono son:

$4 \cdot 1{,}5 = 6$ cm; $5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$ cm; 7,5 cm; 7,5 cm, y $6 \cdot 1{,}5 = 9$ cm

11.41. (TIC) Los lados de un pentágono miden 4, 3, 3, 5 y 5 centímetros, respectivamente, y su área mide 25 centímetros cuadrados. Calcula los lados de otro pentágono semejante al anterior con área de 100 metros cuadrados.

La razón de las áreas es $\dfrac{100}{25} = 4$, con lo que la razón de semejanza es $k = \sqrt{4} = 2$.

Por tanto, los lados del nuevo pentágono son:

$4 \cdot 2 = 8$ cm; $3 \cdot 2 = 6$ cm; 6 cm; $5 \cdot 2 = 10$ cm, y 10 cm.

11.42. (TIC) Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su área mida 135 centímetros cuadrados.

El rectángulo original tiene de área $3 \cdot 5 = 15$ cm^2, con lo que la razón de áreas es $\dfrac{135}{15} = 9$ y la razón de semejanza es $k = \sqrt{9} = 3$.

Por tanto las medidas del nuevo rectángulo son $3 \cdot 3 = 9$ cm y $5 \cdot 3 = 15$ cm.

11.43. Un triángulo rectángulo tiene por catetos 3 y 4 centímetros. Halla la hipotenusa de otro triángulo semejante al anterior sabiendo que el área de este segundo triángulo es de 24 centímetros cuadrados.

La hipotenusa del triángulo original mide $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm.

El triangulo original tiene de área $\dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm^2, con lo que la razón de áreas es $\dfrac{24}{6} = 4$ y la razón de semejanza es $k = \sqrt{4} = 2$.

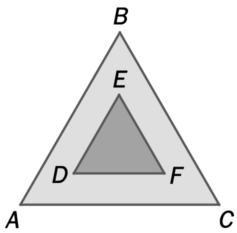
Por tanto, la hipotenusa del nuevo triángulo mide $5 \cdot 2 = 10$ cm.

11.44. (TIC) Las áreas de dos cuadriláteros semejantes son 18 y 28,125 metros cuadrados, respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del menor si el del mayor es de 22,5 metros?

La razón de áreas es $\frac{28{,}125}{18}$ = 1,5625, con lo que la razón de semejanza es $k = \sqrt{1{,}5625} = 1{,}25$.

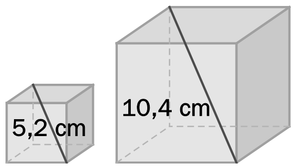
Como la razón de perímetros coincide con k, el perímetro del cuadrilátero menor es $\frac{22{,}5}{1{,}25}$ = 18 cm.

11.45. (TIC) Los triángulos *ABC* y *DEF* son equiláteros. Calcula la razón de semejanza sabiendo que el área del mayor es de 6,93 centímetros cuadrados y el lado del menor mide 2 centímetros.



El área del triángulo menor es $\frac{2\cdot\sqrt{2^2-1^2}}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ cm^2, con lo que la razón de áreas es $\frac{6{,}93}{1{,}73} \approx 4$ y por tanto la razón de semejanza es $k = \sqrt{4} = 2$.

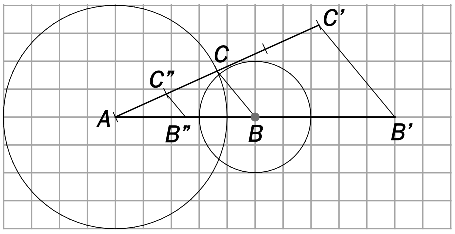
11.46. (TIC) Las diagonales de dos cubos miden 5,2 y 10,4 centímetros, respectivamente. Si el volumen del primero es de 27 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen del segundo?



Los dos cubos son semejantes con razón de semejanza $k = \frac{10{,}4}{5{,}2} = 2$, con lo que la razón de los volúmenes es $k^3 = 8$ y, por tanto, el volumen del segundo cubo es $27 \cdot 8 = 216$ cm^3.

Construcción de polígonos semejantes

11.47. Dibuja un triángulo de lados 2, 4 y 5 centímetros. Construye otros triángulos semejantes al anterior con razones de semejanza 2 y $\frac{1}{2}$.

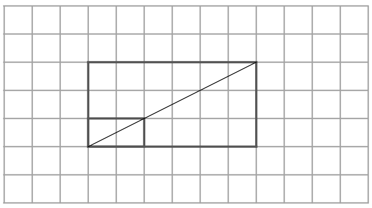


El triángulo *ABC* tiene por lados 5, 4 y 2

El triángulo *AB'C'* es semejante al *ABC* con razón de semejanza 2.

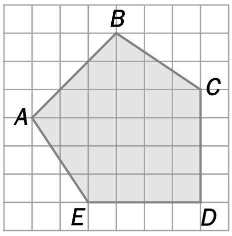
El triángulo *AB"C"* es semejante al *ABC* con razón de semejanza 0,5.

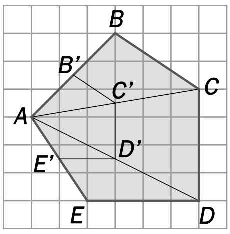
11.48. Construye un rectángulo de medidas 3 × 6 centímetros y, después, otro semejante al anterior con razón de semejanza $\frac{1}{3}$.



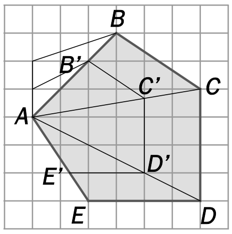
El segundo rectángulo medirá 1 × 2 centímetros.

11.49. Construye dos polígonos semejantes al de la figura con razones de semejanza $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.





$k = \frac{1}{2}$



$k = \frac{2}{3}$

Escalas

11.50. (TIC) En un mapa se indica que la escala es 1:25 000. ¿Cuál es la razón de semejanza entre la realidad y la realidad representada? Si la distancia entre dos ciudades en ese mapa es de 15,5 centímetros, ¿cuál será la distancia real que las separa? Da el resultado en kilómetros.

En el mapa, un centímetro representa 25 000 cm de la realidad.

La razón de semejanza es, por tanto, $k = \frac{25000}{1} = 25\,000$.

Los 15,5 cm del plano se corresponden con 15,5 · 25 000 = 387 500 cm = 3,875 km.

11.51. La altura de un edificio es de 30 metros. Se quiere construir una maqueta a escala 1:200. ¿Cuál será la altura de ese edificio en la maqueta?

La altura en la maqueta es de $\frac{30}{200} = 0{,}15$ m = 15 cm.

11.52. En una maqueta de un jardín botánico, la altura de una estatua es de 2,5 centímetros. Calcula la escala de la maqueta si la altura real de esa estatua es de 2 metros.

2 m = 200 cm $\Rightarrow \frac{200}{2{,}5} = 80 \Rightarrow$ La escala de la maqueta es 1: 80.

11.53. (TIC) La distancia entre dos ciudades representadas en un mapa de escala 1:50 000 es de 10 centímetros. Calcula la distancia que separa a dichas ciudades en otro mapa de escala 1:125 000.

En el mapa de 1:50 000, 10 cm son 10 · 50 000 = 500 000 cm = 5 km de la realidad.

En el mapa de 1:125 000, 5 km de la realidad son $\frac{500000}{125000}$ = 4 cm en el mapa.

11.54. La distancia entre dos ciudades es de 350 kilómetros y la distancia que las separa en un mapa es de 7 centímetros. ¿Cuál es la escala de dicho mapa?

350 km = 35 000 000 cm $\Rightarrow \dfrac{35000000}{7} = 5\,000\,000 \Rightarrow$ La escala de la maqueta es 1:5 000 000.

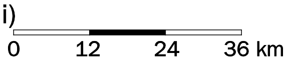
11.55. (TIC) El cuarto de Javier es un rectángulo de dimensiones 3,15×3,78 metros. ¿Qué dimensiones tendrá el rectángulo que ha pintado en un plano con escala 1:21?

1 m en el plano son 21 m de la realidad, con lo que las dimensiones en el plano serán:

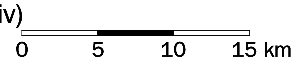
$\dfrac{3{,}15}{21} = 0{,}15$ m = 15 cm y $\dfrac{3{,}78}{21} = 0{,}18$ m = 18 cm

11.56. Relaciona cada una de las escalas dadas en forma gráfica con cada una de las escalas dadas mediante una proporción numérica.

i)


iii)


ii)


iv)


a) 1:500 000

c) 1:1 200 000

b) 1:500

d) 1:1200

En la escala gráfica I, 1 cm equivale a 12 m = 1 200 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica d.

En la escala gráfica II, 1 cm equivale a 5 m = 500 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica b.

En la escala gráfica III, 1 cm equivale a 12 km = 1 200 000 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica c.

En la escala gráfica IV, 1 cm equivale a 5 km = 500 000 cm reales; por tanto, se corresponde con la escala numérica a.

PROBLEMAS

11.57. La sombra de una casa de 21 metros de altura es de 28 metros. ¿Qué sombra proyectará en ese momento un árbol de 3 metros de alto?

En un mismo instante, los rayos del sol tienen la misma inclinación y, por tanto, los triángulos rectángulos cuyos catetos son las alturas y las sombras son semejantes.

Aplicando la semejanza de triángulos y siendo *x* la medida buscada:

$$\frac{21}{28} = \frac{3}{x} \Rightarrow 21x = 84 \Rightarrow x = 4 \text{ m}$$

11.58. (TIC) Las dimensiones de un jardín rectangular en un plano de escala 1: 125 son 24 y 32 centímetros.

a) Calcula las dimensiones reales del jardín y expresa los resultados en metros.

b) Calcula el perímetro y el área del jardín.

a) 1 cm del plano se corresponde con 125 cm de la realidad.

Por tanto, las dimensiones reales son 24 · 125 = 3000 cm = 30 m y 32 · 125 = 4000 = 40 m.

b) El perímetro es $P = 2 \cdot (40 + 30) = 140$ m.

El área es $A = 40 \cdot 30 = 1200$ m^2.

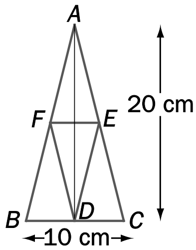
11.59. (TIC) La distancia entre Badajoz y Lisboa es de 230 kilómetros. Calcula la distancia que separa ambas ciudades en un mapa con escala 1:1 200 000.

1 cm del mapa se corresponde con $1200000 \text{ cm} = 12 \text{ km}$ de la realidad.

Por tanto, la distancia en el mapa que separa las dos ciudades será $\frac{230}{12}$ = 19,17 cm.

11.60. Un triángulo isósceles tiene por base 10 metros y por altura 20 metros. Calcula el perímetro de dicho triángulo y del que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados.

Observemos la siguiente figura:



Por el teorema de Pitágoras, $AC = \sqrt{20^2 + 5^2} = \sqrt{425} \approx 20{,}62$ m

El perímetro del triángulo *ABC* es, por tanto, $P = 10 + 2\sqrt{425} \approx 51{,}23$ m.

El triángulo *DEF* es igual que el triángulo *AFE*, que es semejante a *ABC* con razón de semejanza $\frac{1}{2}$.

Por tanto, el perímetro de *DEF* es la mitad del de *ABC*, es decir, $\frac{10 + 2\sqrt{425}}{2} = 5 + \sqrt{425} \approx 25{,}62$ m.

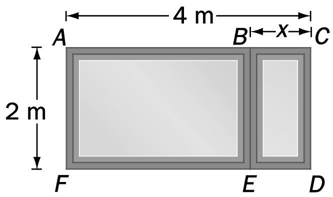
11.61. (TIC) Una empresa de vehículos fabrica dos camiones semejantes para transporte de carburantes. Las alturas respectivas son de 2 y 2,5 metros. El área necesaria para construir el depósito del camión menor es de 18 metros cuadrados y el volumen del depósito del camión mayor es de 48 metros cúbicos. Calcula el área necesaria para construir el depósito mayor y el volumen del depósito menor.

La razón de semejanza es $\frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$.

El área del depósito mayor es $18 \cdot 1{,}25^2 = 28{,}125 \text{ m}^2$.

El volumen del depósito menor es $\frac{48}{1{,}25^3} = 24{,}576 \text{ m}^3$.

11.62. Se quiere construir un ventanal formado por dos rectángulos *ABEF* y *BCDE* con la forma y dimensiones que muestra la figura.



a) Calcula el valor del lado *x = BC* para que los rectángulos *ACDF* y *BCDE* sean semejantes.

b) Halla las áreas de los rectángulos anteriores y comprueba la relación que existe entre su razón y la razón de semejanza.

c) Comprueba si el rectángulo *ABEF* es también semejante a los anteriores.

a) $\frac{AC}{CD} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 1$ m

b) Área del rectángulo *ACDF*: $S_1 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ m}^2$

Área del rectángulo *BCDE*: $S_2 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ m}^2$

La razón de semejanza entre los dos rectángulos es $k = \frac{4}{2} = 2$.

La razón de áreas es $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{2} = 4$, que coincide con k^2.

c) Los lados de *ABEF* miden 3 y 2 m, por lo que este rectángulo no es semejante a los anteriores ya que sus lados no son proporcionales a los de ellos.

11.63. (TIC) En un mapa de escala 1:50 000, la distancia que separa los dos extremos de un camino recto es de 6,5 centímetros. ¿Cuánto tiempo tardará una persona en realizar dicho camino andando a una velocidad de 5 kilómetros por hora?

1 cm del mapa se corresponde con 50 000 cm = 0,5 km de la realidad.

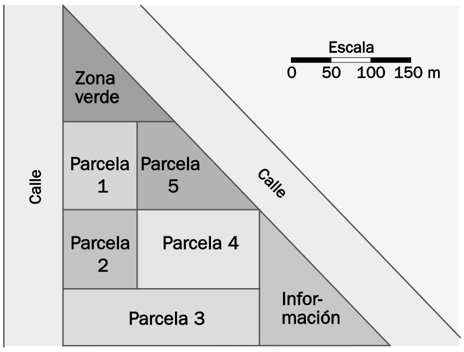
Por tanto, el camino mide en realidad 6,5 · 0,5 = 3,25 km, y el tiempo que se tardará en recorrerlo será $\frac{3,25}{5}$ = 0,65 horas = 39 minutos.

11.64. El siguiente plano representa un proyecto de un nuevo polígono industrial.

a) Halla las dimensiones de las parcelas 1, 2, 3 y 4.

b) Obtén las dimensiones y el área de la parcela 5.

c) ¿Qué dimensiones tienen las parcelas destinadas a zona verde e información?



a) Según la escala gráfica, 1 cm en el plano equivale a 100 m = 10 000 cm en realidad, es decir, la escala del plano es 1:10 000. De este modo:

– Dimensiones de la parcela 1: 1 · 10 000 = 10 000 cm = 100 m y 1,2 · 10 000 = 12 000 cm = 120 m

– Dimensiones de la parcela 2: 1 · 10 000 = 10 000 cm = 100 m y 1 · 10 000 = 10 000 cm = 100 m

– Dimensiones de la parcela 3: 2,6 · 10 000 = 26 000 cm = 260 m y 0,8 · 10 000 = 8 000 cm = 80 m

– Dimensiones de la parcela 4: 1,6 · 10 000 = 16 000 cm = 160 m y 1 · 10 000 = 10 000 cm = 100 m

b) La parcela 5 es un trapecio de:

– Bases 1,6 · 10 000 = 16 000 cm = 160 m y 0,5 · 10 000 = 5 000 cm = 50 m

– Altura 1,2 · 10 000 = 12 000 cm = 120 m

Por tanto su área es de $\frac{(160+50)\cdot 120}{2}$ = 12 600 m^2.

c) Zona verde: triángulo rectángulo de catetos 150 y 150 m

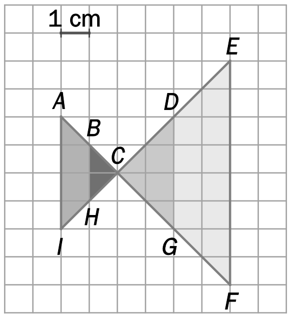
Información: triángulo rectángulo de catetos 175 y 175 m

11.65. Se quiere diseñar un logotipo tal y como muestra la figura

a) Indica alguna razón que demuestre que los triángulos *CEF* y *BCH* son semejantes.

b) Comprueba si los trapecios *ABHI* y *DEFG* son o no semejantes.

c) Calcula la razón de las áreas de los trapecios anteriores.



a) El triángulo *ACI* es semejante al *BCH*, ya que ambos están en posición de Tales. El triángulo *ACI* es igual al triángulo *DCG*. El triángulo *DCG* es semejante al *CEF*, ya que ambos están en posición de Tales. Por tanto, *CEF* y *BCH* son semejantes.

b) Sí son semejantes, ya que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales:

$AB = HI = \sqrt{2}$ cm $BH = 2$ cm $AI = 4$ cm

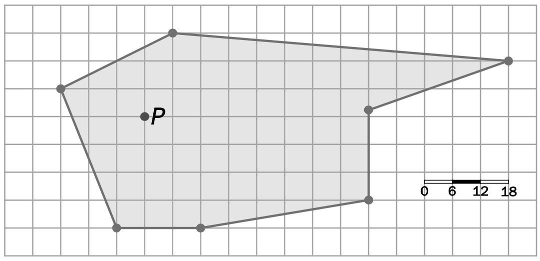
$DE = GF = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm $GD = 4$ cm $EF = 8$ cm

$\frac{DE}{AB} = \frac{GF}{HI} = \frac{GD}{BH} = \frac{EF}{AI}$ = 2 (por tanto, la razón de semejanza de los dos trapecios es k = 2)

c) La razón de áreas es k^2 = 4.

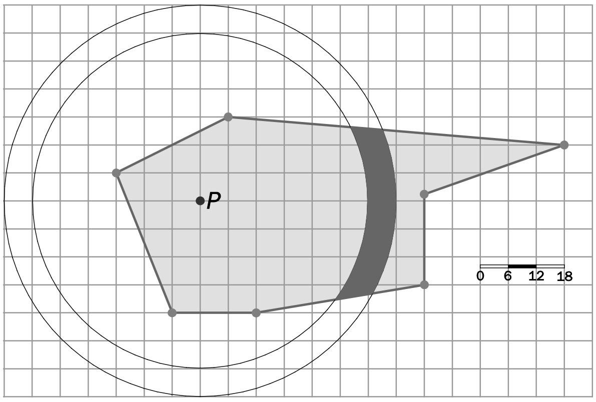
11.66. (TIC) El plano siguiente representa una zona donde se quieren colocar molinos para la generación de energía eléctrica.

Los molinos deben estar situados a más de 28 y a menos de 36 kilómetros del punto *P*. Copia el plano en tu cuaderno y señala la zona donde pueden ir ubicados los molinos.



Según la escala gráfica, 1 unidad en el plano equivale a 6 km; por tanto, los molinos deben situarse en el plano a más de $\frac{28}{6} \approx 4{,}67$ unidades y a menos de $\frac{36}{6} =$ unidades del punto *P*.

De este modo, el área donde pueden colocarse los molinos es la intersección de la zona inicial con la corona circular de centro *P* y radios 4,67 y 6 unidades.

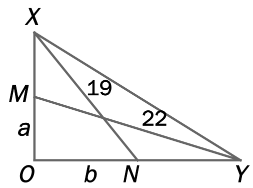


AMPLIACIÓN

11.67. En el triángulo *XOY* con ángulo recto en *O*, *M* y *N* son los puntos medios de los catetos *OX* y *OY*. Si *XN* = 19 e *YM* = 22, ¿cuál es el valor de *XY*?

a) 24 **b) 26** **c) 28** **d) 30**

La situación es como la de la figura:



Llamando *a* y *b* a *OM* y *ON*, respectivamente, podemos escribir:

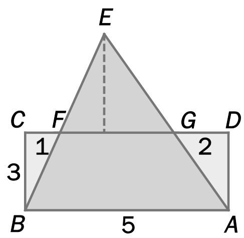
$$\begin{cases} (2a)^2 + b^2 = 19^2 \\ a^2 + (2b)^2 = 22^2 \end{cases}$$

Sumando ambas igualdades tenemos $5(a^2 + b^2) = 845$, de donde $a^2 + b^2 = 169$.

Por último, observemos que $XY^2 = 4a^2 + 4b^2$, con lo que *XY* = 26, la respuesta b.

11.68. En el rectángulo *ABCD*, *AB* = 5 y *BC* = 3. Marcamos en *CD* los puntos *F* y *G* con *CF* = 1 y *GD* = 2. Si las rectas *BF* y *AG* se cortan en *E*, ¿cuál es el área del triángulo *AEB*?

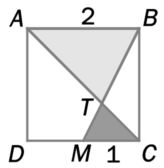
a) 10 **b) $\frac{21}{2}$** **c) 12** **d) $\frac{25}{2}$**



La base *FG* del triángulo *EFG* mide 5 – (1 + 2) = 2.

Llamando *h* a la altura de *EFG* sobre el lado *FG*, la semejanza de los triángulos *EFG* y *EBA* nos permite escribir $\frac{h}{2} = \frac{h+3}{5}$, de donde *h* = 2, siendo entonces la altura sobre *BA* en el triángulo *EBA* 2 + 3 = 5, y, por tanto, su área, $\frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$, la respuesta d.

11.69. El lado del cuadrado *ABCD* de la figura mide 2. Si *M* es el punto medio del lado *CD*, el área del triángulo *TMC* es:



a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{7}$ **d)** $\frac{3}{10}$

Los triángulos *ATB* y *TMC* son semejantes, de razón de semejanza 2.

Llamando *h* a la altura en el triángulo *TMC* sobre el lado *MC*, podemos escribir que $h + 2h = 2$, de donde $h = \frac{2}{3}$ y el área pedida es $\frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{2} \cdot= \frac{1}{3}$, la respuesta a.

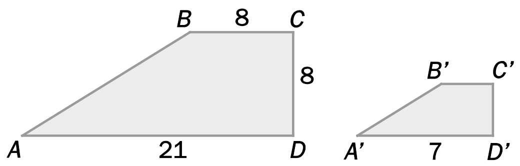
AUTOEVALUACIÓN

11.1. Las siguientes figuras son semejantes:

a) Halla la medida del lado *AB*.

b) Indica la razón de semejanza y calcula la medida de los lados *A'B'*, *B'C'* y *C'D'*.

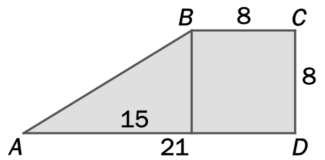
c) Comprueba la relación existente entre la razón de semejanza y las razones de los perímetros y de las áreas en figuras semejantes.



a) Observemos la siguiente figura.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$AB = \sqrt{13^2 + 8^2} = \sqrt{233} \approx 15{,}26$



b) La razón de semejanza es $k = \frac{A'D'}{AD} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$; de este modo:

$A'B' = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{233} = \frac{\sqrt{233}}{3} \approx 5{,}08$

$B'C' = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$

$C'D' = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$

c) El perímetro de la primera figura es $P_1 = \sqrt{233} + 21 + 8 + 8 = 37 + \sqrt{233} \approx 52{,}26$.

El perímetro de la segunda figura es $P_2 = \frac{\sqrt{233}}{3} + 7 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{37 + \sqrt{233}}{3} \approx 17{,}42$.

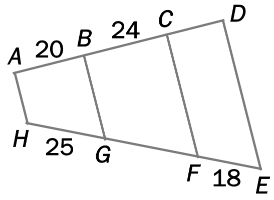
La razón de perímetros es, por tanto, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left(37 + \sqrt{233}\right)/3}{37 + \sqrt{233}} = \frac{1}{3}$, es decir, coincide con la razón de semejanza.

El área de la primera figura es $A_1 = \frac{(21 + 8) \cdot 8}{2} = 116$.

El área de la segunda figura es $A_2 = \frac{\left(7 + \frac{8}{3}\right) \cdot \frac{8}{3}}{2} = \frac{116}{9}$.

La razón de áreas es, por tanto, $\frac{A_2}{A_1} = \frac{116/9}{116} = \frac{1}{9}$, es decir, coincide con el cuadrado de la razón de semejanza.

11.2. Observa la siguiente figura y calcula *GF* y *CD*.



Aplicando el teorema de Tales tenemos:

$$\frac{20}{25} = \frac{24}{GF} \Rightarrow GF = \frac{25 \cdot 24}{20} = 30$$

$$\frac{20}{25} = \frac{CD}{18} \Rightarrow CD = \frac{20 \cdot 18}{25} = 14{,}4$$

11.3. Comprueba, en cada caso, si las siguientes parejas de triángulos son o no semejantes.

a) Triángulo *ABC*: *AB* = 12, *BC* = 9 y *AC* = 4 cm

Triángulo *DEF*: *DE* = 12, *DF* = 27 y *EF* = 36 cm

b) Triángulo *ABC*: *A* = 43º y *B* = 67º

Triángulo *DEF*: *D* = 70º y *F* = 67º

a) Sí, son semejantes, ya que sus lados son proporcionales:

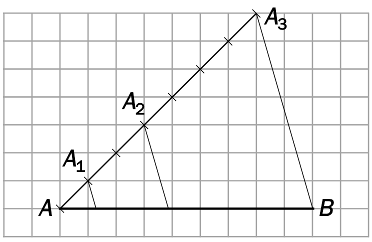
$$\frac{EF}{AB} = \frac{DF}{BC} = \frac{DE}{AC} = 3$$

b) Sí, son semejantes, ya que tienen sus tres ángulos iguales:

A = 43º *B* = 67º *C* = 180º – 43º – 67º = 70º

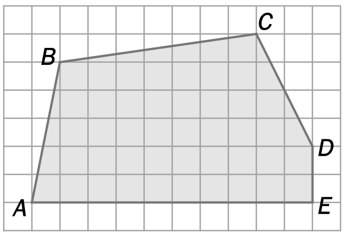
D = 70º *F* = 67º *E* = 180º – 70º – 67º = 43º

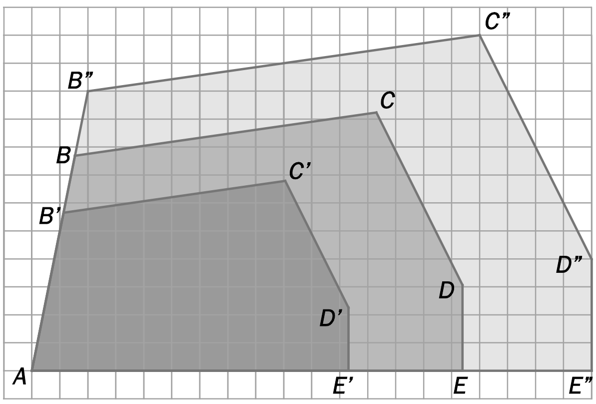
11.4. Divide un segmento de 9 centímetros de longitud en tres partes proporcionales a 1, 2 y 4.



11.5. Dibuja en tu cuaderno un polígono semejante al de la figura con escalas:

a) $\frac{3}{4}$ **b) $\frac{4}{3}$**





Los polígonos *ABCDE* y *AB'C'D'E'* son semejantes con razón de semejanza $\frac{3}{4}$.

Los polígonos *ABCDE* y *AB''C''D''E''* son semejantes con razón de semejanza $\frac{4}{3}$.

11.6. Tres latas de tomate tienen forma semejante y sus alturas respectivas son de 20, 25 y 40 centímetros. Si el volumen de la lata mediana es de 250 centímetros cúbicos, halla los volúmenes de las otras dos latas.

La razón de semejanza de la lata pequeña a la mediana es $\frac{25}{20} = 1{,}25$.

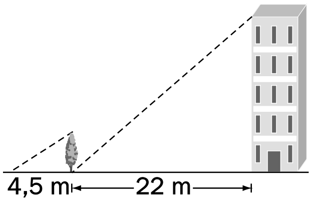
Por tanto, el volumen de la lata pequeña será de $\frac{250}{1{,}25^3} = 128$ cm^3.

La razón de semejanza de la lata mediana a la mayor es $\frac{40}{25} = 1{,}6$.

Por tanto, el volumen de la lata mayor será de $250 \cdot 1{,}6^3 = 1\,024$ cm^3.

11.7. Un edificio de cinco plantas de igual altura proyecta, en cierto instante, una sombra de 22 metros. Calcula la altura de cada planta si se sabe que en ese mismo momento un árbol de 3 metros de altura proyecta una sombra de 4,5 metros.

En un mismo instante, los rayos del sol tienen la misma inclinación y, por tanto, los triángulos rectángulos cuyos catetos son las alturas y las sombras son semejantes.



Aplicando la semejanza de triángulos y siendo *h* la altura del edificio:

$$\frac{h}{3} = \frac{22}{4{,}5} \Rightarrow h = \frac{22 \cdot 3}{4{,}5} \approx 14{,}67 \text{ m}$$

De este modo, cada planta medirá $\frac{14{,}67}{5} \approx 2{,}93$ m.

11.8. La distancia entre dos ciudades representadas en un mapa de escala 1:50 000 es de 4 centímetros. Calcula la distancia que separa dichas ciudades en otro mapa de escala 1:120 000.

1 cm en el primer mapa son 50 000 cm = 500 m en la realidad.

La distancia real de las dos ciudades es de $4 \cdot 500 = 2000$ m = 2 km.

1 cm en el segundo mapa son 120 000 = 1200 m de la realidad.

La distancia entre las ciudades en el segundo mapa es de $\frac{2000}{1200} \approx 1{,}67$ cm.

11.9. Si la maqueta de un coche que en la realidad mide de largo 2,7 metros mide 15 centímetros, ¿cuál es la escala de la maqueta?

2,7 m = 270 cm de la realidad son 15 cm en la maqueta.

Por tanto, 1 cm en la maqueta son $\frac{270}{15} = 18$ cm en la realidad, es decir, la escala es 1:18.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Aprende a pensar > En el país de los gigantes

Después de regresar a casa, Gulliver emprende otro viaje, y vuelve a tener mala suerte. Es abandonado en la playa cuando un monstruo empieza a perseguir el bote en el que sus compañeros habían ido con él a buscar agua. El bote se va y Gulliver se queda solo en una tierra desconocida… otra vez.

El monstruo resulta ser un habitante del país, de una estatura gigante, y Gulliver es atrapado y llevado a una casa. Allí conoce a una familia que decide quedarse con él como mascota.

Tras unos días en los que es exhibido como un animal de circo, es comprado por la reina, y permanece en la corte, hasta que un día un águila enorme se lleva la jaula en la que vive. Finalmente, la jaula cae al mar, y Gulliver es rescatado por un barco.

11.1. El escritor proporciona datos sobre el tamaño de los habitantes de este país de gigantes, llamado Brobdingnag. Curiosamente, la proporción entre su estatura y la de Gulliver es la misma que la de este con los liliputienses. ¿Cuánto mediría uno de esos gigantes, si Gulliver medía 1,80 metros? Haz un dibujo de ambos a escala.

El gigante mide 21,6 metros. En una hoja cuadriculada, por ejemplo, es sencillo realizar un dibujo a escala.

11.2. Swift sitúa el país imaginario de Brobdingnag en el mar entre Japón y California, formando una península unida por una cadena de volcanes infranqueable a América. Según él, la extensión del país es de unas seis mil millas de longitud y cinco mil de anchura.

Una milla mide, aproximadamente, 1,609 kilómetros.

a) ¿Qué extensión tendría el país (en km^2) si su forma fuera rectangular?

b) Busca datos sobre la extensión de España. ¿Qué proporción habría entre ambos países?

c) Utiliza un mapa de América del Norte y dibuja a escala el país de Brobdingnag.

a) El país mediría 77 666 430 km^2.

b) España mide, aproximadamente, 505 000 km^2, por lo que es unas 154 veces menor.

c) Actividad manual, dibujo de un mapa.

11.3. La proporción entre la estatura de los liliputienses y la de los gigantes es fácil de calcular. Para un gigante, un liliputiense sería un ser diminuto. ¿Qué tamaño tendría un habitante de un país en el que la proporción con nuestra estatura fuera esa?

La proporción es 1:144. Para una persona de 1,44 metros de estatura, el habitante correspondiente mediría 1 centímetro.

11.4. Swift cuenta algunos de los problemas que tuvo Gulliver en estos dos primeros viajes. Al final del libro explica que no cree conveniente invadir ninguno de estos países. ¿Qué reacción crees que habría si se descubriera un lugar como cualquiera de estos en la realidad? ¿Cómo serían tratados sus habitantes? Debate con tus compañeros sobre este tema y sobre el respeto a la diferencia

Actividad de debate en el aula.

11.5. Debate también sobre el respeto a los que son diferentes con compañeros de otros centros en http://matematicas20.aprenderapensar.net/

Actividad de debate en la web.

Analiza la ficción > La ley del cuadrado – cubo

En su segundo viaje, Gulliver se enfrenta a animales gigantes. Esta idea se repite con frecuencia en las historias de ciencia ficción. Aparecen monstruos enormes como King Kong o Godzilla. ¿Esto es científicamente posible o hay un límite que no se puede sobrepasar?

Galileo enunció la ley del cuadrado-cubo, que dice que si las dimensiones de un cuerpo se multiplican por una misma cantidad, su superficie y su volumen quedan multiplicados por el cuadrado y el cubo de esa cantidad, respectivamente.

Cualquier superficie de un cuerpo, como los pies o la sección de las rodillas, puede soportar una presión determinada, que depende del material que lo forma. Esa presión es directamente proporcional al volumen, e inversamente proporcional a la superficie.

11.1. **Una persona de 90 kg de peso, con dos piernas, se apoya en unos 600 cm^2, y sus pies soportan una presión de $\frac{90}{600}$ = 0,15 kg/cm^2. Si se multiplican sus dimensiones (largo, ancho y alto) por 10:**

a) **¿Por qué número queda multiplicado su volumen (y, por tanto, su peso)? ¿Y la superficie en la que se apoya?**

b) **¿Por qué número se multiplica la presión?**

c) **¿Qué peso debería tener una persona de estatura normal para que resultara esa misma presión? ¿Es posible?**

a) Al multiplicar cada dimensión por 10, el volumen y el peso se multiplican por 1000, y la superficie por 100.

b) La presión se multiplica por 10.

c) Una persona de estatura normal debería pesar 10 veces más para que la presión fuera esa, lo que resulta imposible. En el ejemplo debería pesar 900 kg.

11.2. **Un gorila tiene una estatura aproximada de 2 metros, y puede pesar unos 200 kg.**

a) **Si, según las distintas películas, King Kong medía unos 18 metros de altura, ¿cuánto pesaría?**

b) **¿Por qué número se multiplicaría esa presión? ¿Podría su cuerpo soportarla?**

a) Como la altura se multiplica por 9, el peso se multiplica por 9^3, es decir, por 729, con lo que pesaría 200 · 729 = 145 800 kg = 145,8 toneladas.

b) La presión se multiplicaría por 9, por lo que moriría aplastado por su propio peso.

11.3. **Busca cuatro ejemplos de animales terrestres actuales o extinguidos de gran peso y analiza si sus patas son parecidas a las de otros animales más ligeros. ¿A qué se debe la diferencia?**

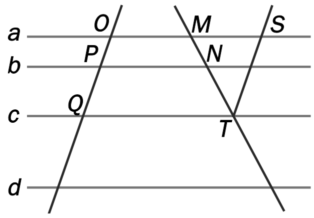
Los ejemplos más repetidos serán los elefantes y los dinosaurios. Para sostener un peso mayor, los animales deben tener una superficie de apoyo mayor, por lo que dos animales de la misma estatura tendrán patas muy distintas según su peso. Las patas del elefante, por ejemplo, son mucho más anchas que las de animales más ligeros, como las jirafas.

Escucha y aplica > Teorema de Tales

El grupo musical Les Luthiers interpreta la canción *El teorema de Tales*, en la que, con humor, se enuncia el famoso teorema, aunque la demostración es puramente cómica. Mientras estudiaba en la facultad, uno de los músicos del grupo no era capaz de recordar una fórmula, y decidió ponerle música. A partir de esa idea compuso esta canción.

11.1. **Escúchala en www.e-sm.net/2esoz60. Dibuja las rectas y segmentos que cantan Les Luthiers.**

Actividad en la web, con una parte práctica en la que el dibujo podría parecerse a este:



11.2. **Las reglas mnemotécnicas son trucos para memorizar nombres, fechas, etc. Puedes ver ejemplos en www.e-sm.net/2esoz61.**

Actividad en la web.

11.3. **Un truco para recordar números es crear una frase. Por ejemplo, el número 2945 se asociaría a una frase como: “En (2 letras) Barcelona (9) hace (4) calor (5)”. Inventa una frase para recordar las siguientes cifras del número π: 3,14159265.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: “Voy a casa a comer pimientos de Padrón sosos”.

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Ana María Álvarez, Marina Díaz, Mariano García, Fernando Alcaide**

Edición: **Rafaela Arévalo, Eva Béjar, José Miguel Gómez**

Revisión contenidos: **Jesús García Gual**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Modesto Arregui, Estudio "Haciendo el león", Jurado y Rivas**

Fotografía: **Sonsoles Prada/Archivo SM; Javier Jaime**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Impreso en España – *Printed in Spain*